

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

Resolve

UNICAMP 2009
SEGUNDA FASE

MATEMÁTICA

INGLÊS

www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e dutovias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados da tabela, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhões de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferrovial	18 %	24 %	6,8	8,8
Rodoviário	77 %		29,1	
Dutoviário				

a) Determine a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

Resolução

a) Seja T a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Temos:

$$\frac{18}{100} \cdot T = 6,8 \Rightarrow T = \frac{680}{18} \Rightarrow T \approx 37,8 \text{ milhões de toneladas}$$

E ainda, a participação no total transportado ao porto, em 2007, pelo meio de transporte dutoviário é de $100\% - (18\% + 77\%) = 5\%$. Logo, sendo d carga transportada nesse caso, temos:

$$d = \frac{5}{100} \cdot 37,8 \Rightarrow d \approx 1,9 \text{ milhões de toneladas}$$

b) Seja R a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008. A carga transportada (em milhões de toneladas) ao porto pelo meio de transporte rodoviário foi de $29,1 - 2,7 = 26,4$. Então, comparando com a carga transportada pelo meio ferroviário, vem que:

$$\frac{8,8}{24\%} = \frac{26,4}{R} \Rightarrow R = 72\%$$

QUESTÃO 02

Uma lâmpada incandescente de 100 W custa R\$ 2,00. Já uma lâmpada fluorescente de 24 W, que é capaz de iluminar tão bem quanto a lâmpada incandescente de 100 W, custa R\$ 13,40. Responda às questões abaixo, lembrando que, em uma hora, uma lâmpada de 100 W consome uma quantidade de energia equivalente a 100 Wh, ou 0,1 kWh. Em seus cálculos, considere que 1 kWh de energia custa R\$ 0,50.

a) Levando em conta apenas o consumo de energia, ou seja, desprezando o custo de aquisição da lâmpada, determine quanto custa manter uma lâmpada incandescente de 100 W acesa por 750 horas. Faça o mesmo cálculo para uma lâmpada fluorescente de 24 W.

b) Para iluminar toda a sua casa, João comprou e instalou apenas lâmpadas fluorescentes de 24 W. Fernando, por sua vez, comprou e instalou somente lâmpadas incandescentes de 100 W para iluminar sua casa. Considerando o custo de compra de cada lâmpada e seu consumo de energia, determine em quantos dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João. Suponha que cada lâmpada fica acesa 3 horas por dia. Suponha, também, que as casas possuem o mesmo número de lâmpadas.

Resolução

a) Em 750 horas, consumo da lâmpada incandescente (100 W) é dado por $750 \cdot 100 = 7,5 \cdot 10^4 \text{ Wh} = 75 \text{ kWh}$

Como 1 kWh custa R\$ 0,50 o custo total será $75 \cdot 0,50 = 37,50$ reais.

Já o consumo da lâmpada fluorescente (24W) em 750 horas é dado por $750 \cdot 24 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Wh} = 18 \text{ kWh}$

Como 1 kWh custa R\$ 0,50 o custo total será $18 \cdot 0,50 = 9,00$ reais.

Dessa forma, o custo para manter a lâmpada incandescente acesa por 750 horas é de R\$ 37,50 e o custo para manter a lâmpada fluorescente acesa pelo mesmo período é de R\$ 9,00.

b) Como as lâmpadas ficarão acesas 3 horas por dia, então

- Cada lâmpada incandescente ($100\text{W} = 0,1\text{kW}$) consome, por dia, $3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ kWh}$

- Cada lâmpada fluorescente ($24\text{W} = 0,024\text{kW}$) consome, por dia, $3 \cdot 0,024 = 0,072 \text{ kWh}$.

Considerando t o número de dias que as lâmpadas ficarão acesas e levando em consideração o custo compra, o custo total para cada lâmpada pode ser descrito da seguinte maneira:

Fluorescente: $C_{\text{JOÃO}} = 13,4 + 0,072 \cdot 0,5 \cdot t \Rightarrow C_{\text{JOÃO}} = 13,4 + 0,036 \cdot t$

Incandescente: $C_{\text{FERNANDO}} = 2 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot t \Rightarrow C_{\text{FERNANDO}} = 2 + 0,15 \cdot t$

Queremos encontrar o valor de t tal que:

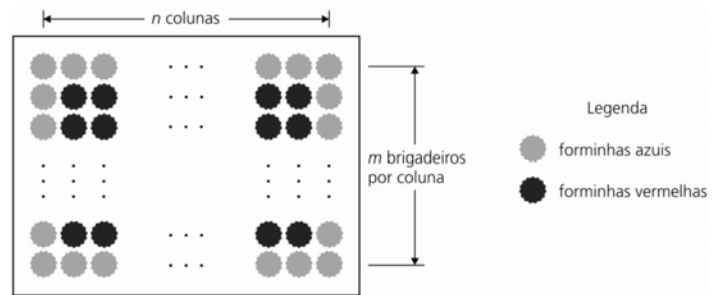
$$C_{\text{FERNANDO}} > C_{\text{JOÃO}}$$

$$2 + 0,15 \cdot t > 13,4 + 0,036 \cdot t \Rightarrow 0,114 \cdot t > 11,4 \Rightarrow t > 100 \text{ dias.}$$

Portanto, após 100 dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João.

QUESTÃO 03

Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando n colunas, cada qual com m brigadeiros, como mostra a figura abaixo. Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas.



a) Sabendo que $m = 3n/4$ e que a pessoa gastou o mesmo número de forminhas vermelhas e azuis, determine o número de brigadeiros da bandeja.

b) Se a pessoa compra a massa do brigadeiro já pronta, em latas de 1 litro, e se cada brigadeiro, antes de receber o chocolate granulado que o cobre, tem o formato de uma esfera de 2 cm de diâmetro, quantas latas ela tem que comprar para produzir 400 brigadeiros? (Dica: lembre-se de que 1 litro corresponde a 1000 cm^3 .)

Resolução

a) As forminhas vermelhas, que são de mesmo número que as azuis, estão dispostas em $(m-2)$ linhas e $(n-2)$ colunas. Logo, o total de forminhas vermelhas (e o total de forminhas azuis) é $(m-2) \cdot (n-2)$ e o total de forminhas é $2 \cdot (m-2) \cdot (n-2)$

Ainda temos que bandeja possui m linhas por n colunas, ou seja, o número total de brigadeiros é $m \cdot n$.

Dessa forma: $2 \cdot (m-2) \cdot (n-2) = m \cdot n$

Substituindo $m = \frac{3n}{4}$ na expressão acima:

$$2 \cdot \left(\frac{3n}{4} - 2 \right) \cdot (n-2) = \frac{3n}{4} \cdot n \Rightarrow (6n-16) \cdot (n-2) = 3 \cdot n^2$$

$$3n^2 - 28n + 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ \text{ou} \\ n = 4/3 \end{cases}$$

Como n é o número de colunas, este precisa ser um número inteiro.

$$n = 8 \Rightarrow m = \frac{3n}{4} = 6$$

Assim, o número total de brigadeiros é $m \cdot n = 8 \cdot 6 = 48$ brigadeiros.

b) O volume de um brigadeiro é o mesmo volume de uma esfera cujo raio mede 1 cm. Dessa forma, para 400 brigadeiros:

$$V_{400 \text{ brigadeiros}} = 400 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \right) = \frac{1600\pi}{3} = 1600 \text{ cm}^3$$

Como cada lata possui 1 litro, ou ainda 1000 cm^3 , temos que o número de latas necessário será $\frac{1600}{1000} = 1,6$ latas

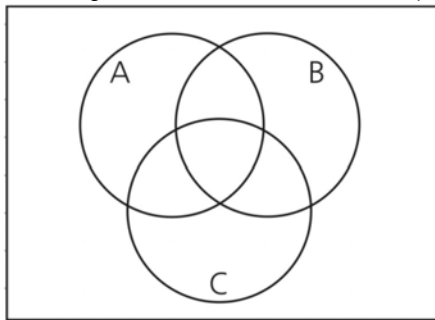
Como não é possível se comprar 1,6 latas, para fazer os 400 brigadeiros a pessoa deverá comprar **2 latas** de massa.

QUESTÃO 04

Três candidatos A, B e C concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B, e 100 votariam apenas no candidato C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunte-se:

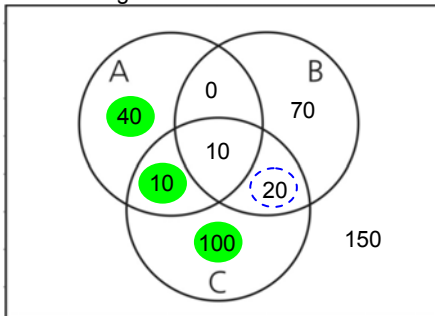
- a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?
- b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição mas ainda não tenha se decidido por um único candidato?

(Sugestão: utilize o diagrama de Venn fornecido abaixo)



Resolução

a) Levando em consideração apenas as informações do enunciado, podemos preencher o diagrama de Venn abaixo:



Logo, o número de sócios entrevistados que estão em dúvida entre votar em B ou C, mas não em A, é igual a 20 (destacado em azul tracejado). E o número de sócios que não votariam em B é igual a 150 (destacado em verde hachurado).

b) O número de sócios que participaram da pesquisa é dado por:

$$N_{\text{entrevistados}} = 40 + 70 + 10 + 10 + 20 + 100 + 150 = 400 \text{ sócios.}$$

Os sócios entrevistados que ainda não se decidiram é dado por:

$$n_{\text{indecisos}} = 0 + 10 + 10 + 20 = 40 \text{ sócios}$$

Escolhido, ao acaso, um dos sócios, a probabilidade de que ele vá participar das eleições e ainda não se decidiu por um único candidato é dada por:

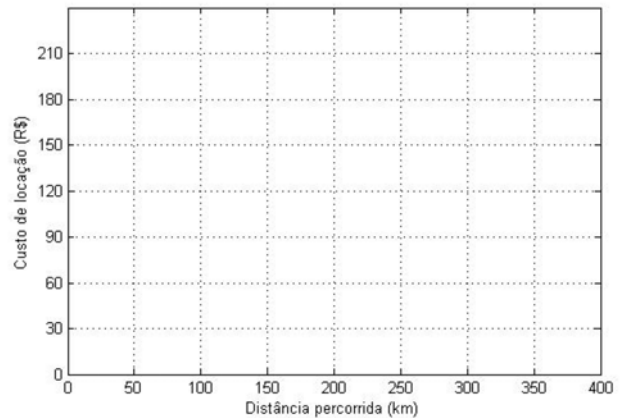
$$p = \frac{n_{\text{indecisos}}}{N_{\text{entrevistados}}} = \frac{40}{400} = 0,1 = 10\%$$

QUESTÃO 05

Dois locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R\$ 30,00, além de R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R\$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R\$ 0,60.

a) Para cada locadora, represente no gráfico abaixo a função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.

b) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato. Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.



Resolução

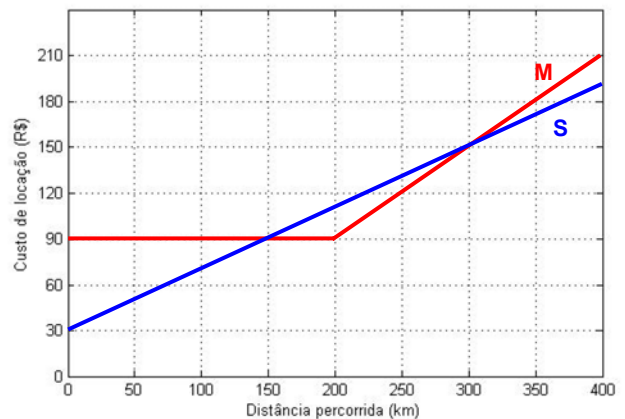
a) Temos que as funções que descrevem o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia são:

$$S = 30 + 0,4 \cdot x$$

$$M = \begin{cases} 90, & \text{se } 0 \leq x \leq 200 \\ 90 + 0,6 \cdot (x - 200), & \text{se } x \geq 200 \end{cases}$$

onde S é a função custo da locadora Saturno e M é a função custo da locadora Mercúrio e x é a quilometragem rodada.

Assim, teremos:



b) Vamos primeiramente descobrir os pontos de intersecção das duas funções. Do gráfico acima temos $x_1 = 150$ e $x_2 = 300$

Ou então algebricamente:

$$0 \leq x \leq 200 : S = M \Rightarrow 30 + 0,4 \cdot x_1 = 90 \Rightarrow x_1 = 150$$

$$x \geq 200 : S = M \Rightarrow 30 + 0,4 \cdot x_2 = 90 + 0,6(x - 200) \Rightarrow x_2 = 300$$

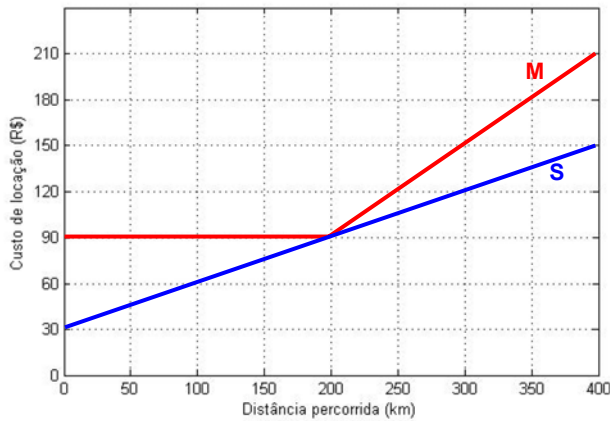
Do gráfico, é fácil notar que:

Se $0 \leq x < 150$ ou se $x > 300$ temos $S < M$ e portanto a locadora mais vantajosa é a Saturno

Se $150 < x < 300$, $S > M$ e portanto a locadora mais vantajosa é a Mercúrio.

Se $x = 150$ ou $x = 300$, $S = M$ e portanto a escolha é indiferente.

O plano mais vantajoso será a da empresa Saturno ($S < M$) para qualquer distância rodada, se tivermos o seguinte gráfico (mantendo a taxa fixa a mesma e maximizando o lucro da empresa):



Então, para encontrar o custo por quilômetro rodado, basta encontrar a relação $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, onde ΔS é o incremento de custo associado a um incremento de deslocamento Δx .
Considerando os pontos (0,30) e (200,90).

$$m = \frac{90 - 30}{200 - 0} = \frac{60}{200} = 0,3 \text{ reais/km}$$

Logo, o novo custo por km rodado deve ser **R\$ 0,30**.

QUESTÃO 06

Um casal convidou seis amigos para assistirem a uma peça teatral. Chegando ao teatro, descobriram que, em cada fila da sala, as poltronas eram numeradas em ordem crescente. Assim, por exemplo, a poltrona 1 de uma fila era sucedida pela poltrona 2 da mesma fila, que, por sua vez, era sucedida pela poltrona 3, e assim por diante.

- a) Suponha que as oito pessoas receberam ingressos com numeração consecutiva de uma mesma fila e que os ingressos foram distribuídos entre elas de forma aleatória. Qual a probabilidade de o casal ter recebido ingressos de poltronas vizinhas?
- b) Suponha que a primeira fila do teatro tenha 8 cadeiras, a segunda fila tenha 2 cadeiras a mais que a primeira, a terceira fila tenha 2 cadeiras a mais que a segunda e assim sucessivamente até a última fila. Determine o número de cadeiras da sala em função de n , o número de filas que a sala contém. Em seguida, considerando que a sala tem 144 cadeiras, calcule o valor de n .

Resolução

a) O número de possibilidades de as 8 pessoas ocuparem as 8 poltronas disponíveis (permutação) é dado por $8!$.
O número de possibilidades de essas 8 pessoas se sentarem nas 8 poltronas, de modo que o casal fique junto, pode ser calculado considerando o casal como sendo uma única pessoa, mas levando em conta que eles também podem trocar de lugar entre si.
Assim, teremos 6 pessoas mais o casal, o que equivale a uma permutação de 7 elementos e, além disso, a permutação do casal, dada por $7! \cdot 2!$.

Logo, a probabilidade p de o casal ocupar poltronas vizinhas é:

$$p = \frac{7! \cdot 2!}{8!} = \frac{2}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

- b) O número de cadeiras forma uma progressão aritmética de razão $r = 2$, com primeiro termo $a_1 = 8$.

Assim, na n ésima fileira, teremos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 8 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n + 6$$

Além disso, o total de cadeiras no teatro equivale à soma de todos os termos dessa PA e, portanto:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(8 + 2n + 6) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = n^2 + 7n$$

Quando o total de cadeiras na sala é 144, vem que:

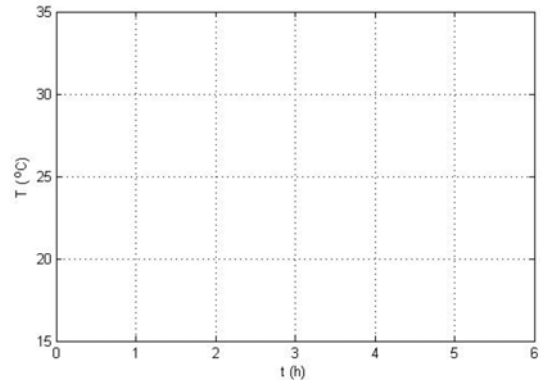
$$S_n = 144 \Rightarrow n^2 + 7n = 144 \Rightarrow n^2 + 7n - 144 = 0 \Rightarrow n = 9 \text{ ou } n = -16$$

Como o número de filas não pode ser negativo, temos que $n = 9$.

QUESTÃO 07

O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t , o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-t/4} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21^\circ\text{C}$ e $T_{ext} = 30^\circ\text{C}$, responda às questões abaixo.

- a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado. Em seguida, esboce abaixo o gráfico de $T(t)$.
- b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar condicionado, para que a temperatura subisse 4°C . Se necessário, use $\log_{10} 2 \approx 0,30$, $\log_{10} 3 \approx 0,48$ e $\log_{10} 5 \approx 0,70$.



Resolução

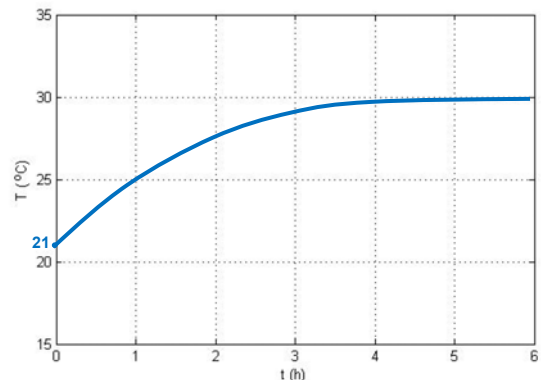
- a) Como $T_0 = 21^\circ\text{C}$ e $T_{ext} = 30^\circ\text{C}$, temos:

$$T(t) = (21 - 30) \cdot 10^{-t/4} + 30 \Rightarrow T(t) = 30 - 9 \cdot 10^{-t/4}$$

Para $t = 4$ h, temos:

$$T(4) = 30 - 9 \cdot 10^{-1} = 30 - 9 \cdot 10^{-1} \Rightarrow T(4) = 29,1^\circ\text{C}$$

O gráfico é dado por:



- b) Queremos encontrar t de modo que $T(t) = 25^\circ\text{C}$. Assim, fazemos:

$$30 - 9 \cdot 10^{-t/4} = 25 \Rightarrow 5 = 9 \cdot 10^{-t/4} \Rightarrow 10^{-t/4} = \frac{5}{9} \Rightarrow -\frac{t}{4} = \log_{10} \left(\frac{5}{9} \right) \Rightarrow t = -4 \cdot (\log_{10} 5 - \log_{10} 3^2) \Rightarrow t = -4 \cdot (0,70 - 2 \cdot 0,48) \Rightarrow t = 1,04 \text{ h}$$

Embora acreditemos que não seja necessário, tal resposta também poderia ser expressa por $t = 1$ h, 2 min e 24 s.

QUESTÃO 08

Pedro precisa comprar x borrachas, y lápis e z canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R\$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 2,00 pelo lápis e R\$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B

cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 1,00 pelo lápis e R\$ 4,00 pela caneta.

- a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.
 b) Levando em conta que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

Resolução

a) Na papelaria A, a compra de Pedro pode ser representada por:
 $1x + 2y + 3z = 23$

Já na papelaria B, a compra de Pedro pode ser representada por:
 $1x + 1y + 4z = 25$

Assim, temos o sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 23 \\ x + y + 4z = 25 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema em função da variável z (número de canetas), encontramos:

$$\begin{cases} x = 27 - 5z \\ y = z - 2 \end{cases}$$

b) De acordo com as restrições $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} 27 - 5z \geq 1 \\ z - 2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq z \leq 5,2$$

Porém, como $z \in \mathbb{Z}$, temos apenas as seguintes opções:

Para $z = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 27 - 5 \cdot 3 = 12 \\ y = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

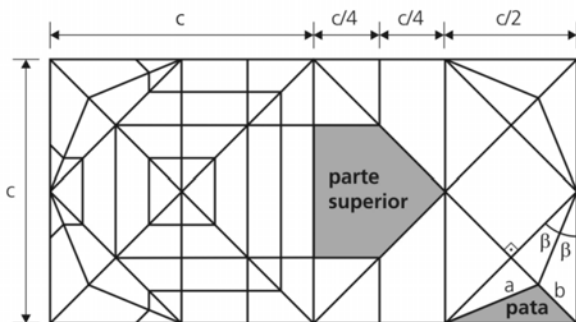
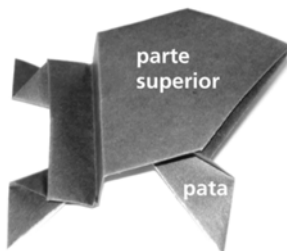
Para $z = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 27 - 5 \cdot 4 = 7 \\ y = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

Para $z = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 27 - 5 \cdot 5 = 2 \\ y = 5 - 2 = 3 \end{cases}$

Assim, as triplas ordenadas (x, y, z) que representam o número de lápis, borrachas e canetas que Pedro pode comprar nas condições apresentadas são $(12, 1, 3)$, $(7, 2, 4)$ e $(2, 3, 5)$.

QUESTÃO 09

A figura abaixo, à esquerda, mostra um sapo de origami, a arte japonesa das dobraduras de papel. A figura à direita mostra o diagrama usado para a confecção do sapo, na qual se utiliza um retângulo de papel com arestas iguais a c e $2c$. As linhas representam as dobras que devem ser feitas. As partes destacadas correspondem à parte superior e à pata direita do sapo, e são objeto das perguntas a seguir.



- a) Quais devem ser as dimensões, em centímetros, do retângulo de papel usado para confeccionar um sapo cuja parte superior tem área igual a 12 cm^2 ?
 b) Qual a razão entre os comprimentos das arestas a e b da pata direita do sapo?

Resolução

a) A figura que forma a parte superior do sapo é formada por um retângulo e por um triângulo, cujas dimensões são:

Retângulo: $\frac{c}{2} \times \frac{c}{4}$; Triângulo: base = $\frac{c}{2}$ e altura = $\frac{c}{4}$.

Logo, a área da figura será:

$$\text{Área do Retângulo} + \text{Área do Triângulo} = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4} = \frac{3c^2}{16}$$

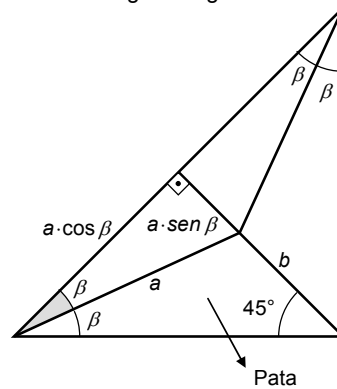
Como a área deve ser 12 cm^2 , então:

$$\frac{3c^2}{16} = 12 \Rightarrow c = \pm 8 \text{ cm}$$

A medida de c não pode ser negativa, pois estamos falando em medidas de um retângulo, então $c = 8$. Logo, as dimensões do papel são $8 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$.

b) SOLUÇÃO 1:

Observe a seguinte figura:



Note que

$$(a \cdot \text{sen} \beta + b) = a \cdot \text{cos} \beta$$

Logo:

$$\begin{aligned} b &= a(\text{cos} \beta - \text{sen} \beta) \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 &= a^2(\text{cos}^2 \beta - 2 \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{cos} \beta + \text{sen}^2 \beta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= 1 - 2 \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{cos} \beta = 1 - \text{sen} 2\beta \end{aligned}$$

Mas $2\beta = 45^\circ \Rightarrow \text{sen} 2\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e portanto

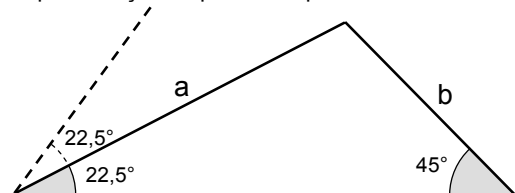
$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}}$$

Racionalizando, temos:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

SOLUÇÃO 2:

Observe a representação da pata do sapo:



Podemos aplicar uma lei dos senos no triângulo acima

$$\frac{a}{\text{sen} 45^\circ} = \frac{b}{\text{sen} 22,5^\circ}$$

$$\text{Mas } \text{cos} 45^\circ = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 22,5^\circ \Rightarrow \text{sen} 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \text{cos} 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

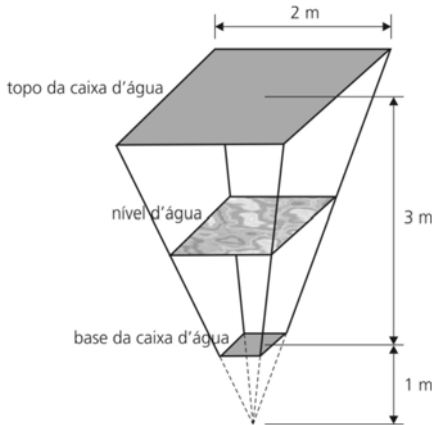
Logo,

$$\frac{a}{\text{sen} 45^\circ} = \frac{b}{\text{sen} 22,5^\circ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen} 45^\circ}{\text{sen} 22,5^\circ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

QUESTÃO 10

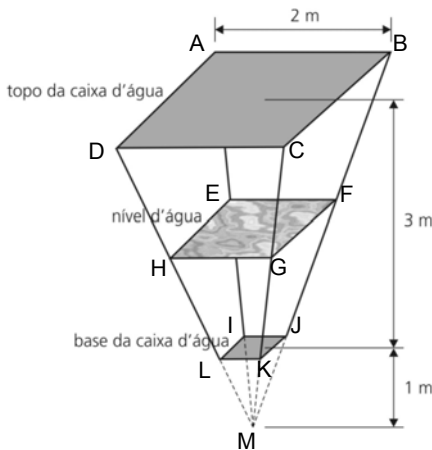
Uma caixa d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura abaixo, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.



- a) Qual o volume total da caixa d'água?
b) Se a caixa contém $(13/6) \text{ m}^3$ de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

Resolução

a) Observe a figura abaixo:



O volume da pirâmide ABCDM é dado por:

$$V_{ABCDM} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3} \text{ m}^3$$

Como as pirâmides ABCDM e IJKLM são semelhantes, temos:

$$\frac{V_{ABCDM}}{V_{IJKLM}} = \left(\frac{4}{1}\right)^3 \Rightarrow \frac{16}{3} = 64 \Rightarrow V_{IJKLM} = \frac{1}{12} \text{ m}^3$$

Logo, o volume total da caixa d'água, que vem a ser o volume do tronco de pirâmide ABCDIJKL, é dado por:

$$V_{TOTAL} = V_{ABCDIJKL} = \frac{16}{3} - \frac{1}{12} = \frac{63}{12} \Rightarrow V_{TOTAL} = \frac{21}{4} \text{ m}^3$$

b) O volume da pirâmide EFGHM é dado por:

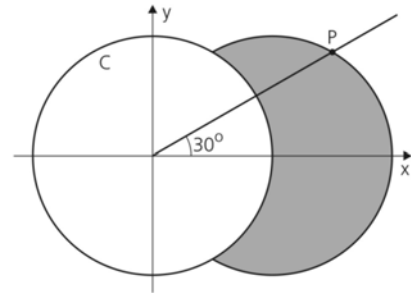
$$V_{EFGHM} = \frac{13}{6} + \frac{1}{12} = \frac{27}{12} \text{ m}^3$$

Seja h a altura da água em relação à base da caixa d'água. Como as pirâmides EFGHM e IJKLM são semelhantes, temos:

$$\frac{V_{EFGHM}}{V_{IJKLM}} = \left(\frac{h+1}{1}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{12} = (h+1)^3 \Rightarrow (h+1)^3 = 27 = 3^3 \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$

QUESTÃO 11

A circunferência de centro em $(2, 0)$ e tangente ao eixo y é interceptada pela circunferência C , definida pela equação $x^2 + y^2 = 4$, e pela semi-reta que parte da origem e faz ângulo de 30° com o eixo- x , conforme a figura abaixo.



- a) Determine as coordenadas do ponto P .
b) Calcule a área da região sombreada.

Resolução

a) A circunferência que contém o ponto P tem raio 2, pois ela é tangente ao eixo das ordenadas e tem centro em $(2, 0)$. Sua equação é dada por:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

A reta que passa pela origem $(0, 0)$ e tem uma inclinação de 30° é dada por:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

Como P pertence simultaneamente à circunferência e à reta, suas coordenadas são uma solução do seguinte sistema:

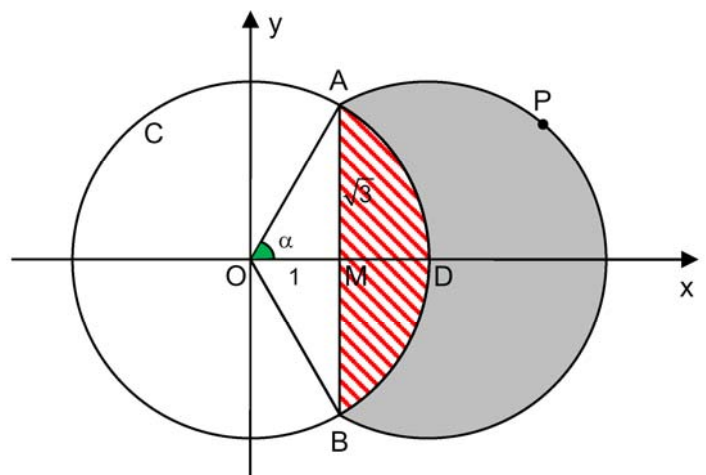
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, vem que:

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

Como o ponto P não é a origem, ficamos com $x = 3$ e, substituindo na equação da reta, temos: $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$. Logo, $P = (3, \sqrt{3})$.

b) Observe a figura abaixo:



O ponto M é médio do segmento \overline{OD} , de modo que $OM = 1$. Substituindo $x = 1$ na equação da circunferência C , temos:

$$1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Agora, no triângulo OAM, temos: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Consequentemente o ângulo \widehat{AOB} mede $2 \cdot \alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Inicialmente vamos calcular a área hachurada na figura (A_H), que corresponde à metade da intersecção entre os dois círculos:

$$A_H = \left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right) \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{OA \cdot OB \cdot \operatorname{sen}120^\circ}{2} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$A_H = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Assim, área sombreada A_S é dada por:

$$A_S = A_{\text{CIRCULO}} - 2 \cdot A_H = \pi \cdot 2^2 - 2 \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$A_S = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

QUESTÃO 12

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n tal que $a_n \neq 0$ e $a_j \in \mathbb{R}$ para qualquer j entre 0 e n . Seja

$g(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$ o polinômio de grau $n-1$ em que os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n são os mesmos empregados na definição de $f(x)$.

a) Supondo que $n=2$, mostre que $g\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, para

todo $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

b) Supondo que $n=3$ e que $a_3=1$, determine a expressão do polinômio $f(x)$, sabendo que $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$.

Resolução

a) Para $n=2$, temos:

$$\begin{cases} f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \\ g(x) = 2a_2 \cdot x + a_1 \end{cases}$$

Assim, para o polinômio $g(x)$, vem que:

$$g\left(x + \frac{h}{2}\right) = 2a_2 \cdot \left(x + \frac{h}{2}\right) + a_1 = 2a_2 \cdot x + a_2 \cdot h + a_1$$

Já para o polinômio $f(x)$, e sendo $h \neq 0$, temos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[a_2 \cdot (x+h)^2 + a_1 \cdot (x+h) + a_0] - [a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0]}{h} =$$

$$\frac{2a_2 \cdot x \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h}{h} = 2a_2 \cdot x + a_2 \cdot h + a_1$$

Assim, quando $n=2$, segue que $g\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, para

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall h \in \mathbb{R} - \{0\}$, como queríamos demonstrar.

b) Para $n=3$ e $a_3=1$, temos:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \\ g(x) = 3x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1 \end{cases}$$

Como $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$, segue que:

$$\begin{cases} 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0 \\ 3 \cdot 1^2 + 2a_2 \cdot 1 + a_1 = 0 \\ (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = -1 \\ 2a_2 + a_1 = -3 \\ a_2 - a_1 + a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = -1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Conseqüentemente, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

INGLÊS

QUESTÃO 13

As tirinhas abaixo são de autoria do cartunista norte-americano Glenn McCoy.



a) Para abordar as mulheres que aparecem nas tirinhas, o personagem faz uso de duas perguntas comumente utilizadas em situação semelhante. Que perguntas são essas?

b) O que cada uma das mulheres diz para indicar que não está disposta a interagir com ele?

Resolução

a) As perguntas são:

1ª - "Este assento está vazio?"

2ª - "Eu não te vi em algum lugar antes?"

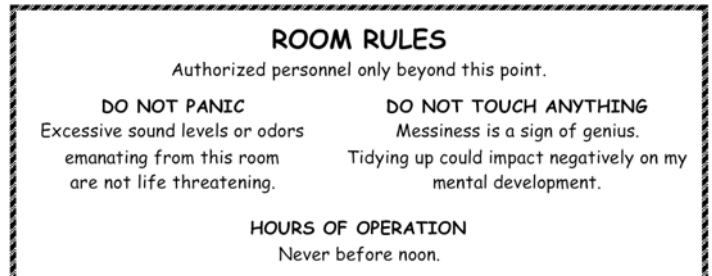
b) As respostas são:

1ª - "Sim.", "E este (dela) estará vazio também se você se sentar."

2ª - "Sim.", "Por isso que eu parei de ir lá."

QUESTÃO 14

O texto abaixo foi extraído de um pôster bem-humorado, afixado na porta do quarto de um adolescente.



a) Segundo o texto, o que não representa uma ameaça à vida?

b) Que efeito a arrumação do quarto provocaria no adolescente?

Resolução

a) A primeira regra do quadro (não entre em pânico) indica que os excessivos níveis de som e os odores emanados do quarto não representam uma ameaça à vida.

b) Já a segunda regra do quarto (não toque em nada) indica que a arrumação do quarto poderia ter um impacto negativo no desenvolvimento mental do adolescente.

QUESTÃO 15

ADVERTISING NOWADAYS

People are starting to blame invasive advertising for the stress in their lives. A few generations ago, people encountered only a few dozen ads in a typical day. Today, 3,000 marketing messages a day flow into the average North American brain. That's more than many of us can handle on top of all the other pressures of modern life. The fun image that advertising has traditionally enjoyed is now giving way to a much darker picture of advertising as mental pollution.

Adaptado de *Adbusters Magazine*, 30/07/2007, nº73, p.5.

a) Segundo o texto, a percepção que as pessoas têm da propaganda está mudando. Como a propaganda era vista antes e como ela está começando a ser vista hoje?

b) A que se refere o número 3.000 mencionado no texto?

Resolução

- a) Antigamente a propaganda era vista como algo divertido, engraçado. Hoje há uma visão muito mais sombria em relação à propaganda. Ela é vista como poluição mental, e fato causador de estresse devido à exposição constante a número elevado de anúncios à maneira invasiva como essas propagandas são feitas.
- b) O número está relacionado com o número de propagandas a que um norte americano médio está exposto por dia.

QUESTÃO 16

MYTHS AND FACTS ABOUT DRINKING	
MYTH Everyone reacts to alcohol in the same way.	FACT There are dozens of factors that affect a person's reaction to alcohol: body weight, metabolism, gender, etc.
MYTH Cold showers, fresh air or hot coffee help sober a person.	FACT Only time will remove alcohol from the system. As an old saying goes, "give a drunk a cup of coffee and all you will have is a wide-awake drunk".
MYTH Eating a big meal before you drink will keep you sober.	FACT Food in the stomach merely delays the absorption of alcohol into the bloodstream. A full stomach is not a defense against getting drunk.

Adaptado de www.alcoholism.about.com/od/about/a/aa040615.htm
Acessado em 25/07/2008

- a) Qual é o efeito do café em uma pessoa alcoolizada?
b) O que acontece quando uma pessoa come antes de ingerir bebidas alcoólicas?

Resolução

- a) De acordo com o texto, beber café não surte efeito em uma pessoa alcoolizada, apenas o tempo irá remover o álcool do organismo. Um ditado popular ainda menciona que o efeito do café em alguém alcoolizado é deixar um bêbado bastante "acordado".
- b) Quando a pessoa come antes de beber, ela terá apenas um retardo da absorção do álcool pelo sistema circulatório. Portanto estômago cheio não impede com que alguém se embriague.

QUESTÃO 17

Mobile phone users slow traffic down
By Brian Osborne
Sick of traffic congestion? Well, part of the blame needs to go to motorists who talk on mobile phones. At least, that is the conclusion of a study conducted by the University of Utah. The study found that if you use your mobile phone while driving, you are less likely to pass slower vehicles. If you think the study is not talking about you, because you have a hands-free device, then you are wrong. According to previous studies performed by psychology Professor Dave Strayer of the University of Utah, the ultimate distraction for drivers is the conversation – not just holding the mobile phone.

Adaptado de www.geek.com/mobile-phone-users-slow-traffic-down/
Acessado em 05/08/2008

- a) Por que motoristas que dirigem enquanto conversam ao celular retardam o fluxo do tráfego?
b) A que conclusão chegou o Professor Dave Strayer em suas pesquisas?

Resolução

- a) Porque, de acordo com a pesquisa relatada no texto, os motoristas que estão falando ao telefone têm menor propensão a ultrapassar os veículos mais lentos.
- b) De acordo com pesquisas do professor Dave Strayer, não é o fato de segurar o telefone que distrai os motoristas, e sim a conversa em si.

QUESTÃO 18

AT THE MARKET'S MARK

By Sonia Racy
The number of Brazilians living alone grows. IBGE – Brazilian Institute of Geography and Statistics – discovered, in its last survey, that 5 million Brazilians live alone. Of this total, 63% are senior citizens, but 22% are people in the 20 to 29 years old age range. It is a market that grows 6 to 7% a year and draws attention from different segments of the economy. After all, most of these consumers earn from 10 to 20 minimum wages and have college degrees.

Adaptado de TAM Magazine, ano 4, nº44, outubro de 2007, p.72.

- a) A que se refere o índice de 63% mencionado no texto?
b) O que caracteriza a maior parte dos consumidores brasileiros retratados no texto?

Resolução

- a) De acordo com o texto, 63% é a porcentagem de cidadãos que pertencem à faixa etária da terceira idade, em relação a todos os cidadãos brasileiros que moram sozinhos.
- b) As principais características da maioria deste grupo de consumidores são seus salários, que variam entre 10 e 20 salários mínimos e o fato de terem nível superior completo.

QUESTÃO 19

AUTISM AND ITS CAUSE

Some parents of children with autism believe that there is a link between measles, mumps, rubella (MMR) vaccine and this disorder. But there is no sensible reason to believe that any vaccine can cause autism. Typically, symptoms of this disorder are first noted by parents as their child begins to have difficulty with delays in speaking after age one. MMR vaccine is first given to children at 12-15 months of age. Since this is also an age when autism commonly becomes apparent, it is not surprising that autism follows MMR immunization in some cases. However, by far the most logical explanation is coincidence, not cause-and-effect.

Adaptado de www.quackwatch.com/03HealthPromotion/immu/autism.html
Acessado em 22/03/2008

- a) Qual seria, para alguns pais, a causa do autismo de seus filhos?
b) Por que esses pais teriam tal crença?

Resolução

- a) De acordo com o primeiro período do texto, alguns pais de crianças autistas acreditam que haja uma ligação entre a vacina tríplice viral e o autismo.
- b) Tal crença se faz presente pois, de acordo com o texto, a vacina em questão é aplicada por volta de um ano de idade (entre 12 e 15 meses de vida). Essa também é a época na qual surgem os primeiros sintomas de portadores de autismo. No entanto, o texto ainda explica que os dois fatos não estão de forma alguma ligados, tratando-se de uma coincidência e não de uma relação de causa e efeito.

QUESTÃO 20

WHY AM I UNEMPLOYED?

Persons who become unemployed often feel at fault; often feel that they have failed in some way. This is a common sense view, but there are many complicated reasons why somebody might be made redundant. The reasons for unemployment could be, for instance, technological changes: the introduction of new machines in the work market does take jobs away from people. Changes in government policies or lack of new requisite skills due to no access to education or retraining are also often responsible for unemployment. None of these has anything to do with individual worker. The fact is that one out of ten thousand might be made redundant because of laziness, but the rest are surplus because society has changed.

Adaptado de R. Osborne e B. Van Loon, *Introducing Sociology*. Londres: Icon Books, 2004, p.9-10.

- a) Qual é o argumento central desse texto?
b) Indique dois fatores que, segundo o texto, podem, de fato, responder à pergunta "Why am I unemployed?"

Resolução

- a) O argumento central do texto é de que há muitas razões complicadas pelas quais um indivíduo se torne desnecessário no mercado de trabalho.
- b) Segundo o texto, um fator que pode causar o desemprego de alguém é o desenvolvimento tecnológico, através da introdução de novas máquinas retirando o emprego de humanos. Outro fator citado são as mudanças nas políticas governamentais. Poderiam ainda ser citados a falta de treinamento ou estudo do profissional para assumir novas posições (com novas habilidades necessárias) e até mesmo, em pouquíssimos casos de acordo com o texto, a preguiça.

QUESTÃO 21

The Bermuda Triangle

The Bermuda Triangle is an area in the Atlantic Ocean bounded roughly at its points by Miami, Bermuda, and Puerto Rico. Legend has it that many ships and planes have mysteriously vanished in this area. But there are some skeptics who argue that the facts do not support the legend. The number of wrecks in this area is not extraordinary, given its size, location and the amount of traffic it receives. Many of the ships and planes that have been identified as having disappeared mysteriously in the Bermuda Triangle were not even in that area. The real mystery, they argue, is how the Bermuda Triangle became a mystery at all.

Adaptado de www.skeptic.com/bermuda.html
Acessado em 14/09/2008

a) Indique um dos fatos invocados por alguns céticos para negar que haja algo de misterioso nos acontecimentos associados ao Triângulo das Bermudas.

b) Segundo esses céticos, qual é o verdadeiro enigma envolvendo o Triângulo das Bermudas?

Resolução

a) Um dos fatores que pode ser citado é o fato de o número de acidentes da região não ser extraordinário, dada a extensa área em que o Triângulo das Bermudas é localizado, além do intenso tráfego que recebe. Também poderia ser citado que grande parte dos navios e aviões que supostamente desapareceram no Triângulo das Bermudas nem estavam naquela área.

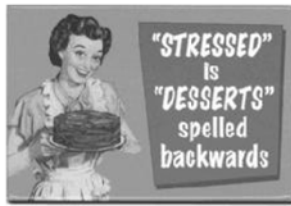
b) Como o número de acidentes da região é considerado normal e muitos dos acidentes creditados ao Triângulo das Bermudas não aconteceram naquela área, o verdadeiro enigma está em saber qual a razão pela qual o Triângulo das Bermudas tornou-se um local cheio de mitos envolvendo o desaparecimento de aviões e navios.

QUESTÃO 22

As imagens abaixo foram encontradas em ímãs para geladeiras vendidos nos Estados Unidos.



(1)



(2)

a) O que a mulher do primeiro ímã não consegue entender?

b) O texto do segundo ímã faz referência a uma tarefa doméstica. Que tarefa é essa e o que, na língua inglesa, possibilita que ela seja associada ao estresse?

Resolução

a) A mulher do primeiro ímã diz que entende o conceito de cozinhar e limpar, mas **não entende** como este conceito se aplica a ela. Considerando-se certa intenção de humor, pode-se dizer que ela não concorda com a ideia de ter de cozinhar e limpar.

b) A tarefa doméstica a que o segundo ímã se refere é a de cozinhar. O que nos permite chegar a esta associação é o fato de que a palavra "desserts", que quer dizer "sobremesas" mas representa o ato de cozinhar, ser, em inglês, um anagrama da palavra "stressed" que significa "estressado ou estressada."

QUESTÃO 23

Em 1931, William Faulkner escreveu *The Sound and the Fury*, um clássico da literatura norte-americana. O excerto abaixo é parte da introdução, escrita por Richard Hughes, à edição do romance publicada pela Penguin Books, em 1971.

THERE is a story told of a celebrated Russian dancer, who was asked by someone what she meant by a certain dance. She answered with some exasperation, "If I could say it in so many words, do you think I should take the very great trouble of dancing it?"

It is an important story, because it is the valid explanation of obscurity in art. A method involving apparent obscurity is surely justified when it is the clearest, the simplest method of saying in full what the writer has to say.

This is the case of *The Sound and the Fury*. I shall not attempt to give it a summary or an explanation of it: for if I could say in three pages what takes Mr. Faulkner three hundred there would obviously be no need for the book. All I propose to do is to offer a few introductory comments to encourage the reader.

a) Segundo Hughes, em que circunstâncias a suposta obscuridade de uma obra de arte se justifica?

b) Que razão apresenta Hughes para não resumir nem explicar *The Sound and The Fury*?

Resolução

a) Segundo Hughes, a obscuridade de uma obra de arte se justifica quando ela é a forma mais simples e mais clara de se dizer por completo o que o autor tem a dizer.

b) Hughes não tenta resumir ou explicar o livro, pois, se ele conseguisse dizer em três páginas o que o autor do livro disse em trezentas, segundo ele, não haveria necessidade da existência do livro, assim, Hughes tenta apenas encorajar o leitor à leitura do livro através de uma breve introdução.

QUESTÃO 24

Environment: the case of DDT and the Peregrine

The most reliable evidence of the damaging effect of organochlorine pesticides, such as DDT, on wildlife was demonstrated in 1967 by Dr. D. A. Ratcliffe of the Nature Conservancy in the United Kingdom. The peregrine falcon (*Falco peregrinus*) was protected in Britain after 1945 and showed a dramatic increase in numbers until, in the mid-1950s, the population went into a sharp decline. This proved to be due to reproductive failure: birds went laying eggs with abnormally thin shells and a large proportion of them were broken during incubation. High concentrations of DDT residues were found in peregrines and in the yolk of their eggs during the mid-1960s. There was no doubt that DDT was the cause of the population decline of these birds, and with the cessation of the use of DDT for agricultural purposes in Britain, peregrine numbers have increased to their former level.

Adaptado de R. B. Clark, *Marine Pollution*. Oxford: OUP, p. 142-143.

a) Que problemas começaram a ocorrer no processo de reprodução dos falcões peregrinos, levando ao decréscimo de sua população?

b) Que fatos levaram à conclusão, em meados da década de 60, de que o uso do pesticida DDT estava diretamente relacionado à diminuição do número de falcões peregrinos?

Resolução

a) Os pássaros começaram a botar ovos que possuíam cascas muito finas e que acabavam quebrando durante o processo de incubação.

b) Foram encontradas altas concentrações de DDT na gema dos ovos e nos falcões em meados da década de 60. Tal fato reforçou a teoria de que o DDT era responsável pelo declínio populacional dos falcões peregrinos.