Fez

ELITE

PRÉ-VESTIBULAR

campinas

Aprovou!

Elite Resolve

ITA 2014

Matemática

www.elitecampinas.com.br

As melhores resoluções de vestibulares da internet

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N}=\{1,2,3...\}$
$\mathbb{Z}$	: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária : $i^2 = -1$
$\|z\|$	: módulo do número z $\in \mathbb{C}$
$\bar{z}$	: conjugado do número z $\in \mathbb{C}$
Re (z)	: parte real do número z $\in \mathbb{C}$
Det A	: determinante da matriz A
A^t	: transposta da matriz A
P(A)	: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto a
n(A)	: número de elementos do conjunto finito A
P(A)	: probabilidade de ocorrência do vento A
f o g	: função composta das f e g
$[a,b]$	$=\{x\in\mathbb{R}; a\le x\le b\}$
$[a,b[$	$=\{x\in\mathbb{R}; a\le x< b\}$
$]a,b]$	$=\{x\in\mathbb{R}; a< x\le b\}$
$]a,b[$	$=\{x\in\mathbb{R}; a< x< b\}$
A\B	$=\{x; x\in A \text{ e } x\notin B\}$
$\sum_{n=1}^{K} a_n$	$= a_1 + a_2 + ... + a_k$, $k\in\mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas consideradas são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 01

Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f:[a,c]\to[a,b]$ é sobrejetora, então *f* não é injetora, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) apenas III.
e) nenhuma.

Resolução — Alternativa E

(I) Falsa. Considere, por exemplo:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases}.$$

Então $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $y\neq -x$, mas:

$$x+y=1 \Rightarrow x+y\in\mathbb{Q} \Rightarrow x+y\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

(II) Falsa. Considere, por exemplo:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pi \end{cases}$$

Então $x\in\mathbb{Q}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mas:

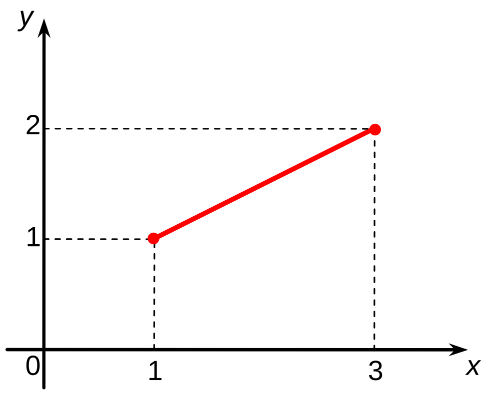
$$x\cdot y=0 \Rightarrow x\cdot y\in\mathbb{Q} \Rightarrow x\cdot y\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

(III) Falsa. Considere, por exemplo:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases},$$

e a função $f:[1,3]\to[1,2]$ tal que $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Seu gráfico é:



Observe que tal função é bijetora, isto é, é tanto sobrejetora quanto injetora.

QUESTÃO 02

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+m$, $g(x)=bx+n$, em que a,b,m e n são constantes reais. Se A e B são as imagens de f e de g, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se $A=B$, então $a=b$ e $m=n$;

II. Se $A=\mathbb{Z}$, então $a=1$;

III. Se $a,b,m,n\in\mathbb{Z}$, com $a=b$ e $m=-n$, então $A=B$,

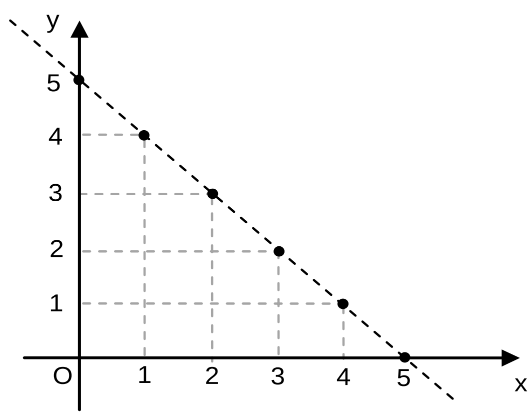
é (são) verdadeira(s)

a) apenas I
b) apenas II
c) apenas III
d) apenas I e II
e) nenhuma

Resolução — Alternativa E

As funções *f* e *g* representam pontos discretos sobre a correspondente reta real.

Veja o exemplo para a função $f(x)=-x+5$



Encontraremos, então, contraexemplos para cada caso:

(I) Falsa. Vamos supor: $a=1$, $b=-1$ e $m=n=0$.
Nesse caso teremos:`

$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=-x \end{cases},$$

de modo que $\text{Im}(f)=\text{Im}(g)=\mathbb{Z}$ e que, portanto, satisfaz $A=B$.

Entretanto, $a\neq b$

(II) Falsa. O caso $a=-1$ com $m\in\mathbb{Z}$, também permite $A=\mathbb{Z}$.

(III) Falsa. O caso $a=b=0$, com $m\neq 0$ e $n\neq 0$ implica $A=\{m\}$ e $B=\{-m\}$, logo $A\neq B$.

QUESTÃO 03

A soma $\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$ é igual a:

a) $\frac{8}{9}$. **b)** $\frac{14}{15}$. **c)** $\frac{15}{16}$. **d)** $\frac{17}{18}$. **e)** 1.

Resolução — Alternativa D

Temos que:

(I) $\log_{1/2} \sqrt[n]{32} = \log_{1/2} 2^{5/n} = -\frac{5}{n}$;

(II) $\log_{1/2} 8^{n+2} = \log_{1/2} 2^{3(n+2)} = -3(n+2)$.

Assim:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}} = \sum_{n=1}^{4} \frac{-\frac{5}{n}}{-(3n+6)} = \sum_{n=1}^{4} \frac{5}{3 \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{5}{3} \cdot \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n \cdot (n+2)} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{68}{120} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}} = \frac{17}{18}}$$

QUESTÃO 04

Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6$ é igual a:

a) $(z^2 - \bar{z}^2)^3$ **b)** $z^6 - \bar{z}^6$ **c)** $(z^3 - \bar{z}^3)^2$

d) $(z - \bar{z})^6$ **e)** $(z - \bar{z})^2 (z^4 - \bar{z}^4)$

Resolução — Alternativa A

Para resolver essa expressão, precisaremos lembrar que:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Elevando ao quadrado a equação:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow |z|^4 = z^2 \cdot \bar{z}^2$$

Substituindo na expressão, temos:

$$z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6 = z^6 - 3z^2 \cdot \bar{z}^2 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6$$

Fazendo a distributiva:

$$z^6 - 3z^2 \cdot \bar{z}^2 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6 = z^6 - 3z^4\bar{z}^2 + 3z^2\bar{z}^4 - \bar{z}^6$$

Veja que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Assim, manipulando a expressão:

$$(z^2)^3 - 3(z^2)^2 \bar{z}^2 + 3z^2 (\bar{z}^2)^2 - (\bar{z}^2)^3 = (z^2 - \bar{z}^2)^3$$

Portanto, $z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) = \boxed{(z^2 - \bar{z}^2)^3}$.

QUESTÃO 05

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

II. $(z+\bar{w})^2 - (z-\bar{w})^2 = 4z\bar{w}$;

III. $|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4\mathrm{Re}(z\bar{w})$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas I e II. **c)** apenas I e III.
d) apenas II e III. **e)** todas.

Resolução — Alternativa E

Sejam os números complexos:

$$\begin{cases} z = a + bi \\ w = c + di \end{cases},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Temos que:

(I) $z + w = (a+c) + (b+d)i \Rightarrow |z+w|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2$;

(II) $z - w = (a-c) + (b-d)i \Rightarrow |z-w|^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$;

Agora, julgamos cada afirmação.

I. Verdadeira. Temos que:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = \left[(a+c)^2 + (b+d)^2\right] + \left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right] =$$
$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 2(a^2+b^2) + 2(c^2+d^2) = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

II. Verdadeira. Fatorando a diferença de quadrados, temos que:

$$(z+\bar{w})^2 - (z-\bar{w})^2 = \left[(z+\bar{w}) + (z-\bar{w})\right] \cdot \left[(z+\bar{w}) - (z-\bar{w})\right] =$$
$$= [2z] \cdot [2\bar{w}] = 4 \cdot z \cdot \bar{w}$$

III. Verdadeira. Novamente pela fatoração da diferença de quadrados:

$$|z+w|^2 - |z-w|^2 = \left[(a+c)^2 + (b+d)^2\right] - \left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right] =$$
$$\left[(a+c)^2 - (a-c)^2\right] + \left[(b+d)^2 - (b-d)^2\right] =$$
$$[(a+c)+(a-c)] \cdot [(a+c)-(a-c)] + [(b+d)+(b-d)] \cdot [(b+d)-(b-d)]$$
$$= [2a] \cdot [2c] + [2b] \cdot [2d] = 4ac + 4bd.$$

Por outro lado, fazendo

$$z \cdot \bar{w} = (a+bi) \cdot (c-di) = ac + bd + (bc - ad) \cdot i,$$

concluímos que:

$$4(ac+bd) = 4\mathrm{Re}(z\bar{w}).$$

Portanto, comparando os resultados:

$$|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

QUESTÃO 06

Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a:

a) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$ **c)** $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$

d) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$ **e)** $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$

Resolução — Alternativa C

Como temos uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ e um polinômio de grau 5, suas 5 raízes podem ser escritas como:

$$\left(r,\ r+\frac{1}{2}, r+1, r+\frac{3}{2}, r+2\right)$$

Pela relação de Girard da soma das raízes, temos:

$$-\frac{a_4}{a_5} = -\frac{0}{1} = r + \left(r+\frac{1}{2}\right) + (r+1) + \left(r+\frac{3}{2}\right) + (r+2) = 5r + 5 \Leftrightarrow r = -1$$

Assim as raízes formam a PA:

$$\text{PA}\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, nosso polinômio será então:

$$p(x) = 1 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot x = (x^2 - 1) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$$

Então, pela forma do enunciado:

$$\boxed{(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)}.$$

QUESTÃO 07

Para os inteiros positivos k e n, com $k \le n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

Então, o valor de $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

a) 2^n+1.
b) $2^{n+1}+1$.
c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
e) $\frac{2^n-1}{n}$.

Resolução — Alternativa D

Vamos denotar nossa soma por S:

$$S=\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}$$

Multiplicando nossa soma por $(n+1)$, obtemos em cada termo a identidade apresentada no enunciado:

$$(n+1)S=\frac{n+1}{0+1}\binom{n}{0}+\frac{n+1}{1+1}\cdot\binom{n}{1}+\frac{n+1}{2+1}\cdot\binom{n}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}=$$
$$=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}$$

Então, lembrando da soma dos binômios:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

Temos:

$$(n+1)S=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}=$$
$$=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}-\binom{n+1}{0}=2^{n+1}-1 \Leftrightarrow$$
$$(n+1)S=2^{n+1}-1 \Leftrightarrow \boxed{S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

QUESTÃO 08

Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;
II. Se o produto AB não for inversível, então n é impar;
III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s):

a) Apenas I
b) Apenas I e II
c) Apenas I e III
d) Apenas II e III
e) todas.

Resolução — Alternativa C

Lembrando que uma matriz B é dita antisimétrica quando $B^t=-B$ e que uma matriz A é inversível quando $\det(A)\neq 0$. Observe que para uma matriz anti-simétrica vale que:

$$\det(B^t)=\det(-B)=(-1)^n\det(B) \;\Leftrightarrow\; \det(B)=(-1)^n\det(B)$$

Assim, n impar significa $\det(B)=-\det(B) \Leftrightarrow \det(B)=0$.

Com isso em mente, vamos analisar as alternativas:

(I) Verdadeira.
AB é inversível, então

$$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)\neq 0$$

Mas então $\det(B)\neq 0$, e como $\{n \text{ impar}\}\Rightarrow\{\det(B)=0\}$, pela contra-positiva vale $\{\det(B)\neq 0\}\Rightarrow\{n \text{ par}\}$, logo a alternativa é verdadeira.

(II) Falsa.
AB não é inversível, então

$$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=0$$

E como $\det(A)\neq 0$, devemos ter $\det(B)=0$. Mas a condição não implica que n seja impar. Em especial a seguinte matriz antisimétrica $4x4$ tem determinante nulo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(III) Verdadeira.
B é inversível, logo $\det(B)\neq 0$, e pela contrapositiva $\{\det(B)\neq 0\}\Rightarrow\{n \text{ par}\}$, logo n é par.

Assim, são verdadeiras as afirmações **I** e **III**.

QUESTÃO 09

Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;
II. BA não é inversível;
III. O sistema $(BA)X=0$, com $X^t=[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I.
d) apenas II.
e) apenas III.

Resolução — Alternativa B

Temos que:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y+z+6 & x-y+z \\ 2x+y+z+3 & z \end{bmatrix}$$

Se $A\cdot B$ é antissimétrica, isto é, $(A\cdot B)^T=-A\cdot B$, então:

$$\begin{cases} x-y+z+6=0 \\ 2x+y+z+3=-(x-y+z) \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-6 \\ 3x=-3 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$$

Portanto:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

I. Falsa. Temos que:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

e, portanto, $(B\cdot A)^T\neq -B\cdot A$

II. Verdadeira. Temos que:

$$\det(B\cdot A)=\begin{vmatrix}-5 & -1 & -1\\ 28 & 2 & 8\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}$$

Somando a terceira coluna na segunda coluna, e somando a terceira coluna, multiplicada por -1 na primeira, o determinante não se altera. Assim:

$$\det(B\cdot A)=\begin{vmatrix}-4 & -2 & -1\\ 20 & 10 & 8\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

Sendo a primeira coluna múltipla da segunda coluna, segue que:

$$\det(B\cdot A)=0$$

III. Verdadeira. Como já verificado na afirmação anterior, temos que:

$$\det(B\cdot A)=0\,.$$

Assim, o sistema linear $(BA)X=0$ é um sistema homogêneo (portanto sempre possível) com determinante da matriz dos coeficientes ($B\cdot A$) igual a zero, o que significa que se trata de um sistema linear possível e indeterminado, admitindo, portanto, uma infinidade de soluções.

QUESTÃO 10

Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2)-\det(\sqrt[3]{2}M^3)=\frac{2}{9}\det(3M)$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$. **b)** $\frac{1}{2}$. **c)** $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{4}{5}$. **e)** $\frac{5}{4}$.

Resolução

Alternativa A

Para resolver essa questão, vamos utilizar duas propriedades de determinantes:

(I) o teorema de Binet, que afirma que dadas duas matrizes A e B quadradas de mesma ordem, então:

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$$

Em particular, se $A=B$,:

$$\det(A^k)=(\det A)^k$$

(II) se A é uma matriz quadrada de ordem n, então:

$$\det(\lambda\cdot A)=\lambda^n\cdot\det A$$

Assim, para a igualdade dada envolvendo a matriz M, 3×3, temos:

$$\det(2M^2)-\det(\sqrt[3]{2}M^3)=\frac{2}{9}\det(3M)\Leftrightarrow$$

$$2^3\cdot\det(M^2)-(\sqrt[3]{2})^3\cdot(\det M^3)=\frac{2}{9}\cdot 3^3\cdot\det M\Leftrightarrow$$

$$8\cdot(\det M)^2-2\cdot(\det M)^3=6\cdot\det M\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\det M\cdot\left[(\det M)^2-4\cdot\det M+3\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\det M=0\quad\text{ou}\quad\det M=1\quad\text{ou}\quad\det M=3$$

Como M é inversível, então $\det M\neq 0$. Assim, os possíveis valores para $\det M$ são:

$$\det M=1\quad\text{ou}\quad\det M=3$$

Agora, como $\det M^{-1}=\frac{1}{\det M}$, os possíveis valores para $\det M^{-1}$ são:

$$\boxed{\det M=1}\quad\text{ou}\quad\boxed{\det M=\frac{1}{3}}$$

QUESTÃO 11

Considere a equação $A(t)X=B(t), t\in\mathbb{R}$, em que

$A(t)=\begin{pmatrix}2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ e $B(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t)=1$ e $t\neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. **b)** $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. **c)** 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

d) 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. **e)** $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0.

Resolução

Alternativa B

Por hipótese, se $\det(A(t))=1$ e usando o fato de que ao trocar filas paralelas de posição em uma matriz, o valor de seu determinante é multiplicado por – 1, temos que:

$$\det A(t)=\begin{vmatrix}2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-1).\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$(-1).(-1).\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -e^{2t} & 2e^{-2t} & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

Aplicando a regra de Chió, temos:

$$\det(A(t))=\begin{vmatrix}2e^{-2t}-e^{2t} & -1+e^{2t}\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2e^{-2t}-e^{2t}+2(-1+e^{2t})=$$

$$2e^{-2t}+e^{2t}-2=\det(A(t))$$

Como o determinante é igual a 1, temos que:

$$2e^{-2t}+e^{2t}-2=1\Leftrightarrow\frac{2}{e^{2t}}+e^{2t}-3=0\Leftrightarrow e^{4t}-3e^{2t}+2=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}e^{2t}=2\\ e^{2t}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^t=\sqrt{2}\\ e^t=-\sqrt{2}\\ t=0\end{cases}.$$

Como t não pode ser zero e a função $f(x)=e^x$ é crescente positiva para todo x real, concluímos que $\boxed{e^t=\sqrt{2}}$.

Substituindo em $A(t)$ e $B(t)$:

$$A(t)=\begin{pmatrix}2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}\text{ e }B(t)=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

Com isso, o sistema $A(t)X=B(t)$ fica:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-z=\sqrt{2}\\ -x+y+z=-\sqrt{2}\\ -3x+y+2z=0\end{cases}$$

Somando a primeira e a segunda linhas e somando 3 vezes a primeira linha com a terceira, obtemos,

$$\begin{cases}x-2y-z=\sqrt{2}\\ -y=0\\ -5y-z=3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-z=\sqrt{2}\\ y=0\\ z=-3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=0\\ z=-3\sqrt{2}\end{cases}$$

Assim, os valores são: $\boxed{x=-2\sqrt{2},\ y=0\text{ e }z=-3\sqrt{2}}$

QUESTÃO 12

Considere o polinômio complexo $p(z)=z^4+az^3+5z^2-iz-6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z)=0$, as outras raízes são

a) $-3i,-1,1$. **b)** $-i,i,1$. **c)** $-i,i,-1$.

d) $-2i,-1,1$. **e)** $-2i,-i,1$.

Resolução **Alternativa A**

Sabendo que $2i$ é raiz de $p(z)$, temos:

$$p(2i)=0 \Leftrightarrow (2i)^4 + a\cdot(2i)^3 + 5\cdot(2i)^2 - i\cdot(2i) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$16 - 8a\cdot i - 20 + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = i$$

Assim, $p(z) = z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6$. Por Briot-Ruffini:

2i	1	i	5	$-i$	-6
	1	$3i$	-1	$-3i$	0

Dessa maneira, $p(z)$ pode ser escrito como:

$$p(z) = (z - 2i)\cdot(z^3 + 3iz^2 - z - 3i)$$

Para encontrarmos as outras três raízes de $p(z)$, basta que:

$$z^3 + 3iz^2 - z - 3i = 0$$

Fatorando a equação:

$$z^3 + 3iz^2 - z - 3i = 0 \Leftrightarrow z^2\cdot(z+3i) - (z+3i) = 0 \Leftrightarrow (z^2-1)\cdot(z+3i) = 0$$

Resolvendo:

$$(z^2-1)\cdot(z+3i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z+3i=0 \Rightarrow z=-3i \\ \text{ou} \\ z^2-1=0 \Rightarrow z=\pm 1 \end{cases}$$

Portanto, as outras três raízes são $\boxed{-3i, -1, 1}$.

Observação: Um erro comum que pode ser cometido é usar o Teorema das Raízes Complexas, que diz que se um polinômio com **coeficientes reais** tem uma raiz complexa z_0 com multiplicidade k, então o conjugado $\bar{z}_0$ também é raiz com mesma multiplicidade k. Note que este teorema não é aplicável a essa questão, pois os coeficientes de $p(z)$ não são reais.

QUESTÃO 13

Sabendo que $sen(x) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}, a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\text{cossec}\, 2x - \dfrac{1}{2} tgx$ é:

a) $\dfrac{a-b}{ab}$. **b)** $\dfrac{a+b}{2ab}$. **c)** $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

d) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$ **e)** $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$

Resolução **Alternativa E**

Lembrando as relações por $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, temos:

$$\begin{cases} \text{tg}\, x = \alpha \\ \text{sen}\, 2x = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \cos 2x = \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \\ \text{tg}\, 2x = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2} \end{cases}$$

Assim, manipulando a expressão:

$$\text{cossec}\, 2x - \frac{1}{2}\text{tg}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, 2x} - \frac{1}{2}\text{tg}\, x = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}\text{cotg}\, x$$

Agora:

$$\text{sen}(x) = \frac{2ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Deste modo,

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} \Leftrightarrow \text{cotg}^2 x = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{cotg}^2 x = \frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{4a^2b^2} \Leftrightarrow \text{cotg}^2 x = \left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right)^2 \Leftrightarrow \text{cotg}\, x = \pm\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

Portanto, a expressão buscada é:

$$\text{cossec}\, 2x - \frac{1}{2}\text{tg}\, x = \frac{1}{2}\text{cotg}\, x = \pm\frac{a^2-b^2}{4ab},$$

sendo, então, o único valor possível das alternativas $\boxed{\dfrac{a^2-b^2}{4ab}}$.

QUESTÃO 14

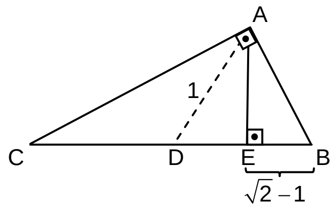
Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2}-1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em *cm*,

a) $4\sqrt{2}-5$. **b)** $3-\sqrt{2}$. **c)** $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$.

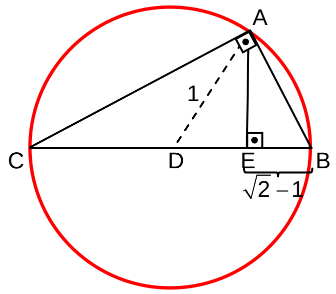
d) $3(\sqrt{2}-1)$. **e)** $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$.

Resolução **Alternativa C**

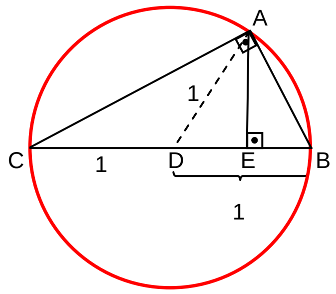
Veja a ilustração da situação descrita pelo enunciado:



Circunscrevendo uma circunferência no triângulo ABC, temos:



Lembre-se que quando circunscrevemos uma circunferência em um triângulo retângulo, temos que o centro é o ponto médio da hipotenusa (no nosso caso, o centro é o ponto D) e o raio, metade do comprimento da hipotenusa. Dessa maneira, segue:



Veja que tanto $\overline{AD}$, quanto $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são raios e que $AD=1$. Assim, $BD=CD=1$. Desse modo, $BC=2$.

Sabendo que $BE=\sqrt{2}-1$, temos que:

$$BD = DE + EB \Leftrightarrow 1 = DE + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow DE = 2 - \sqrt{2}$$

Por Pitágoras no triângulo EAD:

$$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2 \Leftrightarrow AE^2 + (2-\sqrt{2})^2 = 1^2 \Rightarrow (AE)^2 = 4\sqrt{2} - 5$$

Por Pitágoras, novamente, no triângulo AEC:

$$(AE)^2 + (EC)^2 = (AC)^2 \Leftrightarrow (4\sqrt{2}-5) + (2-\sqrt{2}+1)^2 = AC^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AC)^2 = 4\sqrt{2} - 5 + (3-\sqrt{2})^2 \Rightarrow AC = \sqrt{6-2\sqrt{2}}$$

Logo, $\boxed{AC = \sqrt{6-2\sqrt{2}}\ \text{cm}}$.

QUESTÃO 15

Seja ABC de um triângulo de vértices $A=(1,4)$, $B=(5,1)$ e $C=(5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

a) $\frac{15}{8}$. **b)** $\frac{5\sqrt{17}}{4}$. **c)** $\frac{3\sqrt{17}}{5}$.
d) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$. **e)** $\frac{17\sqrt{5}}{8}$.

Resolução — Alternativa D

Solução A:

Dado um triângulo ABC, de lados $AB=a$, $BC=b$ e $CA=c$, temos que a área S deste triângulo pode ser calculada como:

$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}$, onde R é o raio da circunferência circunscrita.

Também podemos calcular a área S do triângulo por:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{matrix}\right\|\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 1\end{matrix}\right\|\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\cdot|16|\Leftrightarrow S=8$$

Os comprimentos dos lados do triângulo são dados por:

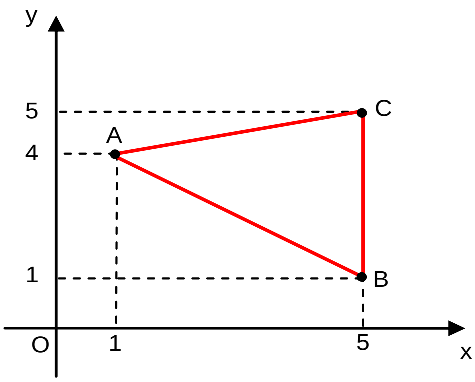
$$d_{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}\Leftrightarrow d_{AB}=5$$
$$d_{BC}=\sqrt{(5-5)^2+(1-5)^2}\Leftrightarrow d_{BC}=4$$
$$d_{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(4-5)^2}\Leftrightarrow d_{CA}=\sqrt{17}$$

Assim:

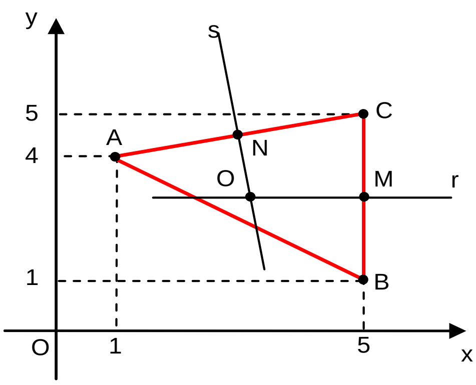
$$S=\frac{d_{AB}\cdot d_{BC}\cdot d_{CA}}{4\cdot R}\Leftrightarrow 8=\frac{5\cdot 4\cdot\sqrt{17}}{4\cdot R}\Rightarrow\boxed{R=\frac{5\sqrt{17}}{8}}$$

Solução B:

Segue a representação do triângulo ABC no plano cartesiano:



Lembre-se que o encontro das mediatrizes é o centro da circunferência circunscrita. Dessa maneira, basta encontrarmos duas retas mediatrizes dos lados dos triângulos para que possamos encontrar o centro. Veja:



Perceba que o segmento BC é paralelo ao eixo y e que sua equação é dada por $x=5$. Dessa maneira, a equação da reta r, que é mediatriz do segmento BC, além de passar pelo ponto médio $M(5,3)$, será paralela ao eixo x:

$$r: y=3$$

Do mesmo modo, para encontrar a reta s, mediatriz ao segmento AC:

$$\begin{cases}m_{AC}\cdot m_s=-1\\ m_{AC}=\frac{5-4}{5-1}\end{cases}\Rightarrow m_s=-4$$

Como s passa por $N\left(3,\frac{9}{2}\right)$:

$$y-y_N=m_s\cdot(x-x_N)\Leftrightarrow y-\frac{9}{2}=-4\cdot(x-3)\ \therefore s: y=-4x+\frac{33}{2}$$

Agora, interseccionando as retas r e s:

$$\begin{cases}y=3\\ y=-4x+\frac{33}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{27}{8}\\ y=3\end{cases}\quad\therefore O\left(\frac{27}{8},3\right)$$

Para determinarmos o raio, basta fazer a distância entre o centro e qualquer um dos vértices:

$$d_{A,O}=R\Leftrightarrow R=\sqrt{\left(1-\frac{27}{8}\right)^2+(4-3)^2}\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{425}{64}}=\frac{5\sqrt{17}}{8}$$

Logo, $\boxed{R=\frac{5\sqrt{17}}{8}}$

QUESTÃO 16

Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\frac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

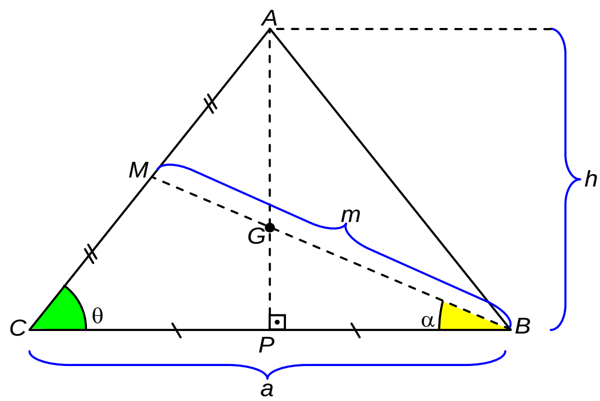
I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm ;
II. O baricentro dista 4 cm do vértice A ;
III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas II. **c)** apenas III.
d) apenas I e III. **e)** apenas II e III.

Resolução — Alternativa A

Sejam h a medida da altura $\overline{AP}$, a o comprimento da base $\overline{BC}$ e m o comprimento da mediana $\overline{BM}$. Observe a figura abaixo:



G é o baricentro do triângulo, pois é o encontro de $\overline{AP}$ com $\overline{BM}$ e a altura $\overline{AP}$ é também mediana.

Pelo enunciado, sendo S a área do triângulo ABC:

$$S=\frac{a\cdot h}{2}\Leftrightarrow 48=\frac{a\cdot h}{2}\Leftrightarrow a\cdot h=96$$

E ainda:

$$\frac{h}{a}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow h=\frac{2}{3}\cdot a$$

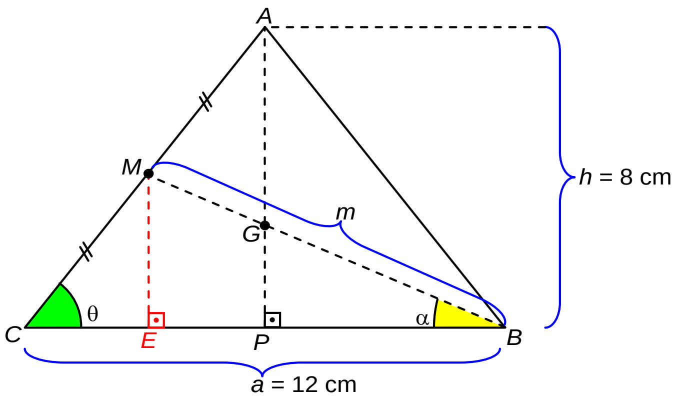
Assim,

$$\begin{cases} a\cdot h=96 \\ h=\frac{2}{3}\cdot a \end{cases} \Rightarrow a\cdot\frac{2}{3}\cdot a=96 \Leftrightarrow a^2=144 \Rightarrow \boxed{a=12\text{ cm}}$$

$$h=\frac{2}{3}\cdot 12\text{ cm} \Leftrightarrow \boxed{h=8\text{ cm}}$$

(I) Verdadeira. Queremos determinar se $m=\sqrt{97}$ cm .

Observe o ponto *E*, projeção de *M* na base $\overline{BC}$:



M é ponto médio de $\overline{AC}$:

$$\frac{AC}{MC}=2$$

$\Delta APC \sim \Delta MEC$:

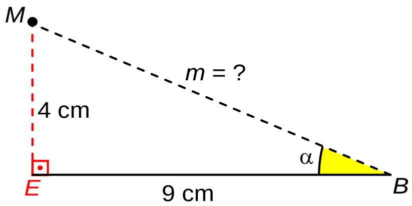
$$\frac{AP}{ME}=\frac{AC}{MC}=2 \Rightarrow \frac{8}{ME}=2 \Leftrightarrow \boxed{ME=4\text{ cm}}$$

$$\frac{PC}{EC}=\frac{AC}{MC}=2 \Rightarrow \frac{12/2}{EC}=2 \Leftrightarrow EC=3\text{ cm}$$

Observe ainda, que:

$$EC+EB=12 \Leftrightarrow 3+EB=12 \Leftrightarrow \boxed{EB=9\text{ cm}}$$

Assim, temos:



Teorema de Pitágoras:

$$m^2=4^2+9^2 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt{97}\text{ cm}}$$

Observação: a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ tem mesma medida da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, devido à simetria do triângulo isósceles.

(II) Falsa. Queremos saber se $GA=4$ cm .

Sabe-se que a distância do baricentro ao vértice é $\frac{2}{3}$ da medida da mediana, assim:

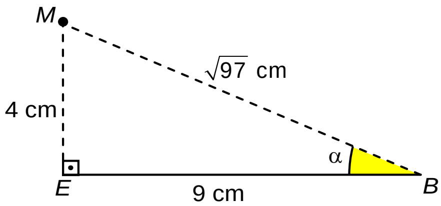
$$GA=\frac{2}{3}\cdot 8\text{ cm} \Rightarrow GA\neq 4\text{ cm}$$

Também podemos chegar a essa conclusão de outra forma:

$$GA+GP=8 \Leftrightarrow GP=8-GA$$

Observe, pela construção das figuras, que $GP<ME$, logo $GP<4$ cm . Assim, $8-GA<4 \Leftrightarrow \boxed{GA>4\text{ cm}}$

(III) Falsa. Observe a figura:



Daí: $\boxed{\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{97}}\neq\frac{3}{\sqrt{97}}}$.

QUESTÃO 17

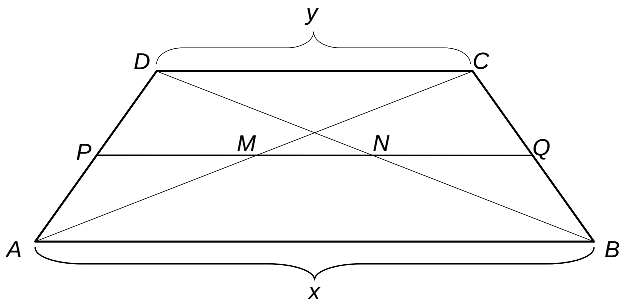
Considere o trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y<x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a:

a) $x-y$. **b)** $\frac{1}{2}(x-y)$. **c)** $\frac{1}{3}(x-y)$.

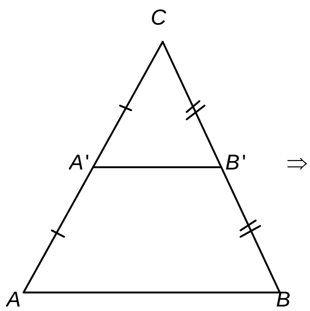
d) $\frac{1}{3}(x+y)$. **e)** $\frac{1}{4}(x+y)$.

Resolução — Alternativa B

Observe a ilustração da situação abaixo, onde também é traçado o segmento $\overline{PQ}$, correspondente a base média do trapézio.



Vamos usar a propriedade da base média de um triângulo (segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo e paralelo ao terceiro lado). Tal propriedade nos diz que se um segmento é base média de um triângulo, então seu comprimento é metade do lado paralelo a este segmento.



$$\Rightarrow \begin{cases} A'B'=\frac{1}{2}AB \\ \overline{A'B'}\text{ é paralelo à }\overline{AB} \end{cases}$$

Assim, no nosso caso temos que $\overline{MQ}$ é base média de $\overline{AB}$ no triângulo ABC , portanto $MQ=\frac{1}{2}AB=\frac{x}{2}$. Do mesmo modo $\overline{NQ}$ é base média de $\overline{CD}$ no triângulo BCD , então $NQ=\frac{1}{2}CD=\frac{y}{2}$. Por fim, basta notar que

$$\boxed{MN=MQ-NQ=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=\frac{1}{2}(x-y)}.$$

Obs: O segmento $\overline{MN}$ que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é chamado de mediana de Euler.

QUESTÃO 18

Uma pirâmide de altura $h = 1\text{cm}$ e volume $V = 50\text{cm}^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1,2,...,n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}cm^2$ e $S_6 = 3cm^2$. Então n é igual a:

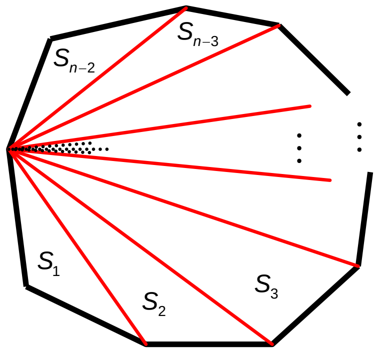
a) 22. **b)** 24. **c)** 26. **d)** 28. **e)** 32.

Resolução — Alternativa C

Primeiramente vamos descobrir a área da base de nossa pirâmide:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot h \Leftrightarrow 50 = \frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot 1 \Leftrightarrow A_{base} = 150\,cm^2$$

Agora, vamos representar a divisão da base descrita no enunciado:



Essas sequências de áreas formam uma progressão aritmética, descobrimos a razão dessa progressão pelos dois termos dados:

$$S_6 = S_3 + 3r \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2} + 3r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Assim nossas áreas são:

$$S_1 = \frac{1}{2}cm^2$$
$$S_2 = 1cm^2$$
$$S_3 = \frac{3}{2}cm^2$$
$$\vdots$$
$$S_k = S_1 + (k-1)r = \frac{k}{2}cm^2$$
$$\vdots$$
$$S_{n-2} = \frac{n-2}{2}cm^2$$

Assim, pela fórmula da soma de progressões aritméticas, temos:

$$A_{base} = 150 = \sum_{k=1}^{n-2} S_k = \frac{(S_1 + S_{n-2})(n-2)}{2} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\cdot(n-2) = 600 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 26 \\ \text{ou} \\ n = -23 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, $\boxed{n = 26}$.

QUESTÃO 19

A equação do circuito localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r: 2x - 2y + 5 = 0$ e $s: x + y - 4 = 0$ é

a) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4.$

b) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4.$

c) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4.$

d) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$

e) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

Resolução — Alternativa D

Raio da circunferência:

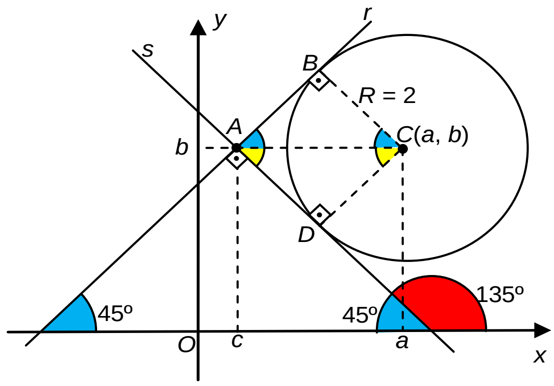
$$Área = 4\pi$$
$$\pi\cdot R^2 = 4\pi$$
$$\boxed{R = 2}$$

Equações das retas:

$$r: 2x - 2y + 5 = 0$$
$$r: y = x + 2{,}5$$
$$m_r = 1 \Rightarrow \text{tg}\theta_r = 1$$
$$\theta_r = 45^o$$

$$s: x + y - 4 = 0$$
$$s: y = -x + 4$$
$$m_s = -1 \Rightarrow \text{tg}\theta_s = -1$$
$$\theta_s = 135^o$$

Como $m_r \cdot m_s = -1$, as retas são perpendiculares entre si. Como r forma 45° com o eixo das abscissas e s forma 135° com o eixo das abscissas, todos os ângulos agudos destacados na figura abaixo serão iguais a 45º.



Observe que, pela construção, *ABCD* é um quadrado de lado $R = 2$ e lados com inclinação de 45° com a horizontal, portanto, o ponto $A(c, b)$ de encontro das retas tem a mesma ordenada b do centro $C(a, b)$ da circunferência.

Assim,

$$AC = R\sqrt{2} \text{ (diagonal do quadrado)}$$
$$AC = 2\sqrt{2}$$

E ainda:

$$a = 2\sqrt{2} + c$$

Cálculo das coordenadas de $A(c, b)$, ponto do cruzamento $r \times s$:

$$\left.\begin{matrix} r: y = x + 2{,}5 \\ s: y = -x + 4 \end{matrix}\right\} x_A + 2{,}5 = -x_A + 4 \Leftrightarrow x_A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} x_A = \frac{3}{4} \\ s: y = -x + 4 \end{matrix}\right\} y_A = -\frac{3}{4} + 4 \Leftrightarrow y_A = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{13}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix} c = \frac{3}{4} \\ a = 2\sqrt{2} + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{a = \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)}$$

Substituindo diretamente os valores de R, a e b na equação da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4}$$

QUESTÃO 20

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles *ABC* em torno de uma reta paralela á base $\overline{BC}$ que dista 0,25 cm do vértice *A* e 0,75 cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm , o volume desse sólido, em cm³, é igual a

a) $\frac{9}{16}$.

b) $\frac{13}{96}$.

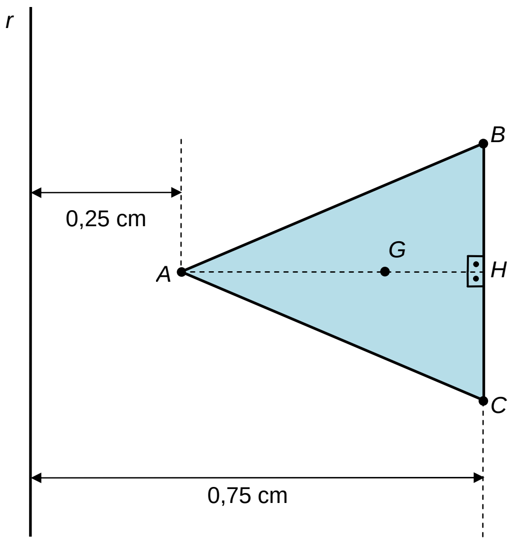
c) $\frac{7}{24}$.

d) $\frac{9}{24}$.

e) $\frac{11}{96}$.

Resolução **Alternativa C**

Seja *r* a reta em torno da qual o triângulo *ABC* será rotacionado, *G* o baricentro desse triângulo e *H* a projeção do ponto *A* sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Temos a figura:



A medida do segmento $\overline{AH}$ é dada por:

$$AH = 0{,}75 - 0{,}25 = \frac{1}{2}\text{ cm}$$

Sendo o triângulo isósceles, *H* deve ser ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo *AHB*, temos:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + HB^2 \Leftrightarrow$$

$$HB^2 = \frac{1}{4\pi^2} \Leftrightarrow HB = \pm\frac{1}{2\pi}\text{ cm}.$$

Sendo medida de um segmento, segue que:

$$HB = \frac{1}{2\pi}\text{ cm} \Leftrightarrow BC = 2\cdot HB = \frac{1}{\pi}\text{ cm}.$$

A área *S* do triângulo *ABC*, portanto, será dada por:

$$S = \frac{BC\cdot AH}{2} = \frac{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4\pi}\text{ cm}^2$$

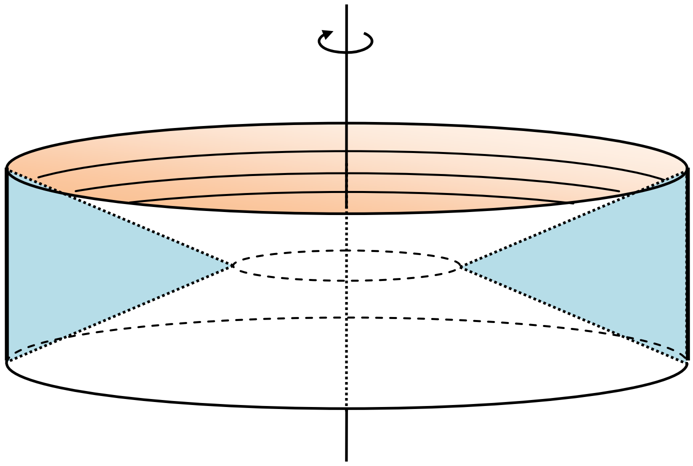
Sendo o triângulo *ABC* isósceles, $\overline{AH}$ é uma mediana e, portanto, o baricentro *G* divide essa mediana na proporção 2:1 a favor do vértice *A*. Assim:

$$AG = \frac{2}{3}\cdot AH = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\text{ cm}$$

Desse modo, a distância *d* do baricentro *G* à reta *r* é dada por:

$$d = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}\text{ cm}$$

O sólido obtido apresenta-se esboçado na figura a seguir:



Logo, pelo teorema de Pappus-Guldin, o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo *ABC* em torno da reta *r* é dado por:

$$V = 2\cdot\pi\cdot S\cdot d = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{7}{12} \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{7}{24}\text{ cm}^3}$$

QUESTÃO 21

Considere as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = e^{\alpha x}$,em que α é uma constante real positiva, e $g:[0,\infty[\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g\circ f)(x) > (f\circ g)(x).$$

Resolução

Primeiramente vamos definir as regras de nossas funções compostas:

$$f\circ g(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = e^{\alpha\sqrt{x}}\text{, com } x \geq 0.$$

$$g\circ f(x) = g\left(e^{\alpha x}\right) = \sqrt{e^{\alpha x}} = e^{\frac{\alpha x}{2}}\text{, com } x\in\mathbb{R}.$$

Assim nossa inequação é:

$$e^{\frac{\alpha x}{2}} > e^{\alpha\sqrt{x}},$$

e como a função $h(x) = e^x$ é estritamente crescente nos reais, podemos comparar os expoentes

$$e^{\frac{\alpha x}{2}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{2} > \alpha\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} > \sqrt{x}$$

Onde a ultima equivalência ocorre pois α é real positivo. Então

$$\frac{x}{2} > \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4,$$

assim, o conjunto solução é:

$$\boxed{S = \{x\in\mathbb{R}: x>4\} =]4;\infty[}$$

QUESTÃO 22

Determine as soluções reais da equação em x,

$$(\log_4 x)^3 - \log_4\left(x^4\right) - 3\frac{\log_{10}16x}{\log_{100}16} = 0.$$

Resolução

Usando as propriedades do logaritmo, cada parcela da equação é reescrita da seguinte forma:

1. $\log_4\left(x^4\right) = 4\log_4 x$;

2. $\frac{\log_{10}16x}{\log_{100}16} = \frac{\log_{10}16x}{\frac{1}{2}\log_{10}16} = 2\log_{16}16x = 2 + 2\log_{16}x = 2 + \log_4 x$

Assim, a equação dada fica:

$$\left(\log_4 x\right)^3 - 4\log_4 x - 6 - 3\log_4 x = 0 \Leftrightarrow \left(\log_4 x\right)^3 - 7\log_4 x - 6 = 0 .$$

Usando a igualdade: $\log_4 x = y$, temos a seguinte equação cúbica:

$$y^3 - 7y - 6 = 0 \Leftrightarrow y^3 - y - 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow y\left(y^2 - 1\right) - 6\left(y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y\left(y+1\right)\left(y-1\right) - 6\left(y+1\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(y+1\right)\left(y^2 - y - 6\right) = 0}$$

Assim, as raízes dessa equação na variável y são: $y = -1,\ y = -2,\ y = 3$ e os valores de x são:

$$\log_4 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_4 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

$$\log_4 x = 3 \Leftrightarrow x = 64$$

Portanto, o conjunto solução da equação é: $\boxed{S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 64\right\}}$.

QUESTÃO 23

a) Determine o valor máximo de $\left|z + i\right|$,sabendo que $\left|z - 2\right| = 1,\ z \in \mathbb{C}$.

b) Se $z_o \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine $z_{0.}$

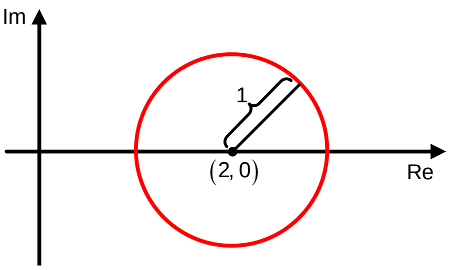
Resolução

a) Da teoria dos números complexos, temos que cada complexo $z = a + bi$ é representado no plano Argand-Gauss por um ponto (o qual chamamos de afixo) $z = \left(a, b\right) = \left(\text{Re}\left(z\right), \text{Im}\left(z\right)\right)$. Assim conseguimos tratar nosso problema de complexos como um problema de geometria analítica. Primeiro notemos que a distância entre os afixos dos complexos z e w é dado por:

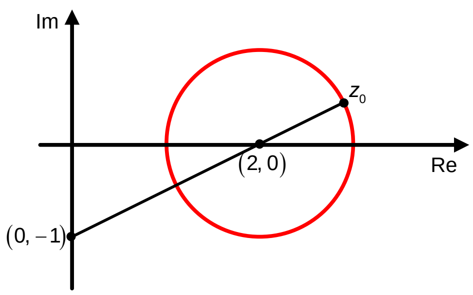
$$\text{dist}\left(z,w\right) = \left|z - w\right|$$

Então a equação em z, $\left|z - z_0\right| = k$, onde k é uma constante real positiva, representa uma circunferência de centro no afixo de z_0 e raio k .

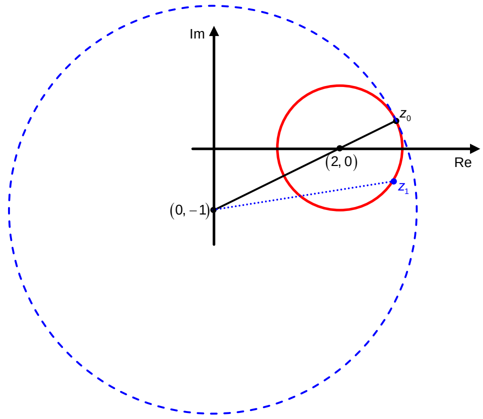
Sendo assim, quando o enunciado nos diz para considerar os complexos que satisfazem $\left|z - 2\right| = 1$, isso é equivalente a considerar os complexos cujos afixos formam uma circunferência de centro em $\left(2, 0\right)$ e raio 1:



Como queremos maximizar o valor de $\left|z + i\right|$, isso é equivalente, pela interpretação geométrica, a maximizar $\text{dist}\left(z, -i\right)$. Ou seja, a distância de um ponto ao afixo do complexo $w = -i$ (distância ao ponto $\left(0, -1\right)$). Isso acontece quando consideramos o ponto diametricamente oposto a $w = -i$ pelo segmento que liga ele ao centro $\left(2; 0\right)$:

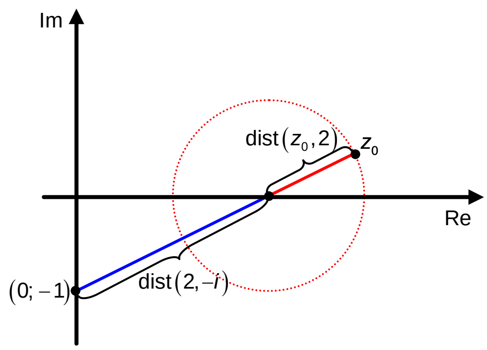


Observe que esse ponto tem a distância máxima, pois se considerarmos qualquer outro ponto z_1 teremos a seguinte situação:



Então, como qualquer ponto, exceto por z_0, fica interior à circunferência com centro em $\left(0, -1\right)$ e raio $\text{dist}\left(-i, z_0\right)$, esse ponto terá uma distância menor do que z_0 a $w = -i$.

Confirmado que z_0 é o ponto que maximiza $\text{dist}\left(z, -i\right)$, podemos escrever essa distância como $\text{dist}\left(z_0, -i\right) = \text{dist}\left(z_0, 2\right) + \text{dist}\left(2, -i\right)$:

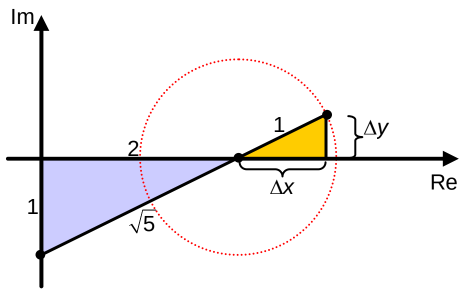


Então

$$\text{dist}\left(z_0, -i\right) = \text{dist}\left(z_0, 2\right) + \text{dist}\left(2, -i\right) = 1 + \left|2 + i\right| = 1 + \sqrt{2^2 + 1^2} = 1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{dist}\left(z_0, -i\right) = 1 + \sqrt{5}}.$$

b) Observe que podemos traçar duas alturas no desenho, obtendo dois triângulos semelhantes como indicado:



Então, pela semelhança temos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta y}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \Delta y = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Então, nosso ponto z_0 terá afixo de coordenadas

$$\boxed{z_0 = \left(2 + \Delta x, \Delta y\right) = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)}$$

Portanto, z_0 é o complexo $\boxed{z_0 = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + i\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}$.

QUESTÃO 24

Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(A)$ e $n(B)$

c) $P(A)$ e $P(B)$

Resolução

a) Veja que para cada lançamento do dado, temos seis possibilidades de resultados, ou seja, pode ser obtido qualquer número que pertença ao conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, no lançamento simultâneo de três dados, temos:

$$\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 216 \text{ possibilidades}$$

Portanto, $\boxed{n(\Omega) = 216}$.

b) Para encontrarmos a quantidade de elementos do evento A, desconsiderando permutações, temos os seguintes casos de soma 9:

$$1+2+6$$
$$1+3+5$$
$$2+2+5$$
$$2+3+4$$
$$3+3+3$$
$$4+4+1$$

Note que, para quaisquer valores, podemos fazer a permutação entre os números obtidos. Assim, temos:

I. Para faces com números distintos, temos $3!$ possibilidades para cada caso. Como são três casos, então $3! \cdot 3 = 18$ possibilidades.

II. Para faces com apenas dois números iguais, temos $P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!}$ possibilidades para cada caso. Como são dois casos, então $2 \cdot \frac{3!}{2!} = 6$ possibilidades.

III. Para faces com todos números iguais, temos uma única possibilidade. Como existe somente um caso, então temos apenas 1 possibilidade.

Logo, $n(A) = 18 + 6 + 1 \Leftrightarrow \boxed{n(A) = 25}$

Da mesma maneira, podemos repetir o procedimento para o evento B. Os casos, descontando permutação, de soma 10 são:

$$1+3+6$$
$$1+4+5$$
$$2+2+6$$
$$2+3+5$$
$$2+4+4$$
$$3+3+4$$

Note que, para quaisquer valores, podemos fazer a permutação entre os números obtidos. Assim, temos:

I. Para faces com números distintos, temos $3!$ possibilidades para cada caso. Como são três casos, então $3! \cdot 3 = 18$ possibilidades.

II. Para faces com apenas dois números iguais, temos $\frac{3!}{2!}$ possibilidades para cada caso. Como são três casos, então $3 \cdot \frac{3!}{2!} = 9$ possibilidades.

Logo, $n(B) = 18 + 9 \Leftrightarrow \boxed{n(B) = 27}$.

c) Como nosso espaço amostral é equiprovável, calculamos as probabilidades pela razão entre o número de elementos do evento e número de elementos do espaço amostral:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{25}{216}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

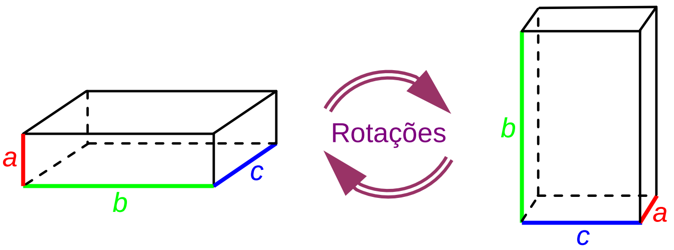
Portanto, $\boxed{P(A) = \frac{25}{216}}$ e $\boxed{P(B) = \frac{1}{8}}$.

QUESTÃO 25

Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Resolução

Primeiramente observe que apenas permutando o valor do comprimento do lado de um paralelepípedo retângulo, obtemos outro congruente a ele por rotações:



Assim devemos separar nossa contagem em três casos (1) quando temos as três dimensões iguais, (2) quando temos duas dimensões iguais e uma distinta e (3) quando temos três dimensões distintas.

Caso (1): Como as três dimensões são iguais, devemos apenas escolher seu comprimento, onde temos 10 casos (inteiros positivos de 1 até 10).

Caso (2): Devemos escolher um valor para dois lados e um valor distinto para outro lado. Note que pela simetria descrita no inicio da resolução, não existe a necessidade de se considerar quais dimensões vão assumir quais valores. Assim temos $10 \cdot 9 = 90$ opções.

Caso (3): Com as três dimensões distintas, escolhemos três valores para as dimensões, e pela simetria descrita no inicio, não precisamos nos preocupar com a ordem, assim temos $C_{10,3} = 120$ casos.

Então o número de palalelepípedos é $\boxed{10 + 90 + 120 = 220}$.

QUESTÃO 26

Considere o sistema linear nas incógnitas *x*, *y* e *z*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\operatorname{sen}\theta)y + 4z = 0 \\ 2x + (1-\cos 2\theta)y + 16z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.
b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Resolução

a) Como esse sistema é homogêneo, portanto sempre possível, para ter o caso de sistema possível e indeterminado, basta impor que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Assim:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 4 \\ 2 & 1-\cos 2\theta & 16 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ 2 & 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ 1 & \operatorname{sen}^2\theta & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ (-1)^2 & \operatorname{sen}^2\theta & 2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Observe que tal determinante é um determinante de Vandermonde. Logo, temos:

$$[2 - \operatorname{sen}\theta] \cdot [2 - (-1)] \cdot [\operatorname{sen}\theta - (-1)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}\theta = -1$$

Como $-1 \le \operatorname{sen}\theta \le 1,\ \forall \theta \in \mathbb{R}$, descartamos a possibilidade $\operatorname{sen}\theta = 2$. Assim, ficamos com:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = -1 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

b) Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = -1 \\ 1 - \cos 2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = 2 \cdot (-1)^2 = 2 \end{cases}$$

Assim, o temos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 16z = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira equação na segunda, temos:

$$6z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Voltando a qualquer uma das equações, ficamos com:

$$x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

Assim, fazendo $x = \alpha$, temos:

$$y = -\alpha$$

Portanto, o conjunto-solução do sistema pode ser descrito como:

$$\boxed{V = \{(\alpha, -\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

QUESTÃO 27

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x)\operatorname{cotg} x.$$

Resolução

Em toda resolução, usaremos o fato de que $x \in [0, 2\pi]$.

Primeira inequação:

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0$$

(I) De início, observamos que:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -1 - 1 \le \cos x - 1 \le 1 - 1 \Leftrightarrow -2 \le \cos x - 1 \le 0$$

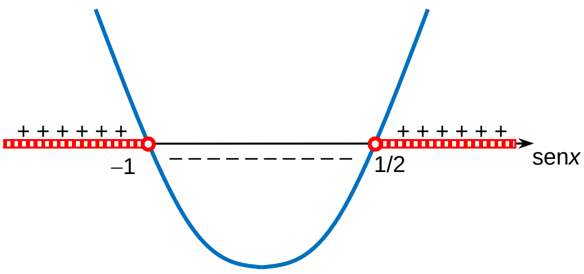
Como o denominador não pode ser nulo, restringimos a:

$$\cos x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < 1 \Leftrightarrow x \in \left]0, 2\pi\right[$$

(II) A partir disso, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0 \\ \cos x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0$$

Resolvendo essa inequação, temos:

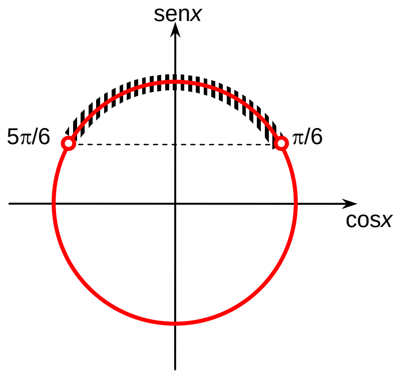


$$\operatorname{sen} x < -1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$$

Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, a desigualdade $\operatorname{sen} x < -1$ é impossível, de modo que ficamos com:

$$\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$$

No ciclo trigonométrico:



$$x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

(III) Assim, a primeira inequação tem conjunto verdade:

$$V_I = \left]0, 2\pi\right[\cap \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\Leftrightarrow V_I = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

Segunda inequação:

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x) \cdot \operatorname{cotg} x$$

(IV) Como condição de existência para $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$, impomos que:

$$x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

(V) Lembrando que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, temos:

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x) \cdot \operatorname{cotg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow$$

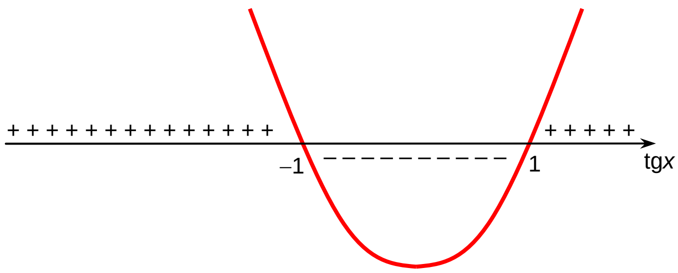
$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} < \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2 x}$$

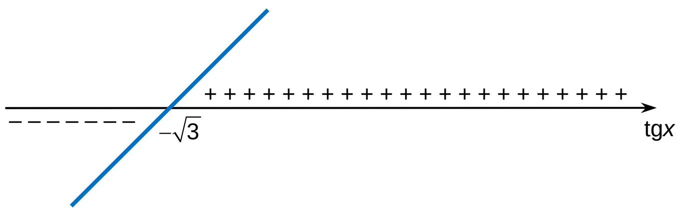
Multiplicando ambos os membros da inequação por $\operatorname{tg}^2 x$, que existe e é sempre positivo para $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, temos a manutenção do sinal da inequação:

$$\operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}^2 x < \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) < \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

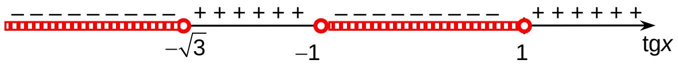
$$(\operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot (\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) < 0$$

Analisando o sinal de cada fator separadamente, temos:





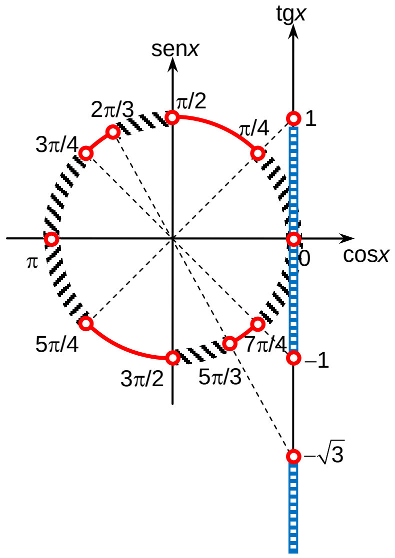
Analisando o sinal do produto:



Temos, assim:

$$\text{tg}\,x < -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad -1 < \text{tg}\,x < 1$$

No ciclo trigonométrico, analisando os intervalos em que essas inequações são satisfeitas, e já impondo a restrição $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, temos:



(VI) Assim, a segunda inequação tem conjunto verdade:

$$V_{II} = \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$$

Sistema formado pelas duas inequações:

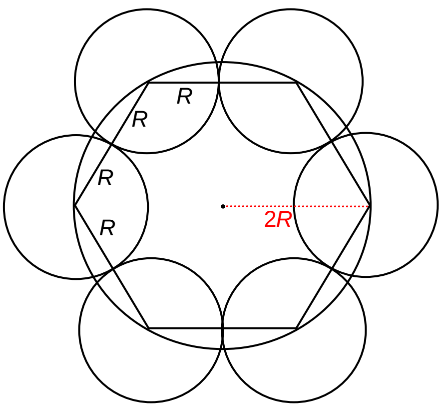
$$V = V_I \cap V_{II} \Leftrightarrow \boxed{V = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[}$$

QUESTÃO 28

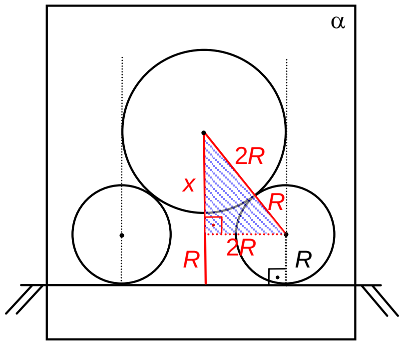
Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Resolução

Vejamos a figura que ilustra a vista superior das circunferências máximas de cada esfera da situação descrita. Note também que a distância entre um vértice qualquer do hexágono e o seu centro é $2R$, assim, a distância entre dois vértices opostos é $4R$, deste modo, a superfície da sétima esfera se projeta exatamente sobre os vértices do hexágono.



A intersecção de um plano α, perpendicular à superfície horizontal, que passa pelo centro da sétima esfera e por dois vértices opostos do hexágono nos fornece a seguinte imagem:



Note que a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal é dada por $d = x + R$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:

$$(3R)^2 = (2R)^2 + x^2 \Rightarrow x = R\sqrt{5}$$

Portanto, $d = x + R = R\sqrt{5} + R \Rightarrow \boxed{d = R \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)}$.

QUESTÃO 29

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a 26π cm.

Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Resolução

Dado que os raios das circunferências estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ podemos representar cada raio por:

$$R_1 = 3x,\ R_2 = x,\ R_3 = \frac{x}{3}.$$

Sabemos, ainda, que a soma dos comprimentos das circunferências é 26π, assim:

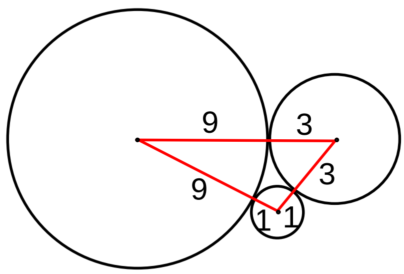
$$C_1 + C_2 + C_3 = 2\pi \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = 26\pi$$

$$R_1 + R_2 + R_3 = 13$$

$$3x + x + \frac{x}{3} = 13 \Leftrightarrow x = 3$$

Logo, os raios das circunferências medem 9 cm, 6 cm e 1 cm.

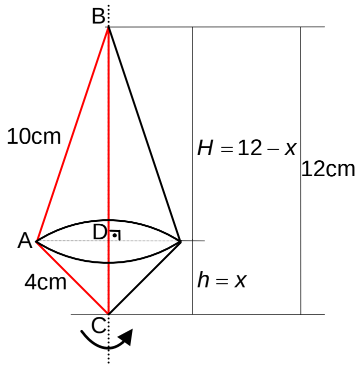
a) Devemos determinar a área S do triângulo formado pelos centros dessas circunferências, observe a figura:



O triângulo formado tem os lados medindo 12 cm, 10 cm, 4 cm e semiperímetro $p = 13\text{ cm}$. Portanto, sua área é:

$$S = \sqrt{13 \cdot (13-12) \cdot (13-10) \cdot (13-4)} = \sqrt{13 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9} = \boxed{3 \cdot \sqrt{39}\text{ cm}^2}$$

b) Rotacionando o triângulo em torno do seu lado de medida igual a 12 cm, obteremos dois cones. Um cone tem altura h e, o outro cone, tem altura H; de tal forma que $H+h=12\text{ cm}$, observe a figura abaixo.



Vamos determinar o raio $\overline{AD}$ da circunferência que é a base dos cones obtidos. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e ACD obtemos sistema:

$$\begin{cases} 10^2=(12-x)^2+\left(\overline{AD}\right)^2 \\ 4^2=x^2+\left(\overline{AD}\right)^2 \end{cases}$$

Subtraindo as equações obtemos

$$84=144-24x \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\text{cm}.$$

Logo,

$$\left(\overline{AD}\right)^2=16-\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AD}=\frac{\sqrt{39}}{2}\text{cm}.$$

Finalmente, o volume do sólido será a soma dos volumes de cada cone, temos:

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}\cdot S_b\cdot H+\frac{1}{3}\cdot S_c\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_b\cdot(H+h)$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{39}{4}\cdot 12$$

$$\boxed{V=39\pi\text{ cm}^3}$$

QUESTÃO 30

Um cilindro reto de altura $h=1$ cm tem sua base no plano xy definitiva por

$$x^2+y^2-2x-4y+4\le 0$$

Um plano, contendo a reta $y-x=0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

Resolução

Completando quadrados para a inequação apresentada acima, temos:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2\le 1$$

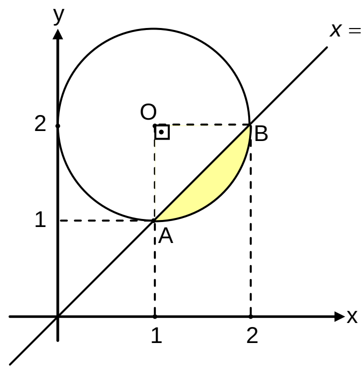
Ou seja, supondo que x e y sejam medidos em cm, a base do cilindro é um círculo de centro $O=(1,2)$ e raio $r=1\text{ cm}$. Sendo A e B as intersecções da reta $y-x=0$ com a circunferência que forma a base da superfície cilíndrica, temos:

$$\begin{cases} x^2-2x+1+y^2-4y+4=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2+x^2-2x-4x+4=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\text{ cm} \\ \text{ou} \\ x=1\text{ cm} \end{cases}.$$

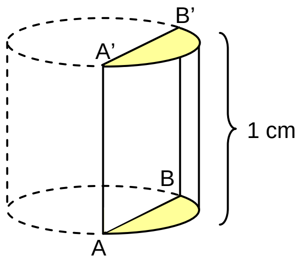
Logo, temos $A=(1,1)$ e $B=(2,2)$.

Analisando a situação no plano *xy*, temos a seguinte ilustração:



Podemos notar que $AB=r\sqrt{2} \Leftrightarrow AB=\sqrt{2}\text{ cm}$.

Em três dimensões, temos o seguinte sólido:



Logo, temos que a área total, é:

$$S_t=2\cdot S_{Base}+S_{lateral}$$

A área da base é formada por um setor circular de $\frac{\pi}{2}$ rad menos o triângulo OAB e a área lateral é formada pelo retângulo $ABB'A'$ mais um quarto da superfície lateral de um cilindro reto. Deste modo, temos,

$$S_{total}=2\cdot S_{Base}+S_{lateral} \Leftrightarrow S_t=2\cdot\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\right)+(AB)\cdot h+\frac{2\pi rh}{4} \Leftrightarrow$$

$$S_t=2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\cdot 1+\frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{S_t=\left(\pi+\sqrt{2}-1\right)\text{cm}^2}$$

Nota: para a resolução desta questão foi necessário supor que x e y são medidos em cm, entretanto, tal informação deveria constar no enunciado da questão.

Equipe desta resolução

Matemática

Alessandro Fonseca Esteves coelho
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Rodrigo do Carmo Silva
Thais de Almeida Guizellini
Vinício Merçon Poltronieri

Revisão

Edson Vilela Gadbem
Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Felipe Eboli Sotorilli

Digitação, Diagramação e Publicação

Allan Cavalcanti de Moura
Patrícia Beijinho Teixeira
Luiz André Mazzarid