Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Aprovou!

DICAS PARA O IME 2015

Matemática

A MATEMÁTICA NO IME

Uma só palavra é capaz de definir a prova de Matemática do IME: bela. Essa prova tem exercícios que exigem grande conhecimento e domínio da matéria por parte dos candidatos e, normalmente, apresenta alguns problemas que conseguem desafiar até mesmo as mentes mais bem preparadas, o que a torna um desafio tentador.

A análise dos últimos anos permite concluir que certos temas têm presença constante no vestibular do IME. A prova é bastante variada, mas notamos que temas como **trigonometria**, **logaritmos** (normalmente misturados entre si ou com outros temas), **geometria plana** e **sequências** (progressões aritméticas e geométricas) têm aparecido com uma frequência bastante elevada. Além desses, podemos citar, também, **geometria analítica (cônicas)** e **números complexos,** que são assuntos de extrema importância para se obter um excelente resultado na prova do IME.

Provavelmente você já estudou cada um desses temas e sabe que existem vários livros muito bons sobre cada um desses assuntos. Entretanto, existem alguns detalhes que caem nas provas do IME que exigem determinados cuidados por parte do candidato, detalhes que não aparecem em vários livros. Como exemplo, basta observar que, nos últimos 10 anos, palavras como **demonstre**, **prove** e **mostre** foram citadas 15 vezes, uma média de 1,5 item por ano. Proporcionalmente, é quase tão comum aparecer um item com a palavra “demonstre” quanto um item com uma função trigonométrica, que é o assunto mais cobrado neste vestibular! Nos últimos 3 anos, foram 4 questões de demonstração.

Levando em consideração a análise feita, segue uma seleção de assuntos que podem ser importantes para o ótimo desempenho.

Além da parte de demonstrações, este material também traz formulários de trigonometria, logaritmos e cônicas (assuntos que são abordados em praticamente todas as provas do IME), além da relação de Stewart, que é extremamente prática em alguns problemas de geometria plana.

COMO É QUE EU PROVO ISSO?

Bom, todos nós um dia deparamos com algum exercício do tipo “prove que” ou “demonstre que”. E, provavelmente, a pergunta “como é que eu provo isso?” com certeza já foi feita em alguma dessas situações.

Exercícios de demonstração têm duas partes fundamentais: uma *hipótese* e uma *tese*. A **tese** é o que queremos provar, por isso, enquanto não for provada, jamais pode ser encarada como verdadeira. Já a nossa **hipótese** normalmente é algo que o exercício nos fornece como verdadeiro, e é o ponto de partida que temos para nossa demonstração.

Em resumo:

Hipótese $\rightarrow$ base da nossa demonstração (pode ser encarado como verdadeiro no exercício).

Tese $\rightarrow$ é o que queremos provar.

Assim, se, a partir da sua hipótese, você conseguir, por meio de uma série de processos lógicos, mostrar que sua tese é verdadeira, então você conseguiu *demonstrar* essa tese. Em resumo, o processo de demonstração está baseado na seguinte sequência:

hipótese $\rightarrow$ processos lógicos $\rightarrow$ tese

Obs: nem sempre o exercício fornecerá uma hipótese. Nesses casos podemos utilizar como hipótese qualquer fato reconhecidamente verdadeiro sobre o assunto.

Normalmente, trabalhamos com hipóteses que são, matematicamente falando, razoáveis. No entanto, no processo de demonstração, podemos deparar com teses **totalmente absurdas**. Nem sempre será necessário demonstrar; às vezes, podemos encontrar algo que chamamos **contra-exemplo**, ou seja, podemos, por meio de exemplificação, mostrar que a nossa tese é absurda.

Exemplos:

1. Prove ou dê um contra-exemplo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Hipótese: não foi fornecida

Tese: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Observe que nesse exercício não temos uma hipótese para o início da demonstração. Dessa forma, qual seria então uma hipótese razoável para iniciarmos nossa demonstração? Como sugestão, lembre-se de que sempre é verdade que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Vamos utilizar esse fato como hipótese. A partir dessa hipótese, perceba que, caso nossa tese seja verdadeira, então $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$. Porém, se isso for verdade, temos então que $2ab = 0$. Bem, em momento algum foi dito que isso teria que acontecer! Assim, provavelmente deve existir algum CONTRA-EXEMPLO. Tomando $a = b = 1$, temos que $(a+b)^2 = (1+1)^2 = 4$, enquanto que $a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, ou seja, encontramos um exemplo no qual nossa tese não é verdadeira.

2. Prove que se $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Hipótese: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Tese: $a = 0$ ou $b = 0$

Em nosso exercício, essa hipótese é uma VERDADE ABSOLUTA. Mesmo com uma hipótese aparentemente estranha, as regras matemáticas continuam válidas. Assim, ainda é verdade que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dessa forma, temos então que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow 2ab = 0$$

A partir de processos lógicos, encontramos então que, caso $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, então $2ab = 0$. Bem, a multiplicação de dois números só é nula quando um deles for zero, logo, se $2ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Considerando a cadeia de implicações

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$, temos então que necessariamente $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$, e nossa tese está provada.

REDUÇÃO AO ABSURDO

Um modo extremamente conhecido de demonstração é chamado de **redução ao absurdo**. Esse processo é baseado nas seguintes etapas:

1. analisamos nossa hipótese e nossa tese;
2. supomos que nossa tese é FALSA;
3. a partir de processos lógicos, acabamos por obter algum resultado que é absurdo.

Se isso ocorre, ou seja, se a partir do fato de transformarmos nossa tese em uma coisa supostamente falsa, encontramos um resultado que é absurdo, então nossa tese deve ser verdadeira, e então ela está provada.

Exemplo: prove que existem infinitos números primos.

Tese: existem infinitos números primos.

Suponha justamente o contrário, ou seja, suponha que existe um número finito de números primos. Assim, seja $\{2,3,5,7,...p\}$ o conjunto de todos os números primos existentes. Dessa forma, seja então N o número formado pelo produto de todos esses números, ou seja,

$$N = 2 \times 3 \times ... \times p$$

Bom, esse número é composto e é divisível por todos os números primos. Porém, e o número $N+1$? O que podemos falar sobre ele? Ora, o número $N+1$, quando dividido por 2, dá resto 1. Da mesma forma, quando for dividido por 3, dá resto 1. Além disso, quando esse número for dividido por p, também teremos resto 1. Assim, $N+1$ não é divisível por nenhum número além dele mesmo e do número 1, logo, $N+1$ é um número primo. Porém nós partimos do princípio de que p era o nosso último número primo, e isso nos gera um ABSURDO. Assim, devem existir então infinitos números primos.

IME 2010 - EXEMPLO DE DEMONSTRAÇÃO

QUESTÃO:

Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 *e* S_2 *tais que* $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ *e* $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$.

Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

SOLUÇÃO

Seja $x \in (S_1 \cap S_2)$. Pela definição de intersecção ($\cap$) de conjuntos, segue que $x \in S_1$ e $x \in S_2$.

Além disso, como $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$, isto é, sendo $(S_1 \cap S_2)$ um subconjunto de $(P_1 \cup P_2)$, então todo elemento de $(S_1 \cap S_2)$ é também elemento de $(P_1 \cup P_2)$. Como $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cup P_2)$.

Por outro lado, pela definição de união ($\cup$) de conjuntos, temos que $x \in (P_1 \cup P_2) \Rightarrow x \in P_1$ ou $x \in P_2$.

Analisemos cada uma dessas duas possibilidades:

(I) $x \in P_1$:

Nesse caso, temos simultaneamente $\begin{cases} x \in P_1 \\ x \in S_2 \end{cases} \Rightarrow x \in (P_1 \cap S_2)$

Como, por hipótese, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$, temos que $x \in (P_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in P_2$.

Assim, como $x \in P_1$ e $x \in P_2$, segue que $x \in (P_1 \cap P_2)$.

(II) $x \in P_2$:

Nesse caso, temos simultaneamente $\begin{cases} x \in P_2 \\ x \in S_1 \end{cases} \Rightarrow x \in (P_2 \cap S_1)$

Como, por hipótese, $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, temos que $x \in (P_2 \cap S_1) \Rightarrow x \in P_1$.

Assim, como $x \in P_2$ e $x \in P_1$, segue que $x \in (P_1 \cap P_2)$.

Observe que, em qualquer um dos casos, tomando um elemento x arbitrário no conjunto $(S_1 \cap S_2)$, mostramos que ele necessariamente pertence ao conjunto $(P_1 \cap P_2)$, isto é, $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$.

Isso é equivalente a afirmar que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$, como queríamos demonstrar.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O processo de indução finita é, provavelmente, o modo mais interessante de se provarem exercícios normalmente relacionados com propriedades de números inteiros. Ele é um método simples, porém muito eficaz de prova, baseado em 3 etapas:

1. mostra-se que a tese é válida para algum número qualquer;
2. supõe-se que para o valor **k** nossa tese é verdadeira (essa será nossa nova hipótese);
3. se a propriedade continuar válida para **k+1**, então ela é válida para qualquer número natural.

Exemplo: Mostre que $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Vamos seguir cada etapa:

1) Se n = 1, temos que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$.

2) Vamos supor que $1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Como $1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, temos, somando (k+1) em ambos os lados:

$$(1+2+...+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Lembrando que $k+2=(k+1)+1$, temos então:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Isso comprova que a fórmula continua válida para **k+1**. Assim, ela é válida para qualquer que seja **n** natural.

IME 2010 - EXEMPLO DE PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

QUESTÃO:

Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Seja a matriz* $B=\sum_{k=1}^{n} A^k$, *com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.*

SOLUÇÃO

Uma matriz da forma $M=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem a propriedade de que:

$$M^k=\begin{bmatrix} 1 & k\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para todo k inteiro positivo. Vamos demonstrar tal fato por indução finita sobre k:

Para $k=1$, temos:

$$M^1=M=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que garante a validade da afirmação para $k=1$.

Suponha agora que a igualdade seja válida para $k=p$, isto é:

$$M^p=\begin{bmatrix} 1 & p\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $k=p+1$, temos:

$$M^{p+1}=M^p\cdot M=\begin{bmatrix} 1 & p\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x+p\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & (p+1)\cdot x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a igualdade é válida para $k=p+1$. Assim, pelo Princípio da Indução Finita, mostramos que a igualdade é válida para todo inteiro positivo k.

A partir disso, em relação à matriz A dada, temos que:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow A^k=2^k\cdot\begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^k & k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

A matriz B pode ser construída como:

$$B=\sum_{k=1}^{n}A^k=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} 2^k & k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}2^k & \sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{n}2^k \end{bmatrix}$$

A soma $\sum_{k=1}^{n}2^k$ vem a ser a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 2 e razão 2. Fazemos:

$$\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}=2\cdot 2^n-2$$

Já a soma $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{cases} S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1} \\ 2\cdot S_n=2\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1} \\ 2\cdot S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda, membro a membro, vem que:

$$\begin{cases} S_n = 1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} \\ 2\cdot S_n = \qquad 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + (n-2)\cdot 2^{n-2} + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n \end{cases}$$

$$-S_n = \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + +2^{n-2} + 2^{n-1}\right) - n\cdot 2^n$$

A soma entre parênteses corresponde à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2. Assim:

$$-S_n = \frac{1\cdot(2^n - 1)}{2-1} - n\cdot 2^n \Leftrightarrow S_n = (n-1)\cdot 2^n + 1$$

Finalmente, a soma das quatro entradas da matriz B, em função de n, pode ser expressa por:

$$b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = [2\cdot 2^n - 2] + [(n-1)\cdot 2^n + 1] + 0 + [2\cdot 2^n - 2] \Leftrightarrow$$
$$b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = (n+3)\cdot 2^n - 3$$

TRIGONOMETRIA

Para ilustrar a importância da trigonometria para o vestibular do IME, podemos dizer que, nos últimos cinco anos, pelo menos 14 questões abordavam prioritariamente trigonometria. Se considerarmos questões que envolvem resoluções trigonométricas, esse número passa de 14 para 24 questões!
As questões trigonométricas do IME quase sempre estão acompanhadas por outros assuntos: geometria plana (principalmente triângulos e suas relações), números complexos (forma trigonométrica) e até mesmo equações que envolvem logaritmos.
Interessante é notar que esses tipos de questões exigem conhecimento mais sofisticado do aluno, já que é preciso relacionar diferentes conteúdos em uma só questão.

Fórmulas básicas:

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \qquad \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \text{cotg}^2 x + 1 = \text{cosec}^2 x$$

Identidades úteis

$$\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{sen}\, x = -\text{sen}(-x) \qquad \cos x = \cos(-x)$$

$$\text{sen}\, x = \text{sen}(\pi - x) \qquad \cos x = \cos(2\pi - x) \qquad \text{tg}\, x = \text{tg}(\pi + x)$$

Soma e subtração de arcos

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a.\cos b + \text{sen}\, b.\cos a$$
$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a.\cos b - \text{sen}\, b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.cob - \text{sen}\, a.\text{sen}\, b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.cob + \text{sen}\, a.\text{sen}\, b$$

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\, .\, \text{tg}\, b} \qquad \text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a\, .\, \text{tg}\, b}$$

Arco duplo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$
$$\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$$
$$\text{sen}\, 2x = 2.\text{sen}\, x.\cos x$$

Arco triplo

$$\text{sen}\, 3x = 3.\text{sen}\, x - 4.\text{sen}^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3.\cos x$$

Arco metade

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Transformação de soma em produto

$$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2.\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2.\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\text{tg}\, p + \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p.\cos q} \qquad \text{tg}\, p - \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p.\cos q}$$

$$\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2.\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

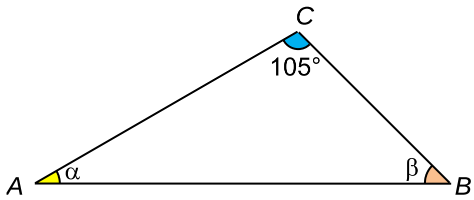
IME 2012 – UM EXEMPLO DE TRIGONOMETRIA

QUESTÃO:
Os ângulos de um triângulo obtusângulo são 105º, α e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:
a) as raízes da equação

$$3\sec x + m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = 3\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x\,,$$

em função de m;
b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

SOLUÇÃO:
A figura a seguir representa a situação descrita:



a) Para $\cos x \neq 0$, podemos trabalhar com a equação, e passo a passo, temos:

$$3\sec x + m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = 3\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \Leftrightarrow$$
$$m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = 3\cos x - \frac{3}{\cos x} + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \Leftrightarrow$$
$$m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = \frac{3\cdot(\cos^2 x - 1)}{\cos x} + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \Leftrightarrow$$
$$m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = \frac{-3\,\text{sen}^2 x}{\cos x} + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \Leftrightarrow$$
$$m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} - m\right)\left(\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\, x\right) = 0$$

Para que a expressão acima seja verdadeira, então necessariamente

$$\text{tg}\, x = m \;\text{ ou }\; \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$
$$\boxed{x = \text{arctg}(m) + k\cdot 180°} \text{ ou } \boxed{x = 30° + k\cdot 180°}\text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

b) Para que tenhamos as raízes da equação acima como os ângulos internos do triângulo dado, um dos ângulos internos deve ser igual a 30°, de acordo com a resolução do item anterior (o único valor entre 0° e 180° que satisfaz $x = 30° + k\cdot 180°$).
Fazendo, por exemplo, $\alpha = 30°$, segue que o outro ângulo deve ser:

$$\beta = 180° - (105° + 30°) = 45°$$

Assim:

$$45° = \text{arctg}(m) \Leftrightarrow m = \text{tg}\, 45° \Leftrightarrow \boxed{m = 1}$$

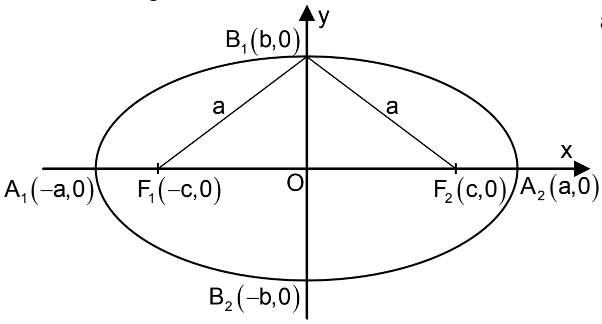
CÔNICAS

O tópico de cônicas normalmente não é enfatizado no Ensino Médio. Isso ocorre, primeiramente, por sua complexidade e pela pouca incidência desse assunto em outros vestibulares. Entretanto, no vestibular do IME, temos 12 questões na última década que abordam tal tema.

2005 – elipse 2006 – hipérbole 2007 disc – hipérbole 2008 testes – cônicas em geral 2009 testes – hipérbole 2010 testes – hipérbole e elipse	2010 disc – hipérbole 2011 testes – hipérbole 2011 disc – hipérbole 2012 disc – parábola 2013 testes – elipse 2014 disc. – parábola

A seguir um resumo das principais propriedades das cônicas:

ELIPSE
Dados dois pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma elipse de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P(x,y) cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a 2*a*, com 2a > 2c.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

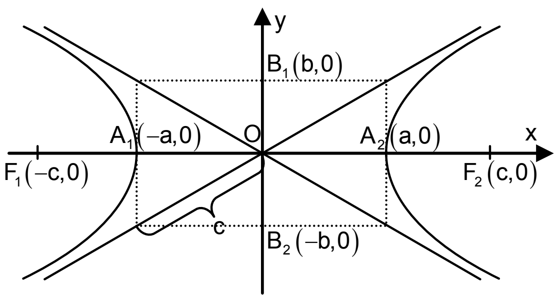
O: centro **F_1, F_2:** focos **A_1, A_2, B_1, B_2:** vértices **A_1A_2**: eixo maior (2a) **B_1B_2**: eixo menor (2b) **F_1F_2**: distância focal (2c) **e:** excentricidade

Equações reduzidas – centro em (x_0, y_0)

- A_1A_2 // Ox: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

- A_1A_2 // Oy: $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} + \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

HIPÉRBOLE
Dados dois pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma hipérbole de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P(x,y) cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a 2a, com 2a < 2c.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

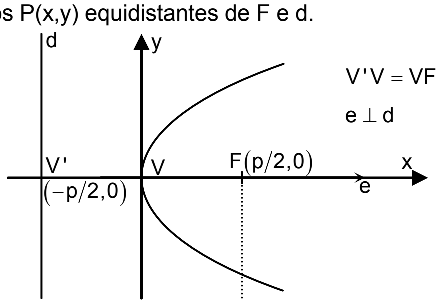
O: centro **F_1, F_2:** focos **A_1, A_2:** vértices **e:** excentricidade
A_1A_2: eixo real (2a) **B_1B_2**: eixo imaginário ou conjugado (2b)
F_1F_2: distância focal (2c)

Equações reduzidas – centro em (x_0, y_0)

- A_1A_2 // Ox: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

- A_1A_2 // Oy: $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

PARÁBOLA
Dados um ponto F e uma reta d (F$\notin$d). Uma parábola é o conjunto dos pontos P(x,y) equidistantes de F e d.



$$V'V = VF = p/2$$

$$e \perp d$$

F: foco **V:** vértice **V'F:** p – parâmetro **e:** eixo de simetria

Equações reduzidas – centro em (x_0, y_0)

- e // Ox: $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$

- e // Oy: $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$

RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA

Dada uma equação do 2º grau redutível à forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{k_1} + \dfrac{(y-y_0)^2}{k_2} = 1$	
$k_1 = k_2$	Circunferência
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1>k_2$	Elipse de eixo maior horizontal
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1<k_2$	Elipse de eixo maior vertical
$k_1>0$ e $k_2<0$	Hipérbole de eixo real horizontal
$k_1<0$ e $k_2>0$	Hipérbole de eixo real vertical

Rotação de eixos

As coordenadas de um ponto P(x,y) após a rotação de eixos de um ângulo θ são dadas por (x\`,y\`) tais que	
x = x\`.cosθ - y\`.senθ	**y = x\`.senθ + y\`.cosθ**

Interpretação de uma equação do 2º grau

Dada a eq. geral do 2º grau: **$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$** é sempre possível eliminar o seu termo retângulo (2Bxy) através de um rotação de eixos de um ângulo θ tal que	
A = C → θ = π / 4	**A ≠ C → tg 2θ = 2B/(A – C)**

IME 2011 – UM EXEMPLO DE CÔNICAS

QUESTÃO:
Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação
$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0.$$

SOLUÇÃO:
Observando a equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$, nota-se que ela representa uma cônica com centro na origem, uma vez que ela não apresenta os termos x e y.
É conveniente para os nossos cálculos que o termo "xy" de sua equação seja eliminado; isso pode ser feito a partir de uma rotação de eixos de um ângulo de θ, que é definido a partir da igualdade $\text{tg}(2\theta) = \dfrac{B}{A-C}$, onde A, B e C são, respectivamente, os coeficientes dos termos x^2, xy e y^2. Assim:

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} \Rightarrow \text{tg}(2\theta) = \frac{-10\sqrt{3}}{1-11} \Leftrightarrow \text{tg}(2\theta) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = 30°$$

As equações de rotação de eixos são, portanto, dadas por:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\text{sen}\theta \\ y = x_1\text{sen}\theta + y_1\cos\theta \end{cases}$$

Como $\theta = 30°$:

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - y_1 \cdot \dfrac{1}{2} \\ y = x_1 \cdot \dfrac{1}{2} + y_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2} \\ y = \dfrac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Substituindo x e y na equação da cônica, temos:

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$$

$$\left(\frac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2}\right)^2 - 10\sqrt{3}\left(\frac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2}\right) + 11\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 16 = 0$$

Expandindo cada um dos termos:

$$\left(\frac{3x_1^2-2x_1y_1\sqrt{3}+y_1^2}{4}\right)-10\sqrt{3}\cdot\left(\frac{x_1^2\sqrt{3}+3x_1y_1-x_1y_1-y_1^2\sqrt{3}}{4}\right)+$$

$$+11\cdot\left(\frac{x_1^2+2x_1y_1\sqrt{3}+3y_1^2}{4}\right)+16=0$$

$$\frac{3x_1^2-2x_1y_1\sqrt{3}+y_1^2-30x_1^2-20\sqrt{3}x_1y_1+30y_1^2}{4}$$

$$+\frac{11x_1^2+22x_1y_1\sqrt{3}+33y_1^2}{4}+16=0$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por 4 e agrupando termos semelhantes:

$$-16x_1^2+64y^2+64=0\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{1}=1$$

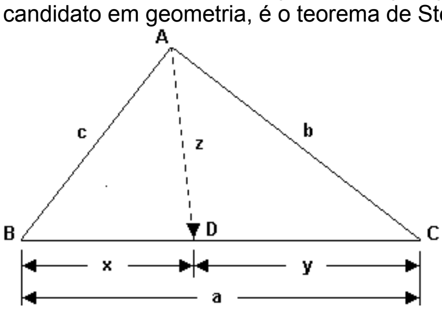
Desse modo, a equação reduzida da cônica após a rotação de eixos mostra que ela é uma hipérbole com semi-eixo real igual a 2 e semi-eixo imaginário igual a 1. Admitindo que a distância focal seja 2c, temos:

$$c^2=2^2+1^2\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

Assim, a excentricidade dessa cônica é $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

GEOMETRIA – A RELAÇÃO DE STEWART

Um teorema bastante importante, que pode facilitar a vida do candidato em geometria, é o teorema de Stewart:



$$b^2x+c^2y-z^2a=a.x.y$$

IME 2013 – UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE STEWART

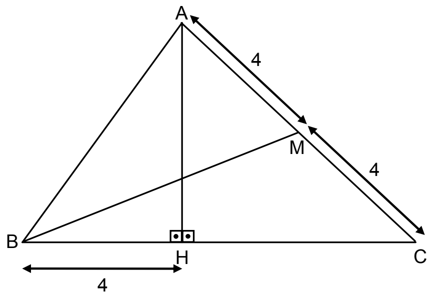
QUESTÃO:

Seja um triângulo ABC. AH é a altura relativa de BC, com H localizado entre B e C. Seja BM a mediana relativa de AC. Sabendo que $BH=AM=4$, a soma dos possíveis valores inteiros BM é

a) 11 b) 13 c) 18 d) 21 e) 26

SOLUÇÃO:

A ilustração abaixo descreve a situação descrita no enunciado.



Pela relação de Stewart segue que:

$$(AM)(BC)^2+(CM)(AB)^2=(AC)\left[(BM)^2+(AM)(MC)\right]$$

$$4(BC)^2+4(AB)^2=8\cdot\left[(BM)^2+4\cdot4\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(BC)^2+(AB)^2=2\cdot\left[(BM)^2+16\right]$$

Pelo teorema de Pitágoras nos triângulos *ABH* e *ACH*:

$$h^2+4^2=(AB)^2\Rightarrow(AB)^2=h^2+16$$

e

$$8^2=(BC-4)^2+h^2\Rightarrow(BC)^2=64-16+8(BC)-h^2$$

$$\begin{cases}(AB)^2=h^2+16\\(BC)^2=64-16+8(BC)-h^2\end{cases}$$

Somando as equações obtidas:

$$(AB)^2+(BC)^2=64+8(BC)$$

Substituindo na equação obtida pela relação de Stewart:

$$(BC)^2+(AB)^2=2\cdot\left[(BM)^2+16\right]\Rightarrow64+8(BC)=2\cdot\left[(BM)^2+16\right]\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow(BM)^2=16+4(BC)$$

Podemos observar que

$BC>4$, já que $BH=4$ e

$CH<8$, já que CH é cateto do triângulo que tem AC como hipotenusa.

Logo $BC-4<8\Rightarrow BC<12$, assim:

$4<BC<12$.

Deste modo:

$$(BM)^2=16+4(BC)\Rightarrow32<(BM)^2<64$$

Deste modo os valores inteiros que satisfazem tal inequação são:

$BM=6$ e $BM=7$.

Logo a soma, S, dos possíveis valores de BM é $S=6+7\Leftrightarrow\boxed{S=13}$.

SEQUÊNCIAS

Um dos temas em destaque dos últimos anos do vestibular do IME é sequências. Lembramos que as famosas progressões aritméticas e geométricas são apenas exemplos de sequências e, por sua vez, mais importantes. Vejamos:

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante real. Essa constante é chamada de **razão da P.A.** e é indicada por **r**.

Termo geral	$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$
Soma dos n primeiros termos	$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$
Propriedade	$a_{n-1}=\frac{a_{n-2}+a_n}{2}$

Progressão geométrica (P.G.) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é um produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada de **razão da P.G.** e é indicada por **q**.

Termo geral	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$
Soma dos n primeiros termos	$S_n=\frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$
Soma dos termos de uma P.G. infinita	$S_n=\frac{a_1}{1-q}$, com $-1<q<1$
Propriedade	$(a_{n-1})^2=a_{n-2}\cdot a_n$

É interessante notar que podemos lembrar o comportamento dessas duas sequências por meio de funções já conhecidas: função afim para a progressão aritmética e função exponencial para a geométrica. Muitas vezes, o raciocínio que aprendemos com essas funções pode ser transmitido por essas sequências sem precisar "decorar" algumas propriedades.
Assim, não tenha medo de usar logaritmo para descobrir a razão de uma progressão geométrica! Todos os artifícios matemáticos podem ser usados durante a prova, logaritmo é apenas um deles.
Outro fato interessante é a mistura entre os termos das duas progressões. A dica para resolver esse tipo de exercício é sempre relacionar os termos das progressões com o primeiro termo, a_1 e as razões r (na P.A.) ou q (na P.G.). Lembre-se: com essa manipulação, você precisa obter poucas equações para resolver o problema!
Vejamos um exemplo:

IME 2012: UM EXEMPLO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

QUESTÃO:
O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão q, com q e r $\in \mathbb{N}^*$ *(natural diferente de zero). Determine:*
a) o menor valor possível para a razão r ;
b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

SOLUÇÃO:
a) Sendo $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a progressão aritmética, sabe-se que os termos a_2, a_7 e a_{27} formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Assim:

$$a_7^{\,2} = a_2 \cdot a_{27} \Leftrightarrow (a_1 + 6r)^2 = (a_1 + r)\cdot(a_1 + 26r) \Leftrightarrow$$
$$a_1^{\,2} + 12a_1r + 36r^2 = a_1^{\,2} + 27a_1r + 26r^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 3a_1r$$

Como $r \neq 0$, segue que:

$$2r^2 = 3a_1r \Leftrightarrow 2r = 3a_1$$

Como tanto a_1 quanto *r* devem ser números inteiros, com *r* positivo, os menores valores que satisfazem a expressão acima são:

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Assim, o menor valor possível para *r* é $\boxed{r = 3}$.
b) Temos que:

$$a_{18} = a_1 + 17r = 2 + 17 \cdot 3 \Leftrightarrow \boxed{a_{18} = 53}$$

DETERMINANTE

Calcular determinante de algumas matrizes pode nos tomar minutos preciosos de prova, além de serem propícios a erros de sinais e de contas. Existem várias regras e teoremas para calcular determinante de matrizes com ordem $n \geq 2$. Listamos abaixo duas ferramentas ótimas que o ajudarão durante a prova.

Teorema de Jacobi: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se multiplicarmos todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) por um mesmo número e somarmos os resultados dos elementos aos seus correspondentes de outra fila, obteremos outra matriz B. Entretanto, podemos afirmar que $\det A = \det B$.
Esse processo é totalmente semelhante ao de resolução de sistemas lineares, no qual se multiplica uma equação por um número e soma-se essa equação obtida pela multiplicação à outra.

Regra de Chió: A regra de Chió é uma técnica utilizada no cálculo de determinantes de ordem $n \geq 2$. Dada uma matriz A de ordem n, ao aplicarmos essa regra, obteremos uma outra matriz A' de ordem $n-1$, cujo determinante é igual ao de A.

1º passo: Para usar a regra de Chió, precisamos que o elemento da primeira linha e primeira coluna seja igual a 1, ou seja, $a_{11} = 1$.
Caso não seja, tente manipular até obter esse elemento. Tome cuidado! Ao fazer manipulações na matriz, você pode alterar tanto o sinal quanto o valor do determinante.
2º passo: Isolamos a primeira linha e a primeira coluna da matriz.
3º passo: De cada elemento restante, subtrai-se o produto dos dois elementos isolados pertencentes à linha e à coluna desse elemento restante.
4º passo: Com o resultado das subtrações referidas acima, obtém-se uma matriz de ordem menor que a anterior, porém com o mesmo determinante.
Você pode aplicar essa regra várias vezes até reduzir a matriz para uma ordem menor.
Vejamos o exercício abaixo que relaciona a regra de Chió com Jacobi.

IME 2012: UM EXEMPLO DE DETERMINANTE

QUESTÃO:
Calcule as raízes de $f(x)$ *em função de a, b e c, sendo a, b, c e* $x \in \mathbb{R}$ *(real) e*

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

SOLUÇÃO:
Pelo teorema de Jacobi, fazendo a primeira linha receber a soma das outras três linhas:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

Pela regra de Chió, aplicada ao elemento a_{11}:

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, somando a segunda linha na primeira:

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} x-a-b+c & x-a-b+c & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Pela regra de Chió, aplicada ao elemento a_{11}:

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot \begin{vmatrix} x-c & a-b \\ a-b & x-c \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, somando a segunda linha na primeira:

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot \begin{vmatrix} x+a-b-c & x+a-b-c \\ a-b & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot(x+a-b-c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-b & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$f(x) = (x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot(x+a-b-c)\cdot(x-a+b-c)$

Assim:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x+a+b+c)\cdot(x-a-b+c)\cdot(x+a-b-c)\cdot(x-a+b-c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{x = -(a+b+c)} \text{ ou } \boxed{x = a+b-c} \text{ ou } \boxed{x = -a+b+c} \text{ ou } \boxed{x = a-b+c}$$

NÚMEROS COMPLEXOS

Nos últimos três anos, um dos assuntos que apareceu no vestibular do IME, tanto na prova discursiva quanto na prova objetiva, é números complexos.

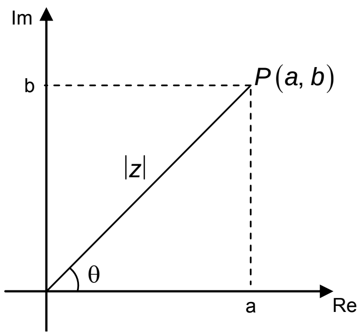
A necessidade de calcular raízes quadradas de números reais negativos trouxe, juntamente com o tempo, a criação da unidade imaginária representada por *i*, tal que $i^2 = -1$.

Todo número complexo z é da forma $z = a + bi$, onde $i^2 = -1$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Essa expressão recebe o nome de forma algébrica de z e, como veremos, essa forma de representar um número complexo é bastante prática. O número real *a* é chamado de **parte real de z** e indicamos por $a = \mathrm{Re}(z)$. Já o número real b é chamado de **parte imaginária** e indica-se por $b = \mathrm{Im}(z)$.

Dizemos que um número é **imaginário puro** quando $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Quando $\mathrm{Im}(z) = 0$, z é um **número real**. Nesse caso, caímos no conjunto dos números reais, uma vez que todo número real é número complexo com a parte imaginária nula.

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é indicado por $\bar{z}$ e definido por $\bar{z} = a - bi$, isto é, $\bar{z}$ é obtido de z trocando-se o sinal de sua parte imaginária.

Outra maneira de representar um número complexo é pela forma trigonométrica. Considere $z = a + bi$ e o plano de Argand-Gauss:



Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento: $\arg(z) : \theta$

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Forma trigonométrica

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Propriedades:

Considere $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$:

01. Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

02. Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

03. Fórmulas de De Moivre: Seja $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

1ª Fórmula (potenciação): $z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$

2ª Fórmula (radiciação): *w* será uma raiz n-ésima de *z*, se, e somente se, $w^n = z$. Deste modo,

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \text{ com } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Vejamos a aplicação da 2ª fórmula de De Moivre em uma questão do IME:

IME 2011 – UM EXEMPLO DE NÚMEROS COMPLEXOS

QUESTÃO:

O valor de $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$ *é:*

a) -1 *b) -0,5* *c) 0* *d) 0,5* *e) 1*

SOLUÇÃO:

Considere a equação $z^7 - 1 = 0$. As raízes de tal equação são da forma $z_k = \mathrm{cis}\left(\frac{k.2\pi}{7}\right)$, com k inteiro.

Assim, temos:

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \mathrm{cis}0 \Rightarrow z_0 = 1$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \mathrm{cis}\frac{2\pi}{7}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \mathrm{cis}\frac{4\pi}{7}$

$k=3 \Rightarrow z_3 = \mathrm{cis}\frac{6\pi}{7}$

$k=4 \Rightarrow z_4 = \mathrm{cis}\frac{8\pi}{7}$

$k=5 \Rightarrow z_5 = \mathrm{cis}\frac{10\pi}{7}$

$k=6 \Rightarrow z_6 = \mathrm{cis}\frac{12\pi}{7}$

Pela relação de Girard, a soma das raízes é zero.

Assim:

$$1 + \mathrm{cis}\frac{2\pi}{7} + \mathrm{cis}\frac{4\pi}{7} + \mathrm{cis}\frac{6\pi}{7} + \mathrm{cis}\frac{8\pi}{7} + \mathrm{cis}\frac{10\pi}{7} + \mathrm{cis}\frac{12\pi}{7} = 0$$

Usando a parte real, temos:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$$

Como

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\frac{12\pi}{7}, \quad \cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{10\pi}{7} \text{ e } \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7},$$

temos:

$$1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0,$$

Logo: $\boxed{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0}$

APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS: POLINÔMIOS

Dois temas bem recorrentes do vestibular do IME são polinômios e equações polinomiais. Estes estão quase sempre relacionados aos números complexos. Vejamos:

Um polinômio $p(x)$ na variável complexa x é uma expressão dada por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1 e a_0 são números complexos chamados **coeficientes** do polinômio; a_0 é o **coeficiente independente** do polinômio.
- n é um número natural.
- o **grau** do polinômio é o número natural correspondente ao maior expoente de x, com coeficiente não nulo.
- o valor numérico de p em α é igual ao número complexo obtido quando substituímos x por α.
- dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz de $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

Relações de Girard:

Seja a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e r_1, r_2, …, r_n suas raízes. Assim, as relações entre coeficientes e raízes são:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n = (-1)^1 \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \ldots + r_n \cdot r_{n-1} = (-1)^2 \cdot \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = (-1)^3 \cdot \dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Teorema das raízes complexas: Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.
Vejamos a aplicação do teorema das raízes complexas e relações de Girard no seguinte exercício do IME:

IME 2013 – UM EXEMPLO DE POLINÔMIO COM RAÍZES COMPLEXAS

QUESTÃO:
Considere, Z_1 e Z_2, complexos que satisfazem a equação $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são números reais diferentes de zero. Sabe-se que os módulos de Z_1 e Z_2 são iguais e que a diferença entre os seus argumentos vale α, onde α é diferente de zero. Determine o valor de $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ em função de p e q.

SOLUÇÃO:
Como os coeficientes da equação $x^2 + px + q = 0$ são todos reais, segue que Z_1 é raiz da equação se e somente se $\overline{Z_1}$ (conjugado de Z_1) é raiz. Portanto, devemos ter $Z_2 = \overline{Z_1}$.
Sendo números complexos de mesmo argumento $\rho \neq 0$, podemos denotá-los por:

$$\begin{cases} Z_1 = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \\ Z_2 = \rho \cdot (\cos(-\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta)) = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

De acordo com o enunciado, a diferença entre seus argumentos é α.
Assim:

$$\alpha = \theta - (-\theta) = 2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$$

Podemos reescrever Z_1 e Z_2 como:

$$\begin{cases} Z_1 = \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ Z_2 = \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Usando agora as relações de soma e produto para a equação, segue que:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -\dfrac{p}{1} \\ Z_1 \cdot Z_2 = \dfrac{q}{1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = -p \\ \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cdot \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \rho \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -p \\ \rho^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\dfrac{p}{2 \cdot \rho} \\ \rho^2 = q \end{cases}$$

Assim:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2 \cdot \rho}\right)^2 = \frac{p^2}{4 \cdot \rho^2} \Leftrightarrow \boxed{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p^2}{4 \cdot q}}$$

OBSERVAÇÃO FINAL

Como observação final, gostaríamos de deixar bem claro que, em qualquer exercício de Matemática, a argumentação é fundamental, principalmente em exercícios que envolvem demonstrações. Não basta apenas chegar a um resultado, também é necessário especificar o modo como esse resultado foi obtido.