Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

Aprovou!

ELITE Resolve

ITA

2015

matemática

www.elitecampinas.com.br
OS MELHORES GABARITOS DA INTERNET

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}}=\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira (s):
a) nenhuma.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas I e III.
e) I, II e III.

Resolução — Alternativa D

Julgando os itens:

I. CORRETO. Como essa é a definição de dízima periódica, temos que toda dízima periódica é um número racional.

II. INCORRETO. Manipulando o somatório:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots\right)$$

Veja que a soma acima representa uma soma de PG infinita de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Assim, podemos calcular:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots\right)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$.

III. CORRETO. Veja:

$$\ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)=\ln e^{\frac{2}{3}}+(\log_3 2)\cdot\left(\log_{2^2}3^2\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\ln e}_{=1}+(\log_3 2)\cdot\left(\frac{2}{2}\cdot\log_2 3\right)=\frac{2}{3}+(\log_3 2)\cdot(\log_2 3)$$

Mudando de base:

$$\log_2 3=\frac{\log_3 3}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_3 2}$$

Temos:

$$\frac{2}{3}+(\log_3 2)\cdot(\log_2 3)=\frac{2}{3}+(\log_3 2)\cdot\frac{1}{\log_3 2}=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

Dessa maneira, $\ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)=\frac{5}{3}$. Portanto, é um número racional.

QUESTÃO 02

Sejam *A, B* e *C* os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+2-3i\right|<\sqrt{19}\right\},$$

$$B=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+i\right|<7/2\right\}$$

$$C=\left\{z\in\mathbb{C}:z^2+6z+10=0\right\}.$$

Então $(A\setminus B)\cap C$ é o conjunto:

a) $\{-1-3i,-1+3i\}$
b) $\{-3-i,-3+i\}$
c) $\{-3+i\}$
d) $\{-3-i\}$
e) $\{-1+3i\}$

Resolução — Alternativa C

Seja $z=a+bi$, $z\in\mathbb{C}$. Inicialmente, determinemos os elementos de cada conjunto dado:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+2-3i\right|<\sqrt{19}\right\}$$

De acordo com a definição do conjunto A, temos:

$$\left|z+2-3i\right|=\left|a+bi+2-3i\right|=\left|(a+2)+(b-3)i\right|=$$

$$=\sqrt{(a+2)^2+(b-3)^2}<\sqrt{19}\Leftrightarrow(a+2)^2+(b-3)^2<19$$

Assim, os elementos de A são os pontos interiores à circunferência de centro $O_A(-2,3)$ e raio $R_A=\sqrt{19}$.

$$B=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+i\right|<7/2\right\}$$

Analogamente, os elementos de B serão:

$$\left|z+i\right|=\left|a+bi+i\right|=\left|a+(b+1)i\right|=\sqrt{a^2+(b+1)^2}<\frac{7}{2}\Leftrightarrow a^2+(b+1)^2<\frac{49}{4}$$

Ou seja, são os pontos interiores à circunferência de centro $O_B(0,-1)$ e raio $R_B=\frac{7}{2}$.

$$C=\left\{z\in\mathbb{C}:z^2+6z+10=0\right\}$$

Para determinarmos os elementos do conjunto C, resolvemos a seguinte equação do 2° grau:

$$z^2+6z+10=0\Leftrightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(1)\cdot(10)}}{2\cdot(1)}\Leftrightarrow z=\frac{-6\pm 2i}{2}=-3\pm i$$

Logo, $C=\{u,v\}=\{-3+i,-3-i\}$.

Dado que $A\setminus B=\{x\in A \text{ e } x\notin B\}$, temos que os elementos deste conjunto são os pontos interiores da circunferência do conjunto A que não estão no interior da circunferência B. Desta forma, os elementos do conjunto $(A\setminus B)\cap C$ são os números complexos no interior da circunferência do conjunto A cuja distância ao centro da circunferência do conjunto B é maior que a medida de R_B, assim:

$$d(u,O_A)=\sqrt{\left[-3-(-2)\right]^2+\left[1-3\right]^2}=\sqrt{5}<\sqrt{19}$$

Logo, o ponto u está no interior da circunferência determinada pelo conjunto A.

$$d(v,O_A)=\sqrt{\left[-3-(-2)\right]^2+\left[-1-3\right]^2}=\sqrt{17}<\sqrt{19}$$

Logo, o ponto v está no interior da circunferência determinada pelo conjunto A.

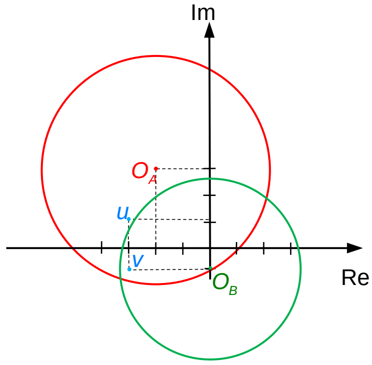
Calculemos, agora, as distâncias de u e v ao ponto O_B:

$$d(u,O_B)=\sqrt{\left[-3-0\right]^2+\left[1-(-1)\right]^2}=\sqrt{13}>\frac{7}{2}$$

$$d(v,O_B)=\sqrt{\left[-3-0\right]^2+\left[-1-(-1)\right]^2}=3<\frac{7}{2}$$

Portanto, o único elemento do conjunto $(A\setminus B)\cap C$ é o complexo $-3+i$, isto é, $\boxed{(A\setminus B)\cap C=\{-3+i\}}$.

Abaixo, segue a ilustração



QUESTÃO 03

Se $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor $2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z))+5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z))$ é igual a:

a) $-\frac{2\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{4\pi}{3}$

e) $\frac{5\pi}{3}$

Resolução — Alternativa D

Manipulando a expressão $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$:

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Transformando para a forma trigonométrica, sabemos que:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Assim, desenvolvendo o número complexo z:

$$z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}\Leftrightarrow z=\left[\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

Lembrando que:

$$z=|z|\cdot\operatorname{cis}\alpha\Rightarrow z^n=|z|^n\cdot\operatorname{cis}(n\cdot\alpha)\text{, com } n\in\mathbb{N}$$

Voltando:

$$z=\left[\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}\Rightarrow z=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 10\right)\Rightarrow z=\operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Dessa maneira, a forma algébrica de z é dada por:

$$z=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Antes de calcularmos a expressão $2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z))+5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z))$, lembramos que a imagem da função arcsen x é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e da função arctg x é $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Assim:

$$2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z))+5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z))=2\cdot\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)+5\cdot\operatorname{arctg}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+5\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

Portanto, $2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z))+5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z))=\boxed{\frac{4\pi}{3}}$.

QUESTÃO 04

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r:3x+4y-4=0$ e $s:3x+4y-19=0$. A área do círculo determinado por C é igual a:

a) $\frac{5\pi}{7}$

b) $\frac{4\pi}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{8\pi}{3}$

e) $\frac{9\pi}{4}$

Resolução — Alternativa E

Observe que ambas as retas são paralelas, assim a distância entre as retas será igual ao diâmetro da circunferência. Escrevendo as equações das retas nas formas

$$ax+by+c=0 \quad\text{e}\quad ax+by+c'=0$$

a distância entre as retas será:

$$d(\mathrm{r,s})=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow d(\mathrm{r,s})=\frac{|-4+19|}{\sqrt{3^2+4^2}}\Rightarrow d(\mathrm{r,s})=3$$

E a área do círculo, portanto, será:

$$A=\pi R^2=\pi\left(\frac{d(r,s)}{2}\right)^2\Rightarrow A=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow\boxed{A=\frac{9\pi}{4}}$$

QUESTÃO 05

Seja $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1=1$, $a_2=1$ e $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ para $n\geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p,a_{p+1},a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n, é par.

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

Resolução — Alternativa D

Primeiro observemos que essa se trata da famosa sequência de Fibonacci, onde a partir dos primeiros termos formamos o próximo por somar seu dois termos antecessores.

I – FALSA. Para averiguar isso, vamos escrever os primeiros termos as sequência e checar sua paridade:

$$\text{Sequência}=1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots$$
$$\text{Paridades}=i,i,p,i,i,p,i,i,p,i,i,p,\ldots$$

Então 3 números consecutivos da sequência sempre tem necessariamente 2 números impares e 1 número par. Agora três números a,b,c em progressão geométrica devem satisfazer necessariamente a propriedade da média geométrica, que diz que:

$$b^2=ac$$

Se esses são termos consecutivos da sequência de Fibonacci, temos duas possibilidades:

- b é o valor par, mas então a e c são ímpares e portanto ac é ímpar. ABSURDO.
- a ou c é o valor par, mas então ac é par e b^2 é ímpar. ABSURDO.

Assim é impossível que esses valores formem uma progressão geométrica.

II – VERDADEIRA.
Basta calcular os termos até o sétimo.

$$a_1=1$$
$$a_2=1$$
$$a_3=1+1=2$$
$$a_4=2+1=3$$
$$a_5=3+2=5$$
$$a_6=5+3=8$$
$$a_7=8+5=13$$

Então $a_7=13$, ou seja, um número primo.

III – VERDADEIRA. Basta lembrar da sequência de paridades

$$\text{Paridades}=i,i,p,i,i,p,i,i,p,i,i,p,\ldots$$

Assim fica claro que para todo n múltiplo de 3, o valor a_n é par.

QUESTÃO 06

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-1/2}=5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a=1$ e $b=2$, então $x=0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq-1$ e $x\neq1$.

III. $x=\frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeiras(s):

a) apenas II. **b)** apenas I e II. **c)** apenas I e III.
d) apenas II e III. **e)** I, II e III.

Resolução — Alternativa E

(I) Correta. Considerando $x\neq1/2$, $x\neq-1$ e $x\neq1$, para $a=1$ e $b=2$, a equação fica:

$$\frac{1}{1-x^2}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}=5\Leftrightarrow\frac{1}{1-x^2}=\frac{2\cdot2}{2x-1}+5\Leftrightarrow\frac{1}{1-x^2}=\frac{4+5\cdot(2x-1)}{2x-1}\Leftrightarrow$$

$$2x-1=(1-x^2)\cdot(10x-1)\Leftrightarrow10x^3-x^2-8x=0\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(10x^2-x-8)=0\Leftrightarrow x=0\text{ ou }x=\frac{1\pm\sqrt{321}}{20}$$

Portanto, de fato $x=0$ é uma solução da equação.

(II) Correta. De fato, como condição de existência para a equação, as frações não podem ter denominador nulo. Assim:

$$\begin{cases}1-x^2\neq0\\ x-\frac{1}{2}\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\ x\neq-1\\ x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$

(II) Correta. Suponha que $x=\frac{2}{3}$ fosse solução da equação. Teríamos então:

$$\frac{a}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5\Leftrightarrow\frac{a}{\frac{5}{9}}-\frac{b}{\frac{1}{6}}=5\Leftrightarrow$$

$$9a-30b=25\Leftrightarrow3\cdot(3a-10b)=25$$

Se a e b fossem números inteiros, teríamos uma igualdade entre números inteiros em que o lado esquerdo é múltiplo de 3, porém o lado direito não, o que é um absurdo.

QUESTÃO 07

Considere o polinômio p dado por $p(x)=2x^3+ax^2+bx-16$ com a, $b\in\mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b-a$ é igual a:

a) –36.
b) –12.
c) 6
d) 12.
e) 24.

Resolução — Alternativa B

Sabendo que 2 é raiz de p(x), temos:

$$p(2)=0\Rightarrow2\cdot2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-16=0\Rightarrow2a+b=0$$

Agora, para manipularmos as outras duas raízes desconhecidas de p(x), temos dois casos:

1º caso: 2 é raiz dupla de p(x).

Se 2 for raiz dupla de p(x), então r é a raiz faltante. Assim, pelas Relações de Girard:

$$2\cdot2\cdot r=-\frac{(-16)}{2}\Rightarrow r=2$$

Dessa maneira, 2 se torna raiz tripla do polinômio, o que torna o enunciado falso. Portanto, 2 não é raiz dupla.

2º caso: 2 não é raiz dupla de p(x).

Como 2 não é raiz dupla, então tomemos a raiz dupla r. Novamente, pelas Relações de Girard:

$$2\cdot r\cdot r=-\frac{(-16)}{2}\Rightarrow r^2=4\Rightarrow r=\pm2$$

Veja que $r=2$ não convém pelo argumento acima, então temos que $r=-2$ é a raiz que procuramos.

Aplicando a soma das raízes:

$$2+(-2)+(-2)=-\frac{a}{2}\Rightarrow a=4$$

Sabendo que $2a+b=0$, temos:

$$b=-2a\Rightarrow b=-2\cdot4\Rightarrow b=-8$$

Portanto,

$$b-a=-8-4\Rightarrow\boxed{b-a=-12}.$$

QUESTÃO 08

Seja p o polinômio dado por $p(x)=\sum_{j=0}^{15}a_jx^j$, com $a_j\in\mathbb{R}$, $j=0,1,\ldots,15$, e $a_{15}\neq0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2)=1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x)=x^3-2x^2+x-2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{5}$

Resolução — Alternativa B

O polinômio q pode ser reescrito, na forma fatorada, como:

$$q(x)=x^3-2x^2+x-2=x^2\cdot(x-2)+1\cdot(x-2)\Leftrightarrow$$

$$q(x)=(x^2+1)\cdot(x-2)$$

Como o polinômio q tem grau 3, então o resto r da divisão será da forma:

$$r(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

Logo, sendo t o quociente dessa divisão, temos que:

$$p(x)=q(x)\cdot t(x)+r(x)=(x^2+1)\cdot(x-2)\cdot t(x)+a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

Como p tem coeficientes reais e i é raiz de p, então pelo teorema das raízes conjugadas, $-i$ também deve ser raiz de i. Assim, temos que:

$$\begin{cases}p(i)=0\\ p(-i)=0\\ p(2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(i^2+1)\cdot(i-2)\cdot t(i)+a\cdot i^2+b\cdot i+c=0\\ ((-i)^2+1)\cdot(-i-2)\cdot t(-i)+a\cdot(-i)^2+b\cdot(-i)+c=0\Leftrightarrow\\ (2^2+1)\cdot(2-2)\cdot t(2)+a\cdot2^2+b\cdot2+c=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}p(i)=0\\ p(-i)=0\\ p(2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b\cdot i+c=0\\ -a-b\cdot i+c=0\\ 4a+b\cdot2+c=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

Somando e subtraindo as duas primeiras equações entre si, vem que:

$$\begin{cases}c=a\\ b=0\\ 4a+b\cdot2+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\ b=0\\ c=\frac{1}{5}\end{cases}$$

Portanto:

$$\boxed{r(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}}$$

QUESTÃO 09

Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}, 2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

a) $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

b) $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

c) $\text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\text{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)$

e) $\text{arctg}\left(\frac{4}{5}\right)$

Resolução — Alternativa C

Inicialmente, devemos analisar as possibilidades de se formar um triângulo retângulo de lados $\sqrt{a}, 2\sqrt{a}$ e a. Lembrando que a hipotenusa de um triângulo retângulo é o lado de maior medida, podemos dizer que o lado que mede $\sqrt{a}$ não poderá ser hipotenusa já que,

$$2\sqrt{a} > \sqrt{a}\text{ , para qualquer } a \text{ real positivo.}$$

Deste modo, basta que analisemos dois casos, que são listados abaixo:

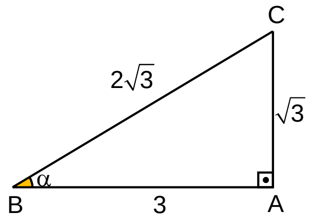
1º caso: $2\sqrt{a}$ é a medida do maior lado e, portanto, hipotenusa. Sendo assim, pela relação de Pitágoras, segue:

$$\left(2\sqrt{a}\right)^2 = a^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2$$

Como a deve ser um real positivo, pois representa a medida de um lado do triângulo, então:

$$4a = a^2 + a \Rightarrow a^2 = 3a \Rightarrow a = 3$$

Logo, o triângulo retângulo será o da ilustração abaixo:



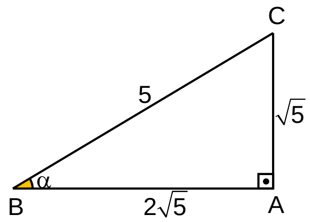
2º caso: a é a medida do maior lado e, portanto, hipotenusa. Sendo assim, pela relação de Pitágoras, segue:

$$a^2 = \left(2\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2$$

Como a deve ser um real positivo, pois representa a medida de um lado do triângulo, então:

$$a^2 = \left(2\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 4a + a \Rightarrow a^2 = 5a \Rightarrow a = 5$$

Logo, o triângulo retângulo será o da ilustração abaixo:



Sendo assim, o triângulo formado no segundo caso é o que apresenta maior hipotenusa dentre as duas situações. Além disso, como o menor ângulo é oposto ao menor lado, então α representa o menor ângulo. Logo,

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

QUESTÃO 10

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\,\text{sen}(x) - \cos(x) = 1$

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

b) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

c) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

Resolução — Alternativa A

Reescrevendo a equação do enunciado, temos:

$$2\,\text{sen}(x) - \cos(x) = 1 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}(x) = 1 + \cos(x)$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, segue que:

$$[2\,\text{sen}(x)]^2 = [1 + \cos(x)]^2 \Rightarrow 4\,\text{sen}^2(x) = 1 + 2\cos(x) + \cos^2(x) \Rightarrow$$
$$4\cdot\left(1 - \cos^2(x)\right) = 1 + 2\cos(x) + \cos^2(x) \Rightarrow 5\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$$

Logo,

$$\cos(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 5\cdot(-3)}}{2\cdot 5} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{-2 \pm 8}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Portanto, respeitando $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$$\cos(x) = -1 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$$

$$\cos(x) = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \boxed{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)}$$

QUESTÃO 11

Sejam α e β números reais tais que α, β $\alpha + \beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) 0.

Resolução — Alternativa B

Fazemos um troca de variável para cada equação:

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\alpha}{2} = x \\ \cos^2\frac{\beta}{3} = y \end{cases}$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \\ \cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5} \\ y = \frac{4}{7}y^2 + \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}x^2 - x + \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{4}{7}y^2 - y + \frac{3}{7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{4} \\ y=1 \text{ ou } y=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{\alpha}{2}=1 \text{ ou } \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4} \\ \cos^2\frac{\beta}{3}=1 \text{ ou } \cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Para o ângulo α, usando a relação do arco duplo

$$\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

temos que:

$$\cos\alpha = 2\cdot 1-1=1 \text{ ou } \cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$$

Estando α no intervalo $]0,2\pi[$, descartamos a possibilidade $\cos\alpha=1$ e ficamos com:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

Já para o ângulo β, temos que:

$$0<\beta<2\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\beta}{3}<\frac{2\pi}{3}$$

Nesse intervalo, o cosseno tem a limitação:

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\beta}{3}<1$$

Assim, das possibilidades

$$\cos^2\frac{\beta}{3}=1 \text{ ou } \cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{\beta}{3}=\pm 1 \text{ ou } \cos\frac{\beta}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

a única que convém é $\cos\frac{\beta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo:

$$\frac{\beta}{3}=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}$$

Portanto, os pares ordenados (α,β) que satisfazem a todas as restrições são

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right) \text{ ou } (\alpha,\beta)=\left(\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),$$

de modo que:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o menor valor de $\cos(\alpha+\beta)$ é:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

QUESTÃO 12

Seja $A=(a_{ij})_{5\times 5}$ a matriz tal que $a_{ij}=2^{i-1}(2j-1)$, $1\le i,j\le 5$.

Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. tr A é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) I, II e III.

Resolução — Alternativa E

A matriz A é dada por:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 72 \\ 16 & 48 & 80 & 112 & 144 \end{bmatrix}$$

Julgando cada afirmação:

(I) Correta. De fato, temos ao longo de cada linha progressões aritméticas, cujas razões são 2 (1ª linha), 4 (2ª linha), 8 (3ª linha), 16 (4 ª linha) e 32 (5 ª linha):

(II) Correta. De fato, temos ao longo de cada coluna progressões geométricas de razão 2.

(III) Correta. O traço da matriz A é dado por:

$$\text{tr}\,A=1+6+20+56+144=227,$$

que é um número primo.

QUESTÃO 13

Considere a matriz $M=(m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij}=j-i+1$, $i,j=1,2$.

Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=252,$$

então o valor de n é igual a

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

Resolução — Alternativa C

Temos:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$M^2=M\cdot M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4=M^3\cdot M=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por indução, teríamos que:

$$M^k=\begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma das potências de M é dada por:

$$\sum_{k=1}^{n} M^k=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & S_n \\ 0 & n \end{bmatrix},$$

onde S_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de primeiro termo 2 e razão 2. Tal soma é dada por:

$$S_n=\frac{(2+2n)\cdot n}{2}=n^2+n,$$

de modo que:

$$\sum_{k=1}^{n} M^k=\begin{bmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & n^2+n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

Segue que:

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}0 & n^2+n\\ -n & 0\end{vmatrix} = 252 \Leftrightarrow$$

$$n^3 + n^2 = 252 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - 252 = 0$$

Por pesquisa de raízes racionais, descobrimos que 6 é raiz desse polinômio. Assim, pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

6	1	1	0	−252
	1	7	42	0

Logo:

$$n^3 + n^2 - 252 = 0 \Leftrightarrow (n-6)\cdot(n^2+7n+42) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = 6 \text{ ou } n^2 + 7n + 42 = 0$$

Como a equação $n^2 + 7n + 42 = 0$ não tem raízes reais, pois seu discriminante é:

$$7^2 - 4\cdot 1\cdot 42 = -119 < 0\,,$$

ficamos com $\boxed{n = 6}$.

QUESTÃO 14

Considere os pontos $A = (0,-1)$, $B = (0,5)$ e a reta $r: 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A,r) = d(B,r)$.
II. B é simétrico de A em relação à reta r.
III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3},2)$ ou $C = (3\sqrt{3},2)$

É (são) verdadeira(s) apenas:
a).I.
b).II.
c).I e II.
d).I e III.
e).II e III.

Resolução — Alternativa D

I – VERDADEIRA.

Lembrando que a fórmula da distância do ponto (x_0, y_0) a reta $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Então

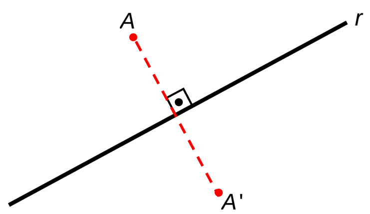
$$d(A,r) = \frac{|2\cdot 0 - 3\cdot(-1) + 6|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$d(\text{B},r) = \frac{|2\cdot 0 - 3\cdot(5) + 6|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

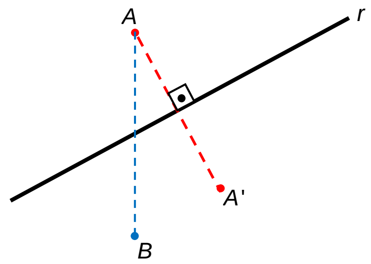
Portanto, as distâncias são iguais.

II – FALSA.

Para um ponto ser simétrico a outro em relação a uma reta, devemos ter que o segmento $\overline{AB}$ deve ser perpendicular à reta além dos pontos equidistarem da mesma:



No entanto, nossos pontos são alinhados verticalmente e nossa reta não é horizontal:



Ou seja, B não é o simétrico de A em relação a reta *r*.

III – VERDADEIRA.

Basta averiguar que para os pontos dados, o triângulo é equilátero. Pelo enunciado $d(A,B) = \sqrt{0^2+6^2} = 6$. Então

$$d(C,A) = \sqrt{\left(\pm 3\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(2-(-1)\right)^2} = \sqrt{27+9} = 6$$

$$d(C,B) = \sqrt{\left(\pm 3\sqrt{3} - 0\right)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{27+9} = 6$$

Então como $d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = 6$, a afirmação é verdadeira.

QUESTÃO 15

Dados o ponto $A = \left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triangulo de vértices *ABC*, cuja base $\overline{BC}$ esta contida em *r* e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triangulo são, respectivamente, iguais a

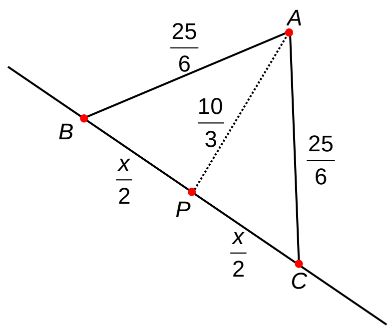
a) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
b) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
c) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$.
d) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$.
e) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

Resolução — Alternativa E

Primeiramente vamos calcular a distância do ponto A até a reta, que corresponde a altura relativa a base BC do triângulo.

$$d = \frac{\left|3\cdot 4 + 4\cdot\frac{25}{6} - 12\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{3}$$

Então temos o seguinte esboço



Então podemos descobrir o valor de x aplicando Pitágoras no triângulo ΔABP:

$$\left(\frac{25}{6}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Agora podemos calcular todos os valores pedidos.

$$\text{Perímetro} = \frac{25}{6} + \frac{25}{6} + 5 = \frac{40}{3} \text{ .e } \text{Área} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{10}{3} = \frac{25}{3}.$$

QUESTÃO 16

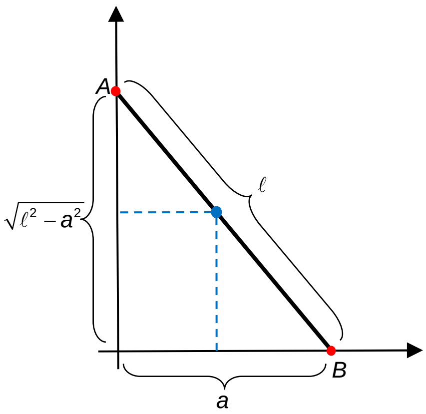
Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento ℓ fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
II. O lugar geométrico dos pontos *(x,y)* tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$
III. Os pontos (2,3), (4, -1) e (3,1) pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)
a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas III
d) I e II
e) I e III.

Resolução — Alternativa A

I. VERDADEIRA.
Precisamos construir uma equação paramétrica para descrever as coordenadas do nosso ponto. Vamos considerar uma situação no primeiro quadrante, pois, por simetria, isso se refletirá nos outros quadrantes. O nosso parâmetro a será a distância do vértice B até a origem. Observe o esboço abaixo:



Então, as coordenas do ponto médio, serão iguais à metade de cada cateto do nosso triângulo. Sendo assim, temos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{\ell^2 - a^2}}{2} \end{cases}$$

Para retirar da forma paramétrica elevamos ao quadrado as equações:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2}{4} \\ y^2 = \dfrac{\ell^2 - a^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{4}$$

Que é a equação de uma circunferência.

II. FALSA.

Observe que podemos colocar x em evidencia na equação:

$$6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x\left(6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y\right) = 0$$

Então $x = 0$ é um objeto que satisfaz a equação, mas este corresponde ao eixo y, que contém infinitos pontos.

III. FALSA.

Observe que quaisquer 3 pontos não alinhados definem uma circunferência. Basta então, que testemos o alinhamento dos pontos. Fazemos isso através do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 + 4 + 3 - 12 - 2 = 0$$

Então, os pontos estão alinhados e não definem circunferência.

QUESTÃO 17

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é:

a) $\dfrac{21}{8}$
b) $\dfrac{27}{8}$
c) $\dfrac{35}{8}$
d) $\dfrac{37}{8}$
e) $\dfrac{45}{8}$

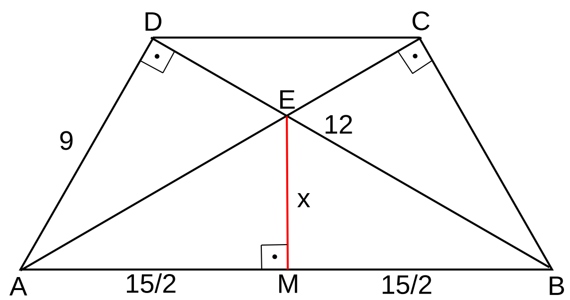
Resolução — Alternativa E

No triângulo retângulo ABD determinamos a medida do segmento $\overline{BD}$ utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$15^2 = 9^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = 12$$

Seja M a projeção ortogonal do ponto E, encontro das diagonais, sobre o lado $\overline{AB}$ do trapézio isósceles.
Desta forma, desejamos determinar a medida do segmento $\overline{EM} = x$.
Note que M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, assim $\overline{AM} = \overline{MB} = \dfrac{15}{2}$.
Observe, ainda, que o triângulo ABD é semelhante ao triângulo EBM, ou seja, $\Delta ABD \sim \Delta EBM$; caso ângulo-ângulo, então:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{15/2}{12} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{45}{8}}$$



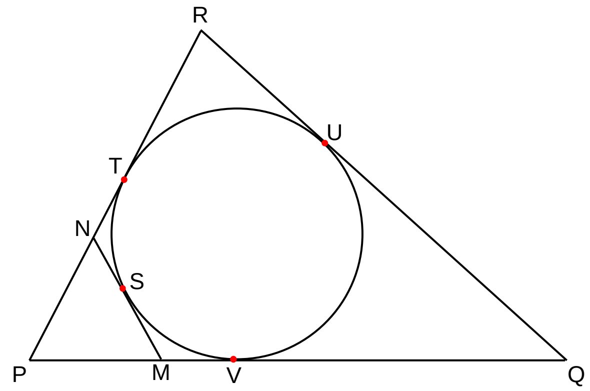
QUESTÃO 18

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a:

a) 5.
b) 6.
c) 8.
d) 10.
e) 15.

Resolução **Alternativa A**

Denotemos por S, T, U e V os pontos de tangência dos segmentos $\overline{MN}$, $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$ e $\overline{PQ}$ a circunferência inscrita no triangulo PQR.



Assim, $\overline{RU}=\overline{RT}$, $\overline{QU}=\overline{QV}$ e, como $\overline{RQ}=10$ temos que $\overline{RU}+\overline{RT}+\overline{QU}+\overline{QV}=20$. Desta forma, como o perímetro do triângulo PQR é 25, $\overline{PT}+\overline{PV}=5$, isto é

$$\overline{PT}+\overline{PV}=\left(\overline{PM}+\overline{MV}\right)+\left(\overline{PN}+\overline{NT}\right)=5 \qquad \text{Eq.}(*)$$

Temos ainda que $\overline{MS}=\overline{MV}$, $\overline{NS}=\overline{NT}$ e, substituindo estas duas últimas igualdades na equação $(*)$ obtemos o perímetro do triângulo PMN:

$$\left(\overline{PM}+\overline{MV}\right)+\left(\overline{PN}+\overline{NT}\right)=\left(\overline{PM}+\overline{MS}\right)+\left(\overline{PN}+\overline{NS}\right)=\boxed{5}$$

QUESTÃO 19

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r: x-y=0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O=(0,0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a.

a) $\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)$ e $2\sqrt{2}-2$

b) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$

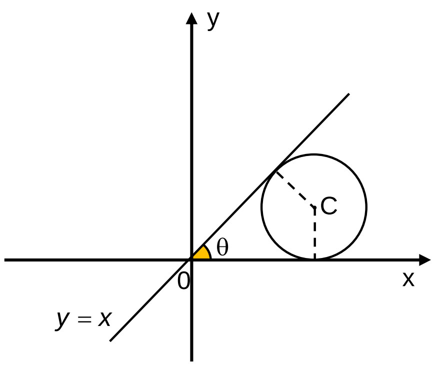
c) $\left(2, \sqrt{2}-1\right)$ e $\sqrt{2}-1$

d) $\left(2, 2-\sqrt{2}\right)$ e $2-\sqrt{2}$

e) $\left(2, 4\sqrt{2}-4\right)$ e $4\sqrt{2}-4$

Resolução **Alternativa A**

Segue abaixo a ilustração que descreve a situação do enunciado.



Podemos notar que:

$$\operatorname{tg}(\theta)=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

Além disso, as coordenadas de C são tais que:

$$C=\left(x_c, r\right)$$

Como a potência da origem em relação à circunferência é igual a 4, então:

$$\left(x_c\right)^2=4 \Rightarrow x_c=\pm 2$$

Como a circunferência está no primeiro quadrante, então $\boxed{x_c=2}$.

Podemos notar, também, que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{r}{x_C} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{r}{2} \Leftrightarrow r=2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow r=2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Mas,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\left|2-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$$

Logo,

$$r=2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow r=2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow \boxed{r=2\sqrt{2}-2}$$

Portanto,

$$\boxed{C=\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)} \text{ e } \boxed{r=2\sqrt{2}-2}$$

QUESTÃO 20

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de:

a) $\sqrt[3]{2}-h$

b) $\sqrt[3]{2}-1$

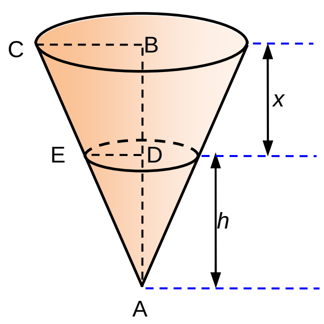
c) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)h$

d) h

e) $\frac{h}{2}$

Resolução **Alternativa C**

Abaixo temos uma representação da taça com a distância h da superfície do líquido até o vértice e o quanto a superfície do líquido subirá (x) após adicionar mais líquido.



O volume de líquido na situação final será o dobro que na situação inicial, então:

$$V_{\text{final}}=2\cdot V_{\text{inicial}}$$

Sabendo que os sólidos são semelhantes, é válida a seguinte relação:

$$\frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{inicial}}}=\left(\frac{h+x}{h}\right)^3 \Rightarrow 2=\left(\frac{h+x}{h}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2}=\frac{h+x}{h} \Rightarrow$$

$$h\cdot\sqrt[3]{2}-h=x \Rightarrow \boxed{x=h\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}$$

QUESTÃO 21

Considere as funções $f_1, f_2, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x+1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.

b) O menor valor assumido pela função *f*.

c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Resolução

a) Temos que:

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x+1| \Leftrightarrow |x| + 6 = 3|x+1|$$

Consideramos três casos para a abertura dos módulos:

- Para $x < -1$:

$$-x + 6 = -3\cdot(x+1) \Leftrightarrow 2x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$$

Esse valor convém, pois satisfaz a restrição $x < -1$.

- Para $-1 \le x < 0$:

$$-x + 6 = 3\cdot(x+1) \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Esse valor **não convém**, pois não satisfaz a restrição $-1 \le x < 0$.

- Para $x \ge 0$:

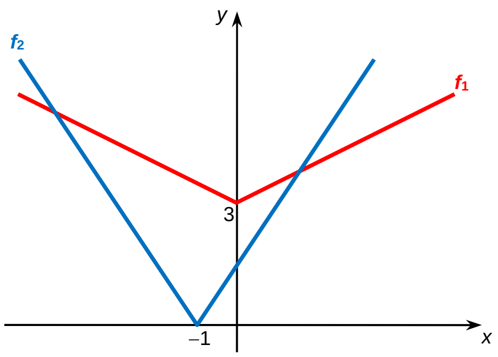
$$x + 6 = 3\cdot(x+1) \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Esse valor convém, pois satisfaz a restrição $x \ge 0$.

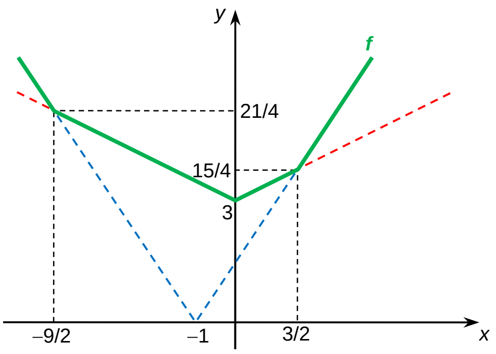
Em suma, os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$ são:

$$\boxed{x = -\frac{9}{2}} \text{ ou } \boxed{x = \frac{3}{2}}.$$

b) Os gráficos das funções f_1 e f_2 estão esboçados a seguir:



Como $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), f_2(x)\}$, isto é, a função associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o maior dos valores entre as imagens $f_1(x)$ e $f_2(x)$, o gráfico de *f* será:



Pelo gráfico, observamos que o menor valor que a função assume é:

$$\boxed{y_{MÍN} = 3}$$

c) Observe pelo gráfico que:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ se } -\frac{9}{2} \le x < \frac{3}{2} \\ f_2(x), \text{ se } x < -\frac{9}{2} \text{ ou } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, a equação $f(x) = 5$ fica reescrita como:

(I) Para $-\frac{9}{2} \le x < \frac{3}{2}$:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow f_1(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x| + 3 = 5 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow$$

$$x = -4 \text{ (satifaz a restrição) ou } \cancel{x=4} \text{ (não satifaz a restrição)}$$

(II) Para $x < -\frac{9}{2}$ ou $x \ge \frac{3}{2}$:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow f_2(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}|x+1| = 5 \Leftrightarrow |x+1| = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = -1 \pm \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{7}{3} \text{ (satifaz a restrição) ou } \cancel{x = -\frac{13}{3}} \text{ (não satifaz a restrição)}$$

Assim, a equação $f(x) = 5$ tem como conjunto verdade:

$$\boxed{V = \left\{-4, \frac{7}{3}\right\}}$$

QUESTÃO 22

Considere o polinômio *p* dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$ em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que *p* tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio *p*.

Resolução

a) Como $p(z)$ é um polinômio de coeficientes reais e com raiz complexa *w* (com parte imaginária diferente de zero), temos que $\overline{w}$ também será raiz. Portanto, as raízes de *p* são *w*, $\overline{w}$ e *r*, com $r \in \mathbb{R}$.

Podemos escrever:

$$w = a + bi \text{ e } \overline{w} = a - bi.$$

Utilizando as relações entre as raízes (Girard), segue:

$$\begin{cases} w + \overline{w} + r = -\frac{\beta}{18} \\ w\cdot\overline{w} + \overline{w}\cdot r + w\cdot r = -\frac{7}{18} \\ w\cdot\overline{w}\cdot r = \frac{\beta}{18} \end{cases}$$

Veja que $|w| = 1$. Assim, temos que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Lembrando que $w\cdot\overline{w} = |w|^2$, podemos manipular o sistema acima:

$$\begin{cases} a + bi + a - bi + r = -\frac{\beta}{18} \\ \overbrace{w\cdot\overline{w}}^{=1} + (a - bi)\cdot r + \cdot(a + bi)r = -\frac{7}{18} \\ \underbrace{w\cdot\overline{w}}_{=1}\cdot r = \frac{\beta}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + r = -\frac{\beta}{18} \\ 1 + 2ar = -\frac{7}{18} \\ r = \frac{\beta}{18} \end{cases}$$

Isolando a em função de β:

$$2a + r = -\frac{\beta}{18} \Rightarrow 2a = -\frac{\beta}{18} - \frac{\beta}{18} \Rightarrow a = -\frac{\beta}{18}$$

Substituindo na segunda equação:

$$1+2ar=-\frac{7}{18}\Rightarrow 1+2\cdot\left(-\frac{\beta}{18}\right)\cdot\frac{\beta}{18}=-\frac{7}{18}\Rightarrow\beta^2=225\Rightarrow\beta=\pm 15$$

Portanto, $\boxed{\beta=15}$ ou $\boxed{\beta=-15}$.

b) Tomando $\beta=15$:

$$\begin{cases} r=\frac{\beta}{18}\\ a=-\frac{\beta}{18}\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=\frac{15}{18}\\ a=-\frac{15}{18}\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=\frac{5}{6}\\ a=-\frac{5}{6}\\ b=\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\end{cases}$$

Portanto, as raízes são $\boxed{\left\{\frac{5}{6},\frac{-5+\sqrt{11}i}{6},\frac{-5-\sqrt{11}i}{6}\right\}}$.

Agora, para $\beta=-15$:

$$\begin{cases} r=\frac{\beta}{18}\\ a=-\frac{\beta}{18}\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=\frac{(-15)}{18}\\ a=-\frac{(-15)}{18}\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=-\frac{5}{6}\\ a=\frac{5}{6}\\ b=\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\end{cases}$$

Portanto, as raízes são $\boxed{\left\{-\frac{5}{6},\frac{5+\sqrt{11}i}{6},\frac{5-\sqrt{11}i}{6}\right\}}$.

QUESTÃO 23

Sabe-se que 1, *B*, *C*, *D* e *E* são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

(i) *B,C,D,E* são dois a dois distintos;
(ii) os números 1,*B,C* e os números 1,*C, E,* estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
(iii) os números *B,C,D,E*, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine *B,C,D,E*.

Resolução

Pela informação (ii) podemos escrever $(1,B,C)=(1,1+r,1+2r)$ e como $(1,C,E)$ também é progressão aritmética, temos $(1,C,E)=(1,1+2r,1+4r)$. Então:

$$(1,B,C,D,E)=(1,1+r,1+2r,D,1+4r)$$

Agora, pela informação (iii), temos que (B,C,D,E) é uma progressão geométrica. Vamos denotar sua razão por q, então:

$$\frac{C}{B}=q=\frac{1+2r}{1+r}\text{ e }\frac{E}{C}=q^2=\frac{1+4r}{1+2r}$$

Unindo isso temos

$$\left(\frac{1+2r}{1+r}\right)^2=\frac{1+4r}{1+2r}\Leftrightarrow(1+2r)^3=(1+r)^2(1+4r)\Leftrightarrow$$

$$1+6r+12r^2+8r^3=4r^3+9r^2+6r+1\Leftrightarrow 4r^3+3r^2=0$$

E como a informação (i) nos garante que $r\neq 0$, temos que $4r+3=0\Leftrightarrow r=-\frac{3}{4}$, então $(1,B,C,D,E)=\left(1,\frac{1}{4},-\frac{1}{2},D,-2\right)$. Por fim, utilizando novamente a informação (iii)

$$q=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=-2\Leftrightarrow q=-2\Rightarrow D=(-2)\cdot C=1$$

Então $(B,C,D,E)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1,-2\right)$.

QUESTÃO 24

Seja $M\subset\mathbb{R}$ dado por $M=\{|z^2+az-1|:z\in\mathbb{C}\text{ e }|z|=1\}$, com $a\in\mathbb{R}$. Determine o maior elemento de *M* em função de *a*.

Resolução

Primeiramente, como temos um número complexo com módulo unitário, vamos escreve-lo como $z=\text{cis}\,\theta=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$. Agora, queremos maximizar a expressão $E=|z^2+az-1|$. Perceba que como a expressão é não negativa, podemos maximizar seu quadrado. Então, utilizando a relação $|w|^2=w\cdot\bar{w}$:

$$E^2=|z^2+az-1|^2=(z^2+az-1)(\bar{z}^2+a\bar{z}-1)$$

$$=(z\bar{z})^2+az(z\bar{z})-z^2+a\bar{z}(z\bar{z})+a^2(z\bar{z})-az-\bar{z}^2-a\bar{z}+1$$

Utilizando então que $z\bar{z}=|z|^2=1$:

$$E^2=1+\cancel{az}-z^2+\cancel{a\bar{z}}+a^2-\cancel{az}-\bar{z}^2-\cancel{a\bar{z}}+1=2+a^2-(z^2+\bar{z}^2)$$

$$=2+a^2-2\cdot\text{Re}(z^2)=2+a^2-2\cos(2\theta)$$

Então $E=\sqrt{2+a^2-2\cos(2\theta)}$, e esse valor é maximizado quando $\cos(2\theta)=-1$, ou seja, $\theta=\frac{\pi}{2}$ $(z=i)$ ou $\theta=\frac{3\pi}{2}$ $(z=-i)$ e o valor máximo é

$$E_{máx}=\sqrt{2+a^2-2(-1)}\Leftrightarrow\boxed{E_{máx}=\sqrt{a^2+4}}$$

QUESTÃO 25

Seja *S* o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de *S*.

b) Determine o subconjunto de *S* formado pelos polinômios que têm –1 como uma de suas raízes.

Resolução

a) Seja

$$p(x)=a_4\cdot x^4+a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

Dentre seus cinco coeficientes, basta escolher quais os três que serão iguais a 2. Logo, o total de polinômios nas condições apresentadas:

$$\binom{5}{3}=\boxed{10\text{ polinômios}}$$

b) Se –1 for raiz do polinômio, temos que:

$$p(-1)=0\Leftrightarrow a_4\cdot(-1)^4+a_3\cdot(-1)^3+a_2\cdot(-1)^2+a_1\cdot(-1)+a_0\Leftrightarrow$$
$$a_4+a_2+a_0=a_3+a_1$$

Como dois coeficientes são iguais a 1, e os restantes iguais a 2, então o menor valor que o lado esquerdo assume é 4, enquanto o maior valor que o lado direito assume é 4. Ou seja, a única maneira de essa igualdade se verificar é se os dois lados forem iguais a 4. Ficamos com as opções:

$$\begin{cases}a_4=a_2=1\\ a_0=a_3=a_1=2\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a_4=a_0=1\\ a_2=a_3=a_1=2\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a_2=a_0=1\\ a_4=a_3=a_1=2\end{cases}$$

Portanto, o subconjunto de *S* pedido é:

$$\boxed{\{x^4+2x^3+x^2+2x+2,\,x^4+2x^3+2x^2+2x+1,\,2x^4+2x^3+x^2+2x+1\}}$$

QUESTÃO 26

Três pessoas, aqui designadas por *A*, *B* e *C*, realizam o seguinte experimento: *A* recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal + ou o sinal –, passando em seguida a *B*, que mantém ou troca o sinal marcado por *A* e repassa o cartão a *C*. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de 1/3 a probabilidade de *A* escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidades de *B* e *C* trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de *A* haver escrito o sinal de + sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Resolução

Inicialmente, vamos determinar as probabilidades dos eventos de escolha de sinal.

I. pessoa A: designando por A_+ e A_- os eventos de assinalar no cartão sinal + e sinal –, respectivamente, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A_+)=\frac{1}{3} \text{ e } P(A_-)=1-P(A_+)=\frac{2}{3}$$

II. pessoas B e C: sendo M o evento de manter o sinal e T o de troca de sinal, temos as probabilidades:

$$P(T)=\frac{2}{3} \text{ e } P(M)=1-P(T)=\frac{1}{3}$$

A probabilidade que estamos procurando é dada por:

$$P(A_+|C_+)=\frac{P(A_+\cap C_+)}{P(C_+)},$$

onde C_+ é o evento de terminar com sinal +.

Assim, vejamos as possibilidades do evento C_+:

A	B	C	Probabilidade
+	+	+	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$
+	-	+	$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$
-	-	+	$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$
-	+	+	$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Dessa maneira, a probabilidade do evento C_+ é:

$$P(C_+)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 3=\frac{13}{27}$$

Repare que o para começarmos com sinal +, basta olharmos para as duas linhas iniciais da tabela. Daí, temos os seguintes casos:

A	B	C	Probabilidade
+	+	+	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$
+	-	+	$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento $A_+\cap C_+$ é:

$$P(A_+\cap C_+)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{27}$$

Portanto, a probabilidade que procuramos é dada por:

$$P(A_+|C_+)=\frac{P(A_+\cap C_+)}{P(C_+)}=\frac{\frac{5}{27}}{\frac{13}{27}}=\boxed{\frac{5}{13}}$$

QUESTÃO 27

Seja n um inteiro positivo tal que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$.

Resolução

a) Da expressão do cosseno do arco duplo, temos que:

$$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=1-2\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=1-2\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo n inteiro positivo, então $0\le\frac{\pi}{n}\le\pi$. Portanto:

$$\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\boxed{n=6}$$

b) Sendo $n=6$, segue do enunciado que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Da relação fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{3}}{4}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Como $0\le\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{2}$, então ficamos com o sinal positivo:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Agora, usando novamente a expressão para o arco duplo, vem que:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{24}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=1-2\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{24}\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

Como $0\le\frac{\pi}{24}\le\frac{\pi}{2}$, então ficamos com o sinal positivo:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}$$

Observação

Podemos expressar $\cos\frac{\pi}{12}$ de outro modo, fazendo:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Assim, a resposta também pode ser expressão da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{2}}\Leftrightarrow\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}}$$

QUESTÃO 28

Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases}2x+by=\alpha\\cx+y=\beta\end{cases}\qquad T\begin{cases}cx+3y=\alpha\\4x+dy=\beta\end{cases}$$

Resolução

Sendo α e β não nulos, para que cada um dos sistemas lineares apresentados seja possível e indeterminado, devemos ter uma relação de proporcionalidade entre os coeficientes correspondentes em cada equação:

$$\begin{cases}\frac{2}{c}=\frac{b}{1}=\frac{\alpha}{\beta}\\\frac{c}{4}=\frac{3}{d}=\frac{\alpha}{\beta}\end{cases},$$

Reescrevendo numa única cadeia de igualdades, temos:

$$\frac{2}{c}=\frac{c}{4}=b=\frac{3}{d}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Da primeira igualdade:

$$\frac{2}{c}=\frac{c}{4}\Leftrightarrow c^2=8\Leftrightarrow c=\pm 2\sqrt{2}$$

Voltando à cadeia de igualdades, temos:

$$\begin{cases} c=2\sqrt{2} \\ \dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=b=\dfrac{3}{d}=\dfrac{\alpha}{\beta}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c=-2\sqrt{2} \\ \dfrac{2}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{4}=b=\dfrac{3}{d}=\dfrac{\alpha}{\beta}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ c=2\sqrt{2} \\ d=3\sqrt{2} \\ \beta=\sqrt{2}\cdot\alpha\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ c=-2\sqrt{2} \\ d=-3\sqrt{2} \\ \beta=-\sqrt{2}\cdot\alpha\end{cases}}$$

QUESTÃO 29

Sabe-se que a equação $3x^2+5xy-2y^2-3x+8y-6=0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Resolução

Podemos pensar em nossa equação como uma equação de segundo grau em y (ou em x, mas veremos que é mais conveniente em y nessa situação):

$$3x^2+5xy-2y^2-3x+8y-6=0 \;\Leftrightarrow$$
$$-2y^2+y(5x+8)+(3x^2-3x-6)=0$$

Então, lembrando que a condição para que a equação geral de segundo grau represente um par de retas, é ter o discriminante igual a um trinômio quadrado perfeito. Segue que:

$$\Delta=(5x+8)^2-4(-2)(3x^2-3x-6)=49x^2+56x+16=(7x+4)^2$$

Então as retas serão dadas por:

$$y=\frac{-(5x+8)\pm(7x+4)}{-4}\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}+1 \text{ ou } y=3x+3$$

Assim os coeficientes angulares de nossas retas são $m_1=-\dfrac{1}{2}$ e $m_2=3$. Logo, a tangente do ângulo agudo entre as retas é dado por:

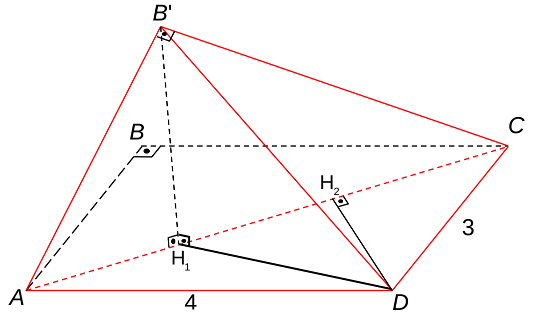
$$\text{tg}(\theta)=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|=\left|\frac{3-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|\Leftrightarrow\boxed{\text{tg}(\theta)=7}.$$

QUESTÃO 30

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Resolução

Segue abaixo a ilustração que representa a situação descrita no enunciado.



Sendo assim, 4 das 6 arestas do tetraedro $B'ADC$ já estão definidas.

$$\boxed{CD=AB'=3\text{ cm}} \text{ e } \boxed{CB'=AD=4\text{ cm}}$$

Note que a diagonal do retângulo original também será uma das arestas e sua medida, pelo teorema de Pitágoras, será:

$$(AC)^2=3^2+4^2\Rightarrow\boxed{AC=5\text{ cm}}$$

Note que a sexta aresta a definir será $B'D$. Deste modo, para obter a medida desta aresta, devemos obter inicialmente os lados $B'H_1$ e DH_1.

Deste modo, pelas relações métricas no triângulo retângulo $AB'C$, temos:

$$\begin{cases}(AB')^2=(AH_1)\cdot(AC)\Rightarrow 3^2=(AH_1)\cdot 5\Rightarrow(AH_1)=\dfrac{9}{5} \\ (B'H_1)^2=(AH_1)\cdot(CH_1)\Rightarrow(B'H_1)^2=\dfrac{9}{5}\cdot\left(5-\dfrac{9}{5}\right)\Rightarrow(B'H_1)=\dfrac{12}{5}=(DH_2)\end{cases}$$

Note que

$$(AH_1)=(CH_2)$$

Portanto,

$$(H_1H_2)=5-2\cdot\frac{9}{5}\Rightarrow(H_1H_2)=\frac{7}{5}$$

E por Pitágoras, temos:

$$(H_1H_2)^2+(DH_2)^2=(DH_1)^2\Rightarrow\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=(DH_1)^2\Rightarrow(DH_1)^2=\frac{193}{25}$$

E, por fim, pelo teorema de Pitágoras no triângulo $B'DH_1$, segue que:

$$(B'D)^2=(DH_1)^2+(B'H_1)^2\Rightarrow(B'D)^2=\frac{193}{25}+\frac{144}{25}\Rightarrow$$

$$\boxed{(B'D)=\frac{\sqrt{337}}{5}\text{ cm}}$$

Equipe desta resolução

Matemática
Alessandro Fonseca Esteves Coelho
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Thais de Almeida Guizellini

Digitação e Diagramação
Douglas Carvalho
Gerson Oliva
Lucas Rubi Rosa

Revisão e Publicação
Danilo José de Lima
Fabiano Gonçalves Lopes
Felipe Eboli Sotorilli