COMPLEXOS – LISTA DESAFIO

01. (ELITE) Sendo n um múltiplo de 4, demonstre que

$$1+2.i+3.i^2+4.i^3+...+(n+1).i^n=\frac{n+2-n.i}{2}$$

02. (ELITE) Utilizando propriedades dos números complexos, prove que:

a) $1+a.\cos\theta+a^2.\cos 2\theta+...=\dfrac{1-a.\cos\theta}{1-2a.\cos\theta+a^2}$

b) $a.\sin\theta+a^2.\sin 2\theta+...=\dfrac{a.\sin\theta}{1-2a.\cos\theta+a^2}$

c) $\dfrac{\sin\theta}{2}+\dfrac{\sin 2\theta}{4}+\dfrac{\sin 3\theta}{8}+...=\dfrac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}$

03. (ELITE) Seja ω uma raiz primitiva da n-ésima da unidade ($\omega\neq 1$). Prove que $1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1}=0$.

04. (ELITE) Seja ω uma raiz primitiva de grau 2n da unidade ($\omega\neq 1$).

a) Prove que $\omega^n=-1$.

b) Prove que $1+\omega^2+...+\omega^{n-1}=\dfrac{2}{1-\omega}$

05. (ELITE) Prove que $1+2\omega+3\omega^2+...+n\omega^{n-1}=\dfrac{n}{w-1}$, onde ω é uma n-ésima raiz da unidade ($\omega\neq 1$).

06. (LEDERMANN) Os pontos A e B estão representados pelos números complexos $a=1-3i$ e $b=-3+4i$, respectivamente. Encontre um ponto X no eixo real positivo tal que AXB é um triângulo retângulo com o ângulo reto em X.

07. (LEDERMANN) Prove que os pontos z_1, z_2, z_3 são colineares, se e somente se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, não todos nulos, tal que $\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0$ e $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

08. (LEDERMANN) Mostre que as equações $\varepsilon z\bar{z}+a\bar{z}+a\bar{z}+\gamma=0$, onde ε e γ são reais e a é complexo, representam um círculo se $\varepsilon\neq 0$ e $|a|^2>\varepsilon\cdot\gamma$, e que representam uma reta se $\varepsilon=0$ e $a\neq 0$.

09. (LEDERMANN) Prove que o quadrilátero z_1, z_2, z_3, z_4 pode ser inscrito em uma circunferência se e somente se a razão cruzada $\{z_1,z_3;z_2,z_4\}=\dfrac{(z_1-z_2)\cdot(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)\cdot(z_3-z_2)}$ é real.

10. (LEDERMANN) Mostre que se $\lambda\neq 0$, a equação $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=\lambda$ representa um círculo que contém a ou b em seu interior sendo $\lambda<1$ ou $\lambda>1$.

11. (LEDERMANN) Mostre que os números complexos o,u,v correspondem aos vértices de um triângulo equilátero se e somente se $u^2+v^2=uv$.

12. (LEDERMANN) Deduza do exercício 11 que os números complexos z_1, z_2, z_3 correspondem aos vértices de um triângulo equilátero se e somente se $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1+z_1\cdot z_2$.

13. (LEDERMANN) Expresse z^5+1 em fatores lineares e quadráticos com coeficientes reais. Deduza que $4\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{10}\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}=1$.

14. (LEDERMANN) Mostre que as raízes de $(z-1)^6+(z+1)^6=0$ são $\pm i\cot\dfrac{\pi}{12}$, $\pm i\cot\dfrac{5\pi}{12}$, $\pm i$.

15. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos tal que $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ e $z_1+z_2+z_3\neq 0$.

Prove que $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$

16. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2 números complexos com $|z_1|=|z_2|=1$. Prove que $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1\cdot z_2+1|\geq 2$.

17. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos tais que

1) $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$;

2) $z_1+z_2+z_3\neq 0$;

3) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

Prove que para todos os inteiros $n\geq 2$, $|z_1^n+z_2^n+z_3^n|\in\{0,1,2,3\}$.

18. (TITU ANDREESCU) Seja z um número complexo tais que $z\in \ \setminus \ $ e $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in$. Prove que $|z|=1$.

19. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos tais que $z_1+z_2+z_3\neq 0$ e $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Prove que :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right).\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1+z_2+z_3}\right)\geq 0.$$

20. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos tais que $z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$. Prove que $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

21. (TITU ANDREESCU) Prove que para todos os números complexos z com $|z|=1$ a seguinte desigualdade $\sqrt{2}\leq|1-z|+|1+z^2|\leq 4$ é válida.

22. (TITU ANDREESCU) Sejam x e y números complexos distintos tal que $|x|=|y|$. Prove que $\dfrac{1}{2}\cdot|x+y|<|x|$.

23. (TITU ANDREESCU) Seja $z_1,z_2\in{}^*$ tal que $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$.

Calcule $\dfrac{z_1}{z_2}$.

24. (TITU ANDREESCU) Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos. Prove que $z_1+z_2+z_3=0$ se e somente se $|z_1|=|z_2+z_3|$, $|z_2|=|z_3+z_1|$ e $|z_3|=|z_1+z_2|$.

25. (TITU ANDREESCU) Encontre as imagens geométricas dos números complexos z, onde $z^n.\operatorname{Re}(z)=\bar{z}^n.\operatorname{Im}(z)$, n é um inteiro.

26. (TITU ANDREESCU) Sejam a, b números reais com $a+b=1$ e sejam z_1, z_2 números complexos com $|z_1|=|z_2|=1$. Prove que $|az_1+bz_2|\geq\dfrac{|z_1+z_2|}{2}$.

27. (TITU ANDREESCU) Sejam k, n inteiros positivos e sejam $z_1z_2,...,z_n$ números complexos não nulos com os mesmos módulos tal que $z_1^k+z_2^k+...+z_n^k=0$. Prove que $\dfrac{1}{z_1^k}+\dfrac{1}{z_2^k}+...+\dfrac{1}{z_n^k}=0$.

28. (TITU ANDREESCU) Calcule a soma $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n-1}(-1)^k\binom{6n}{2k+1}3^k$.

29. (TITU ANDREESCU) Calcule a soma $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\alpha$, onde $\alpha\in[0,\pi]$.

30. (TITU ANDREESCU) Prove a identidade:

$$\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...\right)^2+\left(\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}...\right)^2=2^n.$$

31. (TITU ANDREESCU) Considere os inteiros a_n, b_n, c_n, onde :

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots,$$
$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots,$$
$$c_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots.$$

Mostre que:

1) $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$.

2) $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 1$.

3) Dois dos inteiros a_n, b_n, c_n são iguais e o terceiro difere-se por 1.

32. (TITU ANDREESCU) Calcule a soma $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cos kt$ onde $t \in [0, \pi]$.

33. (TITU ANDREESCU) Prove que as seguintes identidades:

1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{5} + \binom{n}{10} + \dots = \frac{1}{5}\cdot\left(2^n + \frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^{n-1}}\cos\frac{n\pi}{5} + 2^n + \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^{n-1}}\cos\frac{2n\pi}{5}\right)$

34. (TITU ANDREESCU) Considere os inteiros A_n, B_n, C_n definidos por:

$$A_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{3} + \binom{n}{6} - \dots,$$
$$B_n = -\binom{n}{1} + \binom{n}{4} - \binom{n}{7} + \dots,$$
$$C_n = \binom{n}{2} - \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots.$$

Prove que as seguintes identidades são válidas:

1) $A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 - A_nB_n - B_nC_n - C_nA_n = 3^n$;

2) $A_n^2 + A_nB_n + B_n^2 = 3^{n-1}$.

35. (TITU ANDREESCU) Sejam x, y, z números reais tais que:
$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y + \operatorname{sen}z = 0$ e $\cos x + \cos y + \cos z = 0$.
Prove que $\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}2y + \operatorname{sen}2z = 0$ e $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

36. (TITU ANDREESCU) Prove que $\cos^2 10° + \cos^2 50° + \cos^2 70° = \frac{3}{2}$.

37. (TITU ANDREESCU) Calcule as somas $S = \sum_{k=1}^{n} q^k \cos kx$ e $T = \sum_{k=1}^{n} q^k \operatorname{sen}kx$.

38. (USAMO) Prove que a média dos números $k \cdot \operatorname{sen}(k°)$, $(k = 2, 4, 6, \dots, 180)$ é $\operatorname{cotg}(1°)$.

39. (CRUX MATHEMATICORUM) Encontre o valor a soma das duas séries seguintes de n termos para $\theta = 30°$:

i) $1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos(2\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{\cos(3\theta)}{\cos^3\theta} + \dots + \frac{\cos((n-1)\theta)}{\cos^{n-1}\theta}$, e

ii) $\cos\theta\cos\theta + \cos\theta^2\cos(2\theta) + \cos^3\theta\cos(3\theta) + \dots + \cos^n\theta\cos(n\theta)$.

40. (OLYMPIAD-CALIBER) Prove que :

$$1 + \cos^{2n}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos^{2n}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \cos^{2n}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n + 4^{-n}\left(2 + \binom{2n}{2}\right),$$

para todos os inteiros $n \geq 2$.

41. (TITU ANDREESCU) Sejam a, b, c números reais tais que $\cos a + \cos b + \cos c = \operatorname{sen}a + \operatorname{sen}b + \operatorname{sen}c = 0$. Prove que:

(i) $\cos(a+b+c) = \frac{1}{3}\cdot(\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c)$

(ii) $\operatorname{sen}(a+b+c) = \frac{1}{3}\cdot(\operatorname{sen}3a + \operatorname{sen}3b + \operatorname{sen}3c)$.

42. (TITU ANDREESCU) Prove a igualdade:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

43. (CAIO GUIMARÃES) Mostre que todo complexo de módulo unitário e com parte real diferente de 1 pode ser escrito na forma $\frac{k+1}{k-1}$, sendo k um número real arbitrário.

44. (IME - 1981 ADAPTADA) Mostre que para todo n natural teremos $(2+i)^n \neq (2-i)^n$.

45. (LIDSKI) Considere os complexos z tais que: $\left|z + z^{-1}\right| = 1$.
Determinar o valor máximo de módulo de z.

Gabarito

01. Demonstração. **02.** Demonstração. **03.** Demonstração.

04. Demonstração. **05.** Demonstração. **06.** $x = 3$

07. Demonstração. **08.** Demonstração. **09.** Demonstração.

10. Demonstração. **11.** Demonstração. **12.** Demonstração.

13. $z^5 + 1 = (z+1)\cdot\left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{5}\cdot z + 1\right)\cdot\left(z^2 - 2\cos\frac{3\pi}{5}\cdot z + 1\right)$,tome $z = i$

14. Demonstração. **15.** Demonstração. **16.** Demonstração.

17. Demonstração. **18.** Demonstração. **19.** Demonstração.

20. Demonstração. **21.** Demonstração. **22.** Demonstração.

23. $\frac{z_1}{z_2} = t$ é qualquer solução da equação $t^2 + t + 1 = 0$

24. Demonstração.

25. $\begin{cases} n \text{ impar} \to z = 0 \text{ é a unica solução.} \\ n = 4k \to z = a\cdot(1+i) \mid a \in \\ n = 4k+2 \to z = a\cdot(1-i) \mid a \in \end{cases}$

26. Demonstração.

27. Demonstração.

28. 0.

29. $S_n = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\,sen\frac{n\alpha}{2}\right)$. **30.** Demonstração.

31. Demonstração. **32.** $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{n-2k}\left(\cos\frac{nt}{2} + i\,sen\frac{nt}{2}\right)$

33. Demonstração. **34.** Demonstração. **35.** Demonstração.

36. Demonstração.

37. $1 + S = \frac{q^{n+2}\cos nx - q^{n+1}\cos(n+1)x - q\cos x + 1}{q^2 - 2q\cos x + 1}$;

$T = \frac{q^{n+2}sen\,nx - q^{n+1}sen(n+1)x + q\,sen\,x}{q^2 - 2q\cos x + 1}$. **38.** Demonstração.

39. $i)\ S_i = \frac{2^n\cdot sen\left(30n^{\circ}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}$, $ii)\ S_{ii} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}sen\left(30n^{\circ}\right)}{2^n}$

40. Demonstração. **41.** Demonstração. **42.** Demonstração.

43. Demonstração. **44.** Demonstração. **45.** $|z|_{máx} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$