Nível Embasamento

01. (FGV-2004) Dados AB = 18cm, AE = 36cm e DF = 8cm, e sendo o quadrilátero ABCD um paralelogramo, o comprimento de BC, em cm, é igual a:

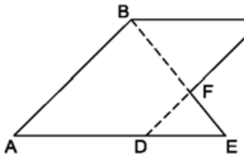
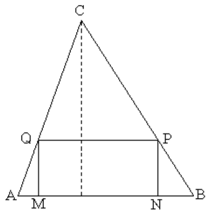


Figura fora de escala

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 30

02. (FUVEST-98) No triângulo acutângulo ABC a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é:

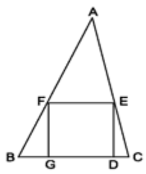


a) 4 b) 8 c) 12 d) 14 e) 16

03. (IBMEC-2001) ABC é um triângulo isósceles, em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sabendo que $\overline{BD} = \overline{BC}$, que $\overline{AD}$ = 5cm e que $\overline{DC}$ = 4cm, então, a base $\overline{BC}$ desse triângulo vale:

a) $2\sqrt{5}$ cm b) 4,5 cm c) 5,0 cm d) $3\sqrt{2}$ cm e) 6,0 cm

04. (MACKENZIE-2002) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado DEFG mede 3. A altura do triângulo ABC, em relação ao lado BC, mede:

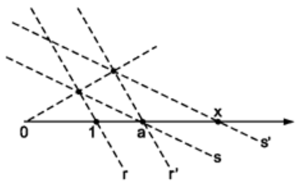


a) 7,5 b) 8,0 c) 8,5
d) 9,0 e) 9,5

05. (UFMG-2002) Em determinada hora do dia, o sol projeta a sombra de um poste de iluminação sobre o piso plano de uma quadra de vôlei. Neste instante, a sombra mede 16m. Simultaneamente, um poste de 2,7m, que sustenta a rede, tem sua sombra projetada sobre a mesma quadra. Neste momento, essa sombra mede 4,8m. A altura do poste de iluminação é de:

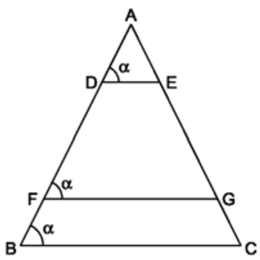
a) 8,0 m b) 8,5 m c) 9,0 m d) 7,5 m

06. (MACKENZIE-2002) Na figura temos r // r' e s // s'. Então, para todo a > 1, o valor da abscissa x é:



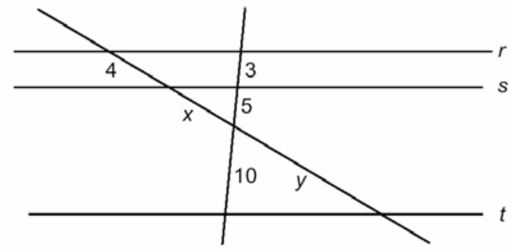
a) 2a b) a^2 c) $(a + 1)^2$
d) a + 1 e) $\sqrt{a}+1$

07. (MACKENZIE-2003) Na figura, se $\overline{AB} = 5\overline{AD} = 5\overline{FB}$, a razão $\dfrac{\overline{FG}}{\overline{DE}}$ vale:



a) 3 b) 4 c) 5
d) $\dfrac{5}{2}$ e) $\dfrac{7}{2}$

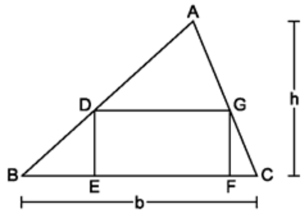
08. (UNESP-JULHO-2003) Considere 3 retas coplanares paralelas, r, s e t, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura.



Os valores dos segmentos identificados por x e y são, respectivamente:

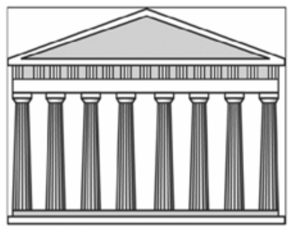
a) $\dfrac{3}{20}$ e $\dfrac{3}{40}$ b) 6 e 11 c) 9 e 13 d) 11 e 6 e) $\dfrac{20}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$

09. (FUVEST-2003) O triângulo ABC tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b, é dada pela fórmula:



a) $\dfrac{bh}{h+b}$ b) $\dfrac{2bh}{h+b}$ c) $\dfrac{bh}{h+2b}$ d) $\dfrac{bh}{2h+b}$ e) $\dfrac{bh}{2(h+b)}$

10. (UEL-2003) O Partenon, construído em Atenas, na Grécia Antiga, exemplifica o estilo e as proporções que se encontram em quase todos os templos gregos. Do ponto de vista da geometria, sua fachada é retangular (ver figura) e possui medidas especiais, obtidas da seguinte maneira: toma-se um segmento de comprimento D e divide-se em duas partes, de tal forma que a razão entre o segmento todo (D) e a parte maior (x) seja igual à razão entre a parte maior e a parte menor. A parte maior seria a base do retângulo, e a menor, a altura. Assinale a alternativa que indica essa razão.

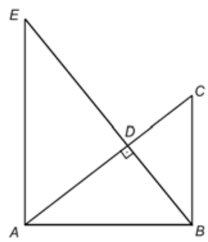


a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+3}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-3}$

11. (UEL-2003) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura abaixo. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.

a) 1,50 m b) 1,75 m
c) 2,00 m d) 2,25 m
e) 2,50 m

12. Nesta figura, os ângulos $A\hat{B}C$, $C\hat{D}E$ e $E\hat{A}B$ são retos e os segmentos AD, CD e BC medem, respectivamente, x, y e z :
Nessa situação, a altura do triângulo ADE em relação ao lado AE é dada por:

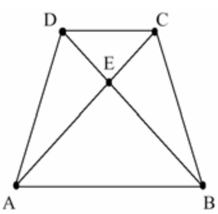


a) $\dfrac{x\sqrt{z^2-y^2}}{y}$ b) $\dfrac{x\sqrt{z^2-y^2}}{z}$
c) $\dfrac{y\sqrt{z^2-y^2}}{z}$ d) $\dfrac{z\sqrt{z^2-y^2}}{y}$ e) $\sqrt{z^2-y^2}$

13. (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

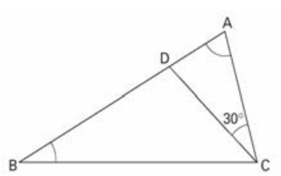
a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $x^2 - x - 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$
d) $x^2 + x - 1 = 0$ e) $x^2 - x - 1 = 0$

14. (IBMEC-RJ-2002) Na figura ao lado, ABCD é um trapézio de bases iguais a 5cm e 3cm. Se a altura desse trapézio é igual a 4cm, então, a distância (em cm) entre o ponto E e a base $\overline{AB}$ é igual a:



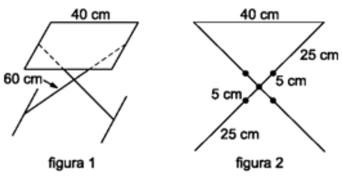
a) 2,1 b) 2,2 c) 2,3
d) 2,4 e) 2,5

15. (MACKENZIE-2006) No triângulo abaixo, temos AB = BC e CD = AC. Se x e y são as medidas em graus dos ângulos A e B, respectivamente, então x + y é igual a:



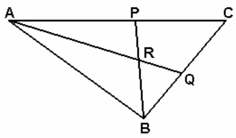
a) 120° b) 110° c) 115° d) 95° e) 105°

16. (FUVEST-2002) Um banco de altura regulável, cujo assento tem forma retangular, de comprimento 40 cm, apóia-se sobre duas barras iguais, de comprimento 60 cm (ver figura 1). Cada barra tem três furos, e o ajuste da altura do banco é feito colocando-se o parafuso nos primeiros, ou nos segundos, ou nos terceiros furos das barras (ver visão lateral do banco, na figura 2). A menor altura que pode ser obtida é:



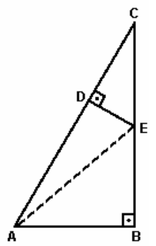
a) 36 cm b) 38 cm c) 40 c d) 42 cm e) 44 cm

17. Na figura, *ABC* é um triângulo com $AC = 20$ cm, $AB = 15$ cm e $BC = 14$ cm. Sendo *AQ* e *BP* bissetrizes interiores do triângulo *ABC*, o quociente $\frac{QR}{AR}$ é igual a:



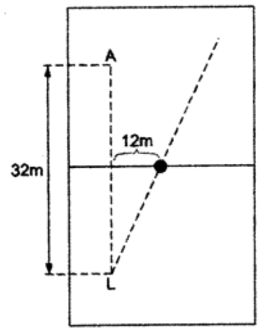
a) 0,3 b) 0,35 c) 0,4 d) 0,45 e) 0,5

18. Na figura, *ABC* e *CDE* são triângulos retângulos, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ e $BE = 2.DE$. Logo, a medida de *AE* é:



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

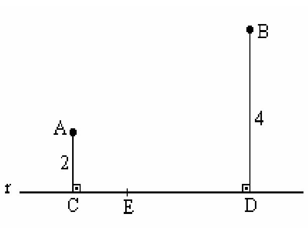
19. (FUVEST) Um lateral *L* faz um lançamento para um atacante *A*, situado 32m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio de campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



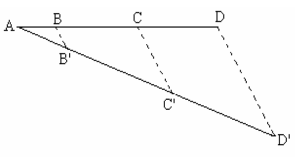
a) 18,8m b) 19,2m c) 19,6m d) 20m e) 20,4m

20. No triângulo *ABC* temos $AB = 5$, $BC = 9$ e $AC = 10$. Se *P* é o ponto médio de *AB* e *Q* é o ponto médio de *BC*, então o comprimento de *PQ* é:
a) 4 b) 5 c) 8 d) $3\sqrt{2}$ e) 9

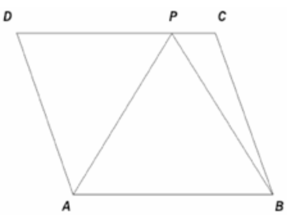
21. (FUVEST-99) Na figura ao lado, as distâncias dos pontos A e B à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?



22. (UNICAMP-93) A figura mostra um segmento AD dividido em três partes: AB = 2 cm, BC = 3 cm e CD = 5 cm. O segmento AD’ mede 13 cm e as retas BB’ e CC’ são paralelas a DD’. Determine os comprimentos dos segmentos AB’, B’C’ e C’D’.



23. (UFMG-2003) No paralelogramo ABCD, da figura abaixo, o ponto P, contido no lado CD, é tal que o segmento PC mede 4 cm, os segmentos AP e PB medem 14 cm cada um e os ângulos DÂP e PÂB têm a mesma medida.
DETERMINE a medida do lado AD.



24. (UNICAMP-88) Sejam L e D o comprimento e a largura, respectivamente, de um retângulo que possui a seguinte propriedade: eliminando-se desse retângulo um quadrado de lado igual à largura D, resulta um novo retângulo semelhante ao primeiro. Demonstre que a razão D/L é o número $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Chamado “razão áurea”.

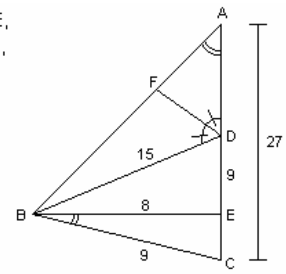
25. (FUVEST-97) ABC é um triângulo retângulo em A e CX é bissetriz do ângulo BCA, onde X é ponto do lado AB. A medida de CX é 4 cm e a de BC, 24 cm. Calcule AC.

26. Num ΔABC, pontos E e D são tomados sobre os lados AB e CB, respectivamente, de modo que $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{1}$ e $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$. Sendo P o ponto de interseção de AD e CE, determine o valor da razão r = $\frac{CP}{PE}$.

27. (ITA) ABCD é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. E e F são tomados sobre $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, de forma que $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{2}{1}$. Sendo AB = 7 e DC = 10, ache o comprimento de $\overline{EF}$.

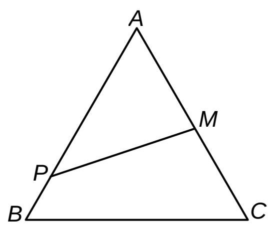
28. No triângulo *ABC* da figura, que não está desenhada em escala, temos:
a) Mostre que os triângulos *ABC* e *BEC* são semelhantes e, em seguida, calcule *AB* e *EC*.
b) Calcule *AD* e *FD*.

BÂC ≅ CÊB,
AD̂F ≅ BD̂F,
AC = 27,
BC = 9,
BE = 8,
BD = 15 e
DE = 9.

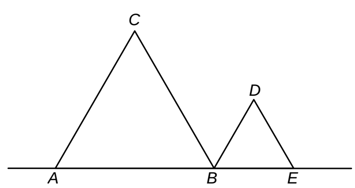


29. (VUNESP) No triângulo retângulo *ABC*, o ponto médio da hipotenusa *AC* é *P* e o pé da perpendicular baixada de *B* sobre *AC* é *Q*. Mostre que:
a) $\frac{QP}{BP} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ b) $\frac{BQ}{BP} = 2.\left(\frac{AB}{AC}\right).\left(\frac{BC}{AC}\right)$

30. (FUVEST-77) ABC é eqüilátero de lado 4; $\overline{AM} = \overline{MC} = 2, \overline{AP} = 3$ e $\overline{PB} = 1$. O perímetro do triângulo APM é :
a) $5 + \sqrt{7}$
b) $5 + \sqrt{10}$
c) $5 + \sqrt{19}$
d) $5 + \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$
e) $5 + \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$



31. (FESP-91) Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos equiláteros de lados 2ª e a, respectivamente. Podemos afirmar, então que o segmento $\overline{CD}$ mede:
a) $a\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{6}$
c) $2a$
d) $2a\sqrt{5}$
e) $a\sqrt{3}$



32. (PUC-SP-81) Qual é a medida do lado de um polígono regular de 12 lados, inscrito num círculo de raio unitário?
a) $2 + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

33. (F.M.E.) Os lados de um triângulo medem 15m, 20m, e 25m. Determine a altura relativa ao maior lado.

34. (F.M.E.) Os lados de um triângulo medem 12m, 20m e 28m. Determine a projeção do menor sobre a reta do lado de 20m.

35. (F.M.E.) Determine o lado $\overline{BC}$ de um triângulo acutângulo ABC, em que $AC = 7\ cm$, $AB = 5\ cm$ e a projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$ mede $1cm$.

36. (F.M.E.) Determine o valor de x, sabendo que $x + 5, 3 - x$ e $x + 7$ são as medidas dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC cujo ângulo $\hat{B}$ vale 120°.

37. (ALENCAR FILHO) Os lados de um triângulo são: $AB = 17\ m$, $AC = 13\ m$, $BC = 24\ m$. Os pontos M e N dividem o lado BC em três partes iguais. Calcular AM e AN.

38. (ALENCAR FILHO) A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC mede 6m e determina no lado BC segmentos de 3m e 4m. Calcular os lados AB e AC do triângulo.

39. (ALENCAR FILHO) Calcular as duas menores medianas do triângulo cujos lados medem 8m, 9m e 11m.

40. (ALENCAR FILHO) Os lados de um triângulo são: $AB = 12m$, $AC = 15m$, $BC = 18m$. Calcular a bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{A}$.

41. (ALENCAR FILHO) Achar os lados de um triângulo, com 18cm de perímetro, sabendo que as suas alturas são proporcionais aos números 3,4 e 6.

42. (ALENCAR FILHO) Os lados de um triângulo são: $AB = 6\ m$, $AC = 8\ m$, $BC = 10\ m$. Sobre o lado BC toma-se um ponto D, tal que a ceviana $AD = 5m$. Calcular BD.

43. (ALENCAR FILHO) Os lados de um triângulo são: $AB = 6\ cm$, $AC = 7\ cm$, $BC = 5\ cm$. Calcular a distância do ponto de concurso das medianas (baricentro) ao lado AC.

44. (ALENCAR FILHO) ABC é um triângulo no qual as medianas relativas aos lados AB e AC são perpendiculares. Demonstrar que vale a relação: $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Nível Aprofundamento

45. (ITA-81) Os lados de um triângulo medem a, b e c centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede a centímetros, se forem satisfeitas as relações $3a = 7c$ e $3b = 8c$.

a) 30° b) 60° c) 45° d) 120° e) 135°

46. (ITA-84) Num triângulo isósceles, a razão entre a altura referente a e base e esta é $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo α, oposto à base, podemos afirmar que:

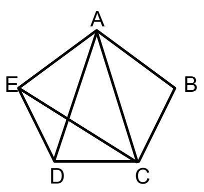
a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ b) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ d) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

e) Não temos dados suficientes para determiná-lo.

47. (ITA-88) Num triângulo ABC, $\overline{BC} = 4\ cm$, o ângulo $\hat{C}$ mede 30º e a projeção do lado AB sobre BC mede $2,5\ cm$. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

a) $1cm$ b) $\sqrt{2}$ cm c) $0,9\ cm$ d) $\sqrt{3}\ cm$ e) $2\ cm$

48. (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:



a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $x^2 - x - 1 = 0$

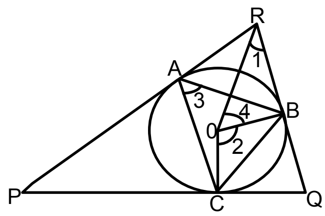
49. (ITA-98) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

50.(ITA-91) Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente. Sabendo que $a = 2\sqrt{3}$ e (A, B, C) é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:

a) $C = 4\sqrt{3}$ e A = 30º b) $C = 3\sqrt{3}$ e A = 30º c) B = 6 e C = 85º
d) B= 3 e C = 90º e) n.d.a.

51. (ITA-92) Considere o triângulo PQR ao lado, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:



a) 40°, 120°, 60° e 50° b) 40°, 100°, 50° e 40° c) 60°, 140°, 60° e 40°
d) 60°, 120°, 40° e 50° e) n.d.a.

52. (ITA-00) Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de $6\ cm$ e altura de $4\ cm$. Seja *t* a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de *t* compreendido entre os lados do triângulo mede :

a) 1cm b) 1,5cm c) 2cm d) 2,5cm e) 3cm

53. (ITA-85) Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura deste triângulo medem 8cm, então o raio desta circunferência mede:

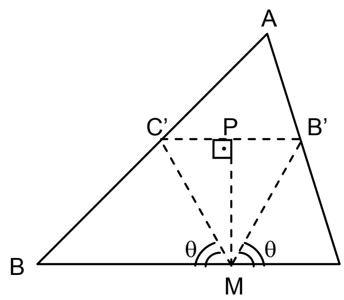
a) $3\ cm$ b) $4\ cm$ c) $5\ cm$ d) $6\ cm$ e) $3\sqrt{2}\ cm$

54. (IME-86-Adaptado) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.

55. (IME-88) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo ABC, constróem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes.

56. (IME-96) Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ conforme a figura abaixo. Demonstre que

$$\cot g\theta = \frac{1}{2}\left(\cot g(B) + \cot g(C)\right)$$



57. (IME-00) As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $\text{tg}\, B\hat{G}C = \dfrac{12\,S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$, $\overline{AC} = b$; $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$.

58. (IME-81) Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC, e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação $\dfrac{EF}{BC}$ em função de $\text{sen}\dfrac{b}{2}$ e $\text{sen}\dfrac{c}{2}$.

59. (IME-80) Sejam ℓ_4, ℓ_6 e ℓ_{10} os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados, constrói-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que $BC = \ell_4$, $AC = \ell_6$ e $AB = \ell_{10}$. Pede-se calcular o ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC.

60. (IME-84) Determine os ângulos de um triângulo, dados o perímetro $2p$, o lado a e a altura correspondente ao lado a, h_a.

61. (SHARIGUIN) Demonstre que o diâmetro da circunferência que circunscreve um triângulo é igual a razão entre seu lado e o seno do ângulo oposto.

62. (SHARIGUIN) Demonstre que se a e b são dois lados de um triângulo, α é o ângulo entre eles e L a bissetriz deste ângulo, então:

$$L = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

63. (SHARIGUIN) Seja AM a bissetriz do triângulo ABC. Demonstrar que $|BM|:|CM| = |AB|:|AC|$. O mesmo é certo para a bissetriz do ângulo exterior do triângulo (neste caso M está na prolongação do lado BC).

64. (SHARIGUIN) Os lados de um triângulo são a, b e c. Demonstre que a mediana m_a traçada para o lado a se calcula pela fórmula $m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

65. (SHARIGUIN) Demonstrar que as distâncias desde o vértice A do triângulo ABC para os pontos de tangencia dos lados AB e AC com a circunferência inscrita são iguais a $p-a$, onde p é o semiperímetro do triângulo A ABC, $a = |BC|$.

66. (SHARIGUIN) Demonstrar que a soma das distâncias de qualquer ponto da base do triângulo isósceles até os seus lados é igual a altura deste triângulo traçada até o lado deste.

67. (SHARIGUIN) Demonstrar que a soma das distâncias de qualquer ponto interior de um triângulo regular até seus lados é igual à altura deste triângulo.

68. (SHARIGUIN) Sobre a base AC do triângulo isósceles ABC se toma um ponto M de maneira que $|AM| = a$, $|MC| = b$. Nos triângulos ABM e CBM há circunferências inscritas. Calcular a distância entre os pontos de tangencia do lado BM com estas circunferências.

69. (SHARIGUIN) Do vértice A do triângulo ABC sai uma reta que divide pela metade a Mediana BD (o ponto D se encontra sobre o lado AC). Em que razão esta reta divide o lado BC ?

70. (SHARIGUIN) Seja H o ponto de interseção das alturas do ΔABC. Calcular os ângulos do ΔABC, se $B\hat{A}H = \alpha$ e $A\hat{B}H = \beta$.

71. (SHARIGUIN) No triângulo isósceles ABC $\hat{A} = \alpha > 90°$ e $|BC| = a$. Calcule a distância entre o ponto de interseção das alturas e o centro da circunferência circunscrita.

72. (SHARIGUIN) É dado o triângulo eqüilátero ABC. O ponto K divide seu lado AC na razão de $2:1$ e o ponto M divide o lado AB na razão $1:2$ (contando em ambos os casos desde o vértice A). Calcule KM.

73. (SHARIGUIN) O lado AB do triângulo ABC é igual 3 e a altura CD que passa sobre o lado AB é igual a $\sqrt{3}$. A base D da altura CD se encontra sobre o lado AB, o segmento AD é igual ao lado BC. Calcule $|AC|$.

74. (SHARIGUIN) Sobre o triângulo ABC é traçada a mediana BK, a bissetriz BE e a altura AD. Calcule o comprimento do lado AC, sabendo-se que as retas BK e BE dividem o segmento AD em três partes iguais e $|AB| = 4$.

75. (SHARIGUIN) A relação entre o raio da circunferência inscrita em um triângulo isósceles e o raio da circunferência circunscrita sobre este mesmo triângulo é igual a k. Calcule o ângulo da base do triângulo.

76. (SHARIGUIN) No triângulo ABC $|AB| = c, |BC| = a, \hat{B} = \beta$. Sobre o lado AB se toma o ponto M de maneira que $2|AM| = 3|MB|$. Calcule a distância desde M até o ponto médio do lado AC.

77. (SHARIGUIN) No lado BC do triângulo ABC se toma o ponto M de maneira que a distância do vértice B até o centro de massa do triângulo AMC é igual a distância do vértice C até o centro de massa do triângulo AMB. Demonstre que $|BM| = |DC|$, onde D é a base da altura que passa sobre BC desde o vértice A.

78. (SHARIGUIN) Seja dado um triângulo ABC. Sabe-se que $|AB| = 4, |AC| = 2, |BC| = 3$. A bissetriz do ângulo A corta o lado BC no ponto K. A reta que passa pelo ponto B paralelamente a AC corta a prolongação da bissetriz AK no ponto M. Calcule $|KM|$.

79. (SHARIGUIN) Pelo ponto M no interior do triângulo ABC passam três retas paralelas aos lados do triângulo. Os segmentos de retas compreendidos no interior do triângulo são iguais entre si. Calcule os comprimentos destes segmentos se os lados do triângulo são a, b e c.

80. (SHARIGUIN) A mediana do triângulo ABC é AD, $D\hat{A}C + A\hat{B}C = 90°$. Calcule $B\hat{A}C$, sabendo-se que $|AB| \neq |AC|$.

81. (SHARIGUIN) O lado do triângulo eqüilátero ABC é igual a a. Sobre o lado BC está o ponto D e sobre o AB se encontra o ponto E de maneira que $|BD| = \frac{a}{3}$, $|AE| = |DE|$. Calcule $|CE|$.

82. (SHARIGUIN) Uma circunferência de raio 1 está inscrita no triângulo ABC, no qual $\cos B = 0{,}8$. Esta circunferência entra em contato com a base média do triângulo ABC, paralela ao lado AC. Calcule o comprimento do lado AC.

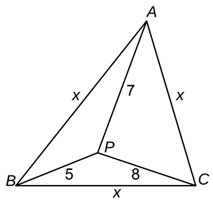
83. (SHARIGUIN) As alturas h_a e h_b do triângulo ABC estão traçadas desde o vértice A e B; L é a medida da bissetriz do ângulo $\hat{C}$. Calcule $\hat{C}$.

84. (SHARIGUIN) Seja dado o triângulo ABC. As perpendiculares levantadas sobre AB e BC em seus pontos médios, cortam a reta AC nos pontos M e N de maneira que $|MN| = |AC|$. As perpendiculares traçadas a AB e AC em seus pontos médios cortam BC nos pontos K e L de maneira que $|KL| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$. Calcule o ângulo mínimo do triângulo ABC.

85. (SHARIGUIN) No lado AB do triângulo ABC se toma um ponto M de tal maneira que a reta que une o centro da circunferência circunscrita ao redor de ABC com o ponto de interseção das medianas do triângulo BCM, é perpendicular a CM. Calcule a relação $|BM|:|BA|$, se $|BC|:|BA| = k$.

86. (SHARIGUIN) No triângulo ABC $|AB| = 12, |BC| = 13, |CA| = 15$. Sobre o lado AC se toma o ponto M de maneira que os raios das circunferências inscritas nos triângulos ABM e BCM são iguais. Calcule a relação $|AM| : |MC|$.

87. (F.M.E.) Um ponto interno de um triângulo eqüilátero dista 5cm, 7cm e 8cm dos vértices do triângulo. Determine o lado desse triângulo.
Sugestão: Desloque o triangulo APC de modo que AC coincida com BC. O que acontece com o triangulo CPP' nesse caso? Onde P' é a nova localização de P após o deslocamento.



88. (ALENCAR FILHO) M é um ponto qualquer da base BC de um triângulo isósceles ABC. Demonstrar que é: $\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = MB \cdot MC$.

89. (ALENCAR FILHO) Os pontos M e N dividem em três partes iguais o lado BC de um triângulo ABC. Demonstrar a relação:

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 4\overline{MN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

90. (ALENCAR FILHO) Calcular o lado de um triângulo eqüilátero cujos vértices estão situados respectivamente sobre três retas paralelas, sabendo que são a e b as distâncias da paralela intermediária às outras duas.

91. (ALENCAR FILHO) Conhecendo as medidas a, b e c dos lados de um triângulo ABC, calcular os lados do triângulo cujos vértices são os pés das alturas desse triângulo ABC.

92. (ALENCAR FILHO) As medianas de um triângulo ABC são m_A, m_B e m_C. Demonstrar a relação $m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \dfrac{9}{16}\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$.

93. (ALENCAR FILHO) Em um triângulo ABC traça-se a altura AH, a mediana AM e a bissetriz interna AD. Demonstrar a relação:

$$(AB - AC)^2 = 4 \cdot MD \cdot MH$$

94. (ALENCAR FILHO) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se externamente triângulo eqüiláteros, cujos centros são X e Y. Demonstrar $\left(\overline{XY}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \left(a^2 + bc\sqrt{3}\right)$.

95. (ALENCAR FILHO) M é um ponto qualquer do plano de um triângulo ABC e G é o ponto de concurso das medianas desse triângulo (baricentro). Demonstrar a relação:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$$

96. (ALENCAR FILHO) O raio do círculo circunscrito a um triângulo ABC é R, o circuncentro é O e o baricentro é G. Demonstrar que a distância do circuncentro ao baricentro é dada pela fórmula:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

97. (ALENCAR FILHO) Num triângulo ABC, um dos ângulos que a mediana $AM = m_a$ forma com o lado BC é igual ao ângulo que esta mesma mediana forma com a bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Demonstrar:

(i) $a^2 = 4 \cdot b \cdot c$; (ii) $m_a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (c - b)$

98. (ALENCAR FILHO) $AD = h$ e $AE = k$ são as bissetrizes interna e externa relativas ao ângulo de vértice A de um triângulo ABC. Demonstrar a relação $h^2(b + c)^2 + k^2(b - c)^2 = 4b^2c^2$.

Nível Transcendência

99. (LITVINENKO) Demonstre que se em um triângulo se verificam as relações $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$, este é isósceles.

100. (LITVINENKO) A base de um triângulo isósceles é igual a $4\sqrt{2}\ cm$, a mediana traçada em relação ao lado lateral é igual a $5\ cm$. Calcule a medida do outro lado.

101. (LITVINENKO) Um dos lados iguais de um triângulo isósceles é igual a 4cm, a mediana traçada em relação à um lado igual mede $3\ cm$. Calcule a base do triângulo.

102. (LITVINENKO) A soma de duas alturas diferentes de um triângulo isósceles é igual a ℓ, o ângulo no vértice, α. Calcule a medida dsos lados iguais.

103. (LITVINENKO) O ângulo junto à base de um triângulo isósceles é igual a α. Calcule a razão entre a base e a mediana traçada em relação a um lado igual.

104. (LITVINENKO) Calcule os ângulos de um triângulo isósceles sabendo que o ortocentro divide pela metade a altura traçada em relação à base da figura.

105. (LITVINENKO) Em um triângulo isósceles o ângulo em um dos vértices é igual a 36° e a base a a. Calcule os lados iguais do triângulo.

106. (LITVINENKO) Em um triângulo isósceles ABC $(AB = BC)$, no lado BC é tomado um ponto D de forma que $BD : DC = 1 : 4$. Calcule $BM : ME$, donde BE é a altura do triângulo e M, o ponto de interseção de BE e AD.

107. (LITVINENKO) A base de um triângulo isósceles é igual a a, o ângulo em relação ao vértice, a 2α. Calcule a largura da bissetriz traçada em relação a um dos lados iguais.

108. (LITVINENKO) O ângulo da base de um triângulo isósceles é igual a $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$. Calcule o ângulo entre a mediana e a bissetriz traçadas em relação ao lado lateral.

109. (LITVINENKO) Calcule o ângulo do vértice de um triângulo isósceles se a mediana, traçada no lado lateral, forma com a base um ângulo $\operatorname{arcsen}\dfrac{3}{5}$.

110. (LITVINENKO) Em um triângulo isósceles ABC o ângulo B é igual a 110°. No interior do triângulo é tomado um ponto M de modo que $M\hat{A}C = 30^\circ$, $M\hat{C}A = 25^\circ$. Calcule o ângulo $B\hat{M}C$.

111. (LITVINENKO) A bissetriz do ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos de largura $2\ cm$ e $4\ cm$ e a altura, traçada a esse mesmo lado, é igual a $\sqrt{15}\ cm$. Calcule os lados do triângulo e determine o seu tipo.

112. (LITVINENKO) Calcule a razão entre a soma dos quadrados das medianas de um triângulo e a soma dos quadrados de seus lados.

113. (LITVINENKO) Dois lados de um triângulo são iguais a a e b e as medianas, traçadas a estes lados, são perpendiculares entre si. Calcule o terceiro lado do triângulo.

114. (LITVINENKO) Em um triângulo ABC é conhecido que $BC = 12\ cm, AC = 8\ cm$ e o ângulo $\hat{A}$ é duas vezes maior que o ângulo $\hat{B}$. Calcule AB.

115. (LITVINENKO) Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo agudo entre as alturas AD e CE é igual a α. Calcule AC se $AD = a$ e $CE = b$.

116. (LITVINENKO) A base de um triângulo é igual 4. A mediana, traçada em relação a base, é igual a $\sqrt{6} - \sqrt{2}y$ e um dos ângulos da base, a 15°. Calcule o ângulo agudo entre a mediana e a base.

117. (LITVINENKO) fazendo uso do teorema de Ceva demonstre que:
a) As medianas de um triângulo se cortam em um mesmo ponto;
b) As bissetrizes de um triângulo se interceptam em um mesmo ponto;
c) As alturas de um triângulo se cortam em um mesmo ponto;

118. (LITVINENKO) AD é a altura do triângulo ABC, o ponto H é o ortocentro. Demonstre que $DC \cdot DB = AD \cdot DH$.

119. (LITVINENKO) Em um triângulo ABC o ângulo $\hat{A}$ é igual a 30° e o $\hat{B}$, a 50°. Demonstre que os lados do triângulo estão ligados com a relação $c^2 = b \cdot (a + b)$.

120. (LITVINENKO) Nos triângulos ABC e $A'B'C'$ os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são iguais, tanto que a soma dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ constituem 180°. Demonstre que os lados destes dois triângulos estão ligados com a relação $a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'$.

121. (LITVINENKO) Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ estão relacionados como $4:2:1$. Demonstre que os lados do triângulo estão ligados com a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

122. (LITVINENKO) CD é a altura do triângulo ABC. Calcule a dependência entre os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ se sabemos que $CD^2 = AD \cdot DB$.

123. (LITVINENKO) Em um triângulo ABC o ângulo $\hat{A}$ é igual a α e $\hat{B}$, a β, a mediana BD cruza a bissetriz CE no ponto K. Calcule $CK : KE$.

124. (LITVINENKO) Em um triângulo regular ABC, nos lados AB e AC, serão tomados os pontos M e K de maneira que $AM : MB = 2$ e $AK : KC = \frac{1}{2}$. Demonstre que os segmentos KM é igual ao raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

125. (LITVINENKO) A base de um triângulo isósceles é $2a$ e a altura, h. Na circunferência inscrita no triângulo será traçada uma tangente paralela à base. Calcule a medida do segmento desta tangente que passa entre os lados iguais do triângulo.

126. (LITVINENKO) Calcule o raio de uma circunferência circunscrita ao triângulo com lados a e b e o ângulo λ entre eles.

127. (LITVINENKO) Em um triângulo acutângulo com lados a, b e c, desde o centro da circunferência circunscrita, se baixam perpendiculares aos lados. Os comprimentos das perpendiculares são iguais a m, n e p, respectivamente. Demonstre que $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = \frac{mnp}{abc}$.

128. (LITVINENKO) Demonstre que se a e b são lados de um triângulo, L, a bissetriz do ângulo entre eles, a' e b', segmentos em que a bissetriz divide o terceiro lado, $L^2 = ab - a'b'$.

129. (LITVINENKO) Encontre o ângulo da base de um triângulo isósceles se sabemos que seu ortocentro está na circunferência inscrita.

130. (PRASOLOV) De um ponto M dentro de um triângulo eqüilátero ABC retas perpendiculares MP, MQ e MR são tracejadas para os lados AB, BC e CA, respectivamente. Prove que:

(i) $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$

(ii) $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$

131. (PRASOLOV) Os pontos D e E de um triângulo equilátero ABC na razão $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Retas BD e CE se reúnem no ponto O. Prove que $A\hat{O}C = 90^\circ$.

132. (PRASOLOV) Prove que se o ponto interseção das alturas de um triângulo acutângulo divide as alturas na mesma razão, este triângulo é equilátero.

133. (PRASOLOV) No triângulo ABC com ângulo $\hat{A}$ igual a 120° bissetrizes $AA_1 BB_1$, e CC_1 são traçadas. Prove que o triângulo $A_1B_1C_1$ é retângulo.

134. (PRASOLOV) Em um triângulo ABC o ângulo $\hat{A}$ mede 120°. Prove que dos segmentos de comprimentos a, b e $b + c$ um triângulo pode ser formado.

135. (PRASOLOV) Em um triângulo ABC, bissetrizes BB_1 e CC_1 são traçadas. Prove que se $C\hat{C_1}B_1 = 30^\circ$, então ou $\hat{A} = 60^\circ$ ou $\hat{B} = 120^\circ$.

136. (PRASOLOV) Os comprimentos dos lados de um triângulo são inteiros consecutivos. Encontre esses inteiros sabendo que uma das medianas é perpendicular a uma das bissetrizes.

137. (PRASOLOV) Em um triângulo ABC, no qual os comprimentos dos lados são números racionais, a altura BB_1 é traçada. Prove que os comprimentos dos segmentos AB_1 e CB_1 são números racionais.

138. (PRASOLOV) Dentro do triângulo ABC um ponto arbitrário O é tomado. Os pontos A_1, B_1 e C_1 são simétricos a O através dos pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que o $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ e, além disso, os segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 se cruzam em um ponto.

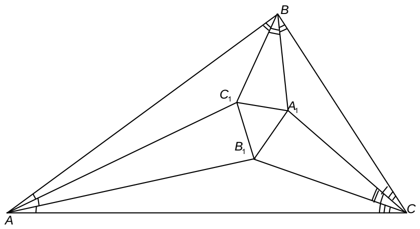
139. (PRASOLOV) Prove que as alturas de um triângulo se reúnem no mesmo ponto.

140. (PRASOLOV) Se $\text{sen}18^\circ = x$. Prove que $4x^2 + 2x = 1$.

141. (PRASOLOV) Prove que as projeções do vértice A do triângulo ABC sobre as bissetrizes dos ângulos externos e internos nos vértices B e C estão na mesma reta.

142. (PRASOLOV) Nos lados AB e BC de um triângulo acutângulo ABC, quadrados ABC_1D_1 e A_2BCD_2 são construídos exteriormente. Prove que os pontos de interseção das retas AD_2 e CD_1 estão sobre a altura BH.

143. (PRASOLOV) Um triângulo ABC e suas trissetrizes (retas que dividem os ângulos em três partes iguais) são desenhados. As trissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ mais próximas do lado BC se interceptam no ponto A_1; pontos B_1 e C_1 são definidos similarmente, (figura abaixo). Prove que o triângulo $A_1B_1C_1$ é eqüilátero.



144. (SHARIGUIN) Interpretar geometricamente a equação 1 e os sistemas 2, 3 e 4. Solucionar a equação 1 e os sistemas 2 e 3. No sistema 4 calcule $x+y+z$:

1) $\sqrt{x^2+a^2-ax\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+b^2-by\sqrt{3}}+$
$+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}\ (a>0,b>0).$

2) $\begin{cases} x=\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}, \\ y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}, \\ z=\sqrt{y^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2}. \end{cases}$

3) $x^2+y^2=(a-x)^2+b^2=a^2+(b-y)^2.$

4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ y^2+yz+z^2=b^2, \\ z^2+zx+x^2=a^2+b^2. \end{cases}$

Gabarito Embasamento

01. A **02.** B **03.** E **04.** D **05.** C **06.** B **07.** B **08.** E **09.** D **10.** A
11. D **12.** B **13.** E **14.** E **15.** E **16.** A **17.** C **18.** C **19.** B **20.** B
21. 3cm **22.** $AB'=2{,}6cm; B'C'=3{,}9cm$ e $C'D'=6{,}5cm$ **23.** b)20,5m
24. $2\left(5\sqrt{2}-1\right)cm$ **25.** 3cm **26.** $r=5$ **27.** 9cm
28. a) $AB=24$ e $EC=3$ b) AD = 15 e FD = 9 **29.** Demonstração
30. A **31.** E **32.** B **33.** 12m **34.** 6m
35. 8cm **36.** zero **37.**9m;11m**38.**6m;8m **39.**6,5m;8,5m **40.**10m
41.4cm;6cm;8cm **42.** $BD=2{,}2m$ ou 5m **43.**1,4cm **44.**Demonstração

Gabarito Aprofundamento

45. B **46.** A **47.** A **48.** E **49.** C **50.** A **51.** A **52.** B **53.** C
54. Demonstração **55.**Demonstração**56.**Demonstração**57.**Demonstração

58. $\frac{EF}{BC}=2\cdot sen\frac{B}{2}\cdot sen\frac{C}{2}$ **59.** $\angle A=120°$

60. $\text{sen}(B,C)=\frac{2h_a}{(2p-a)\mp a\sqrt{1-\frac{h_a^2}{p(p-a)}}}$; $\text{sen}A=\frac{4ah_ap(p-a)}{a^2h_a^2+4p^2(p-a)^2}$

61. Demonstração **62.**Demonstração**63.**Demonstração **64.**Demonstração
65. Demonstração **66.**Demonstração **67.**Demonstração

68. $\frac{|a-b|}{2}$ **69.** 2 **70.** Demonstração **71.** $\frac{a}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}-ctg\alpha\right).$

72. Demonstração **73.** $\sqrt{7}.$ **74.** $\sqrt{13}.$ **75.** $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}.$

76. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}.$ **77.** Demonstração. **78.** $2\sqrt{6}.$

79. $\frac{2abc}{ab+bc+ca}.$ **80.** $B\hat{A}C=90°.$ **81.** $\frac{13}{15}a.$ **82.** 3

83. $arcsen\frac{h_ah_b}{L(h_a+h_b)}$ **84.** $\frac{\pi}{4}.$ **85.** $\frac{3\pm\sqrt{9-8k^2}}{4}$ **86.** $k=\frac{22}{23}$

87. $x=\sqrt{129}cm$ **88.** Demonstração **89.** Demonstração

90. $2\sqrt{\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)}{3}}$

91. $\frac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc},\frac{b\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2ac},\frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ab}$

92. Demonstração
93. Demonstração **94.** Demonstração **95.** Demonstração
96. Demonstração **97.** Demonstração **98.** Demonstração

Gabarito Transcendência

99. Demonstração **100.** 6cm **101.** $\sqrt{10}cm$

102. $\frac{\ell}{2sen\left(45°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45°-\frac{3\alpha}{4}\right)}.$ **103.** $\frac{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$

104. $\arccos\frac{1}{3},\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **105.** $\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}+1\right).$ **106.** 1:2

107. $\frac{a\cos\alpha}{sen\left(45°+\frac{3\alpha}{2}\right)}.$ **108.** $arctg\frac{1}{13}$ **109.** $arcsen\frac{72}{97}$ **110.** $85°.$

111. 4,6 e 8cm ou $2\sqrt{6},4\sqrt{6}$ e 6cm; obtusângulo **112.** 0,75

113. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$ **114.** 10cm **115.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{sen\alpha}.$ **116.** $45°$

117. Demonstração **118.** Demonstração **119.** Demonstração
120. Demonstração **121.** Demonstração

122. $A+B=90°\,ou\,|A-B|=90°.$ **123.** $\frac{2sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sen\alpha}.$

124. Demonstração **125.** $\frac{2a\left(\sqrt{a^2+h^2}-a\right)^2}{h^2}$ **126.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\lambda}}{2sen\lambda}$

127. Demonstração **128.** Demonstração **129.** $\arccos\frac{2}{3}.$

130. Demonstração **131.** Demonstração **132.** Demonstração
133. Demonstração **134.** Demonstração **135.** Demonstração
136. $AB=2, BC=3$ e $AC=4.$ **137.** Demonstração
138. Demonstração **139.** Demonstração **140.** Demonstração
141. Demonstração **142.** Demonstração **143.** Demonstração

144.

1)
$x=\frac{2ab}{a+b\sqrt{3}},\ y=\frac{2ab}{a\sqrt{3}+b}$

2)
$x=\frac{1}{2as},\ y=\frac{1}{2bs},\ z=\frac{1}{2cs}$, onde

$s=\sqrt{p\left(p-\frac{1}{a}\right)\left(p-\frac{1}{b}\right)\left(p-\frac{1}{c}\right)}$

e $2p=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$

3)
$\begin{cases} x=-a\pm b\sqrt{3} \\ y=-b\pm a\sqrt{3} \end{cases}$

4)
$\pm\sqrt{a^2+b^2\pm ab\sqrt{3}}.$