Fez

ELITE

PRÉ-VESTIBULAR

campinas

Aprovou!

Elite Resolve

ITA 2013

Matemática

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$M_{mxn}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m\,x\,n$
$\det(M)$: determinante da matriz M
M^t : transposta da matriz M
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária, $i^2=-1$
$|z|$: módulo do número $z\in\mathbb{C}$
$\text{Re }z$: parte real do número $z\in\mathbb{C}$
$Arg\,z$: argumento principal de $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $Arg\,z\in[0,2\pi[$
$A\setminus B$: $\{x : x\in A \text{ e } x\notin B\}$
$[a,b]$: $\{x\in\mathbb{R}; a\le x\le b\}$
$[a,b[$: $\{x\in\mathbb{R}; a\le x< b\}$
$]a,b[$: $\{x\in\mathbb{R}; a< x< b\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n$: $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k, k\in\mathbb{N}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k, k\in\mathbb{N}$
A^C : conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.

OBSERVAÇÃO: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 01

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
II. $(A\cap C)\setminus B = A\cap B^C\cap C$;
III. $(A\setminus B)\cap(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$;

é(são) verdadeira(s):
a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas I e III.
e) todas.

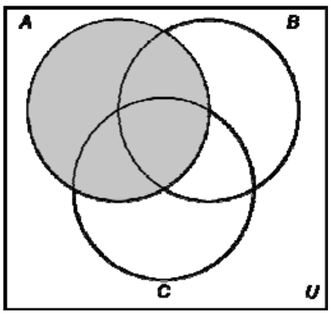
Resolução — Alternativa C

I. Correta. Temos que:

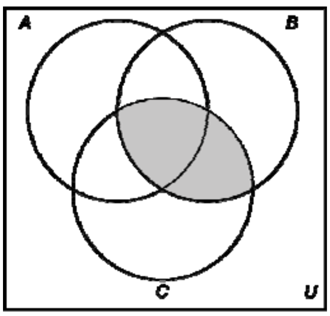
$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C=A\cap\left(B^C\cup C^C\right)=$$
$$\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A\cap C^C\right)=(A-B)\cup(A-C)$$

Visualizando pelos diagramas de Venn-Euler:
- Lado esquerdo: $A-(B\cap C)$

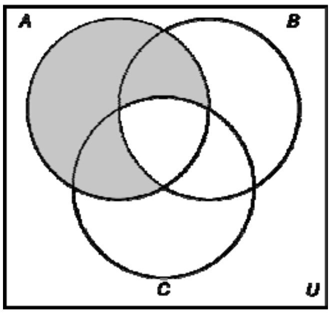
A



$B\cap C$

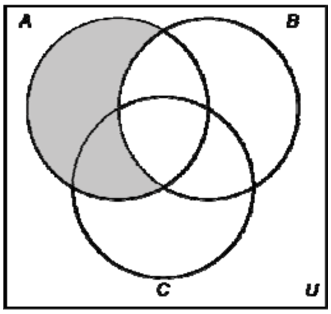


$A-(B\cap C)$

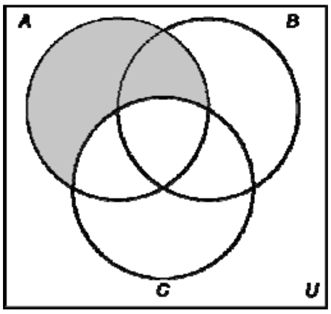


- Lado direito: $(A-B)\cup(A-C)$

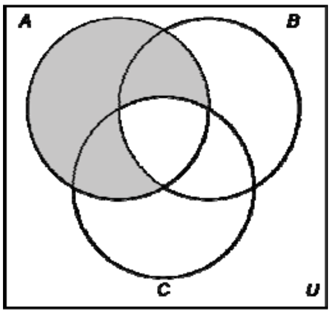
$A-B$



$A-C$



$(A-B)\cup(A-C)$

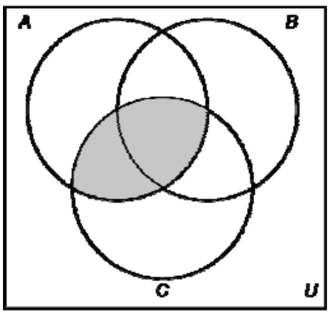


II. Correta. Temos que:

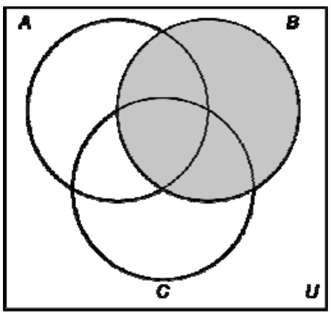
$$(A\cap C)-B=(A\cap C)\cap B^C=A\cap B^C\cap C$$

Visualizando pelos diagramas de Venn-Euler:
- Lado esquerdo: $(A\cap C)-B$

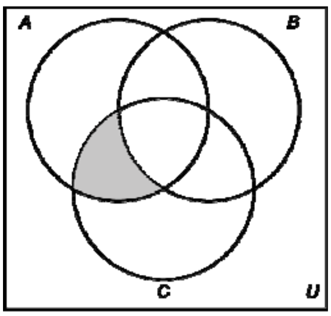
$A\cap C$



B

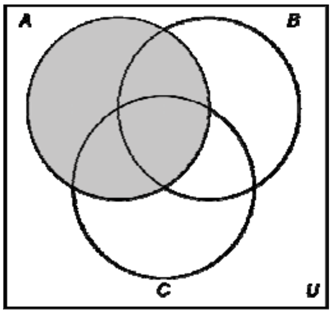


$A-(B\cap C)$

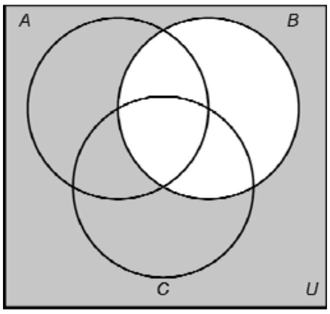


- Lado direito: $A \cap B^C \cap C$

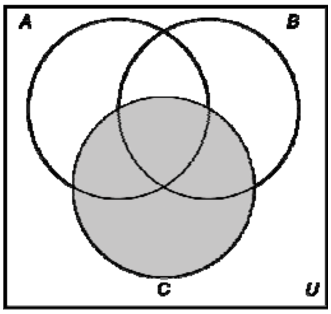
A



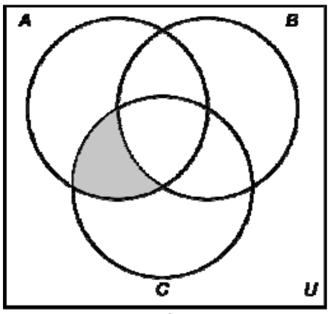
B^C



C



$A \cap B^C \cap C$



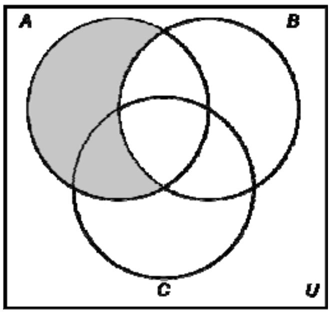
III. Incorreta. Podemos construir um contraexemplo.
Fazendo, por exemplo, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$, temos:

$$\begin{cases} A - B = \{1\} \\ B - C = \{2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A-B) \cap (B-C) = \varnothing \\ (A-B) - C = \{1\} \end{cases} \Rightarrow (A-B) \cap (B-C) \neq (A-B) - C$$

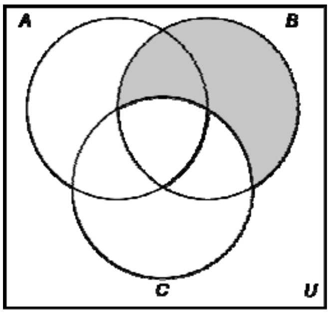
Visualizando pelos diagramas de Venn-Euler:

- Lado esquerdo: $(A-B) \cap (B-C)$

$A - B$



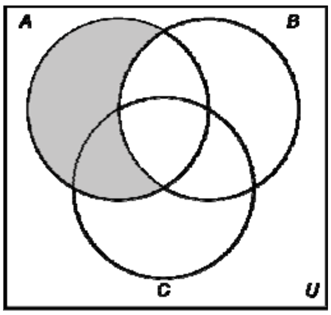
$B - C$



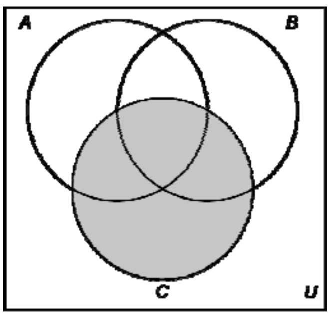
$$\Rightarrow (A-B) \cap (B-C) = \varnothing$$

- Lado direito: $(A-B) - C$

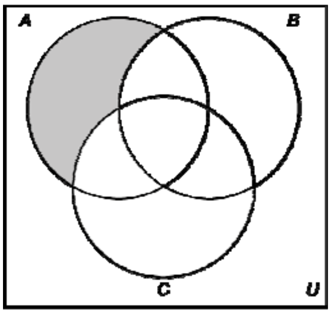
$A - B$



C



$(A-B) - C$



Assim, note que, em geral, $(A-B) \cap (B-C) \neq (A-B) - C$, já que $(A-B) \cap (B-C)$ é sempre vazio, enquanto $(A-B) - C$ contém os elementos exclusivos de *A*, não necessariamente sendo vazio.

QUESTÃO 02

A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

Resolução — Alternativa C

Para resolver a equação do enunciado, podemos chamar $\alpha = z^4$ e transformá-la em uma equação de segundo grau em α:

$$\alpha^2 - 17\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 16 \text{ ou } \alpha = 1$$

Como $\alpha = z^4$, procuraremos agora os valores de *z* que satisfazem a equação, lembrando que procuramos apenas os valores reais não negativos de *z*, já que a equação $z = |z|$ só fica satisfeita nestas condições. Logo:

$$z^4 = 16 \Rightarrow z = 2 \text{ ou } z^4 = 1 \Rightarrow z = 1$$

Assim, a soma dos possíveis valores de *z* dadas as restrições do enunciado é:

$$\boxed{2 + 1 = 3}.$$

QUESTÃO 03

Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

a) $\sqrt{29}$. **b)** $\sqrt{41}$. **c)** $3\sqrt{5}$. **d)** $4\sqrt{3}$. **e)** $3\sqrt{6}$.

Resolução — Alternativa B

Na equação dada, vamos chamar $z - 5 + 3i$ de *w*.

Assim, a equação a ser resolvida fica $w^4 = 1 \Leftrightarrow w^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (w^2 - 1)(w^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow w = \pm 1, \pm i$.

Com isso, temos:

Se $w = 1 \Rightarrow z - 5 + 3i = 1 \Leftrightarrow z = 6 - 3i$;
Se $w = -1 \Rightarrow z - 5 + 3i = -1 \Leftrightarrow z = 4 - 3i$;
Se $w = i \Rightarrow z - 5 + 3i = i \Leftrightarrow z = 5 - 2i$;
Se $w = -i \Rightarrow z - 5 + 3i = -i \Leftrightarrow z = 5 - 4i$;

Sabendo que em um número complexo da forma *a* + *b i* o argumento principal é dado por $\text{Arg}(z) = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$, temos:

$$\text{Arg}(6-3i) = \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Arg}(5-2i) = \text{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Arg}(4-3i) = \text{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) \qquad \text{Arg}(5-4i) = \text{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

Assim, o número complexo que apresenta o menor argumento principal é aquele que tem a menor tangente, ou seja, $z = 5 - 4i$.

Logo, o seu módulo é $|5 - 4i| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$.

QUESTÃO 04

A soma de todos os números reais *x* que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

a) 8. **b)** 12. **c)** 16. **d)** 18. **e)** 20.

Resolução **Alternativa D**

Rearranjando a equação, temos:

$$8^{\sqrt{x+1}}+44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)+64=19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^3-19\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^2+44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)+64=0$$

Assim, fazendo a substituição $2^{\sqrt{x+1}}=y$, temos a equação polinomial:

$$y^3-19y^2+44y+64=0$$

Por verificação direta, temos que -1 é raiz dessa equação. Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

-1	1	-19	44	64
	1	-20	64	0

Portanto:

$$y^3-19y^2+44y+64=0\Leftrightarrow(y+1)\cdot(y^2-20y+64)=0$$

Resolvendo a equação $y^2-20y+64=0$, temos $y=4$ ou $y=16$.

Assim, as soluções da equação de grau 3 são:

$$y=-1 \quad \text{ou} \quad y=4 \quad \text{ou} \quad y=16.$$

Voltando para a variável x:

- $2^{\sqrt{x+1}}=-1$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois $2^t>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$
- $2^{\sqrt{x+1}}=4=2^2\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x=3$
- $2^{\sqrt{x+1}}=16=2^4\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=4\Leftrightarrow x=15$

Portanto, a soma S dos números reais que satisfazem a equação dada é:

$$S=3+15\Leftrightarrow\boxed{S=18}$$

QUESTÃO 05

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}}=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2+b)+\ln 8=\ln 5,$$

um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** 1. **c)** $\sqrt{2}$. **d)** 2. **e)** $3\sqrt{2}$.

Resolução **Alternativa A**

Observe que para a expressão $\sqrt{a\sqrt{b}}$ estar definida em $\mathbb{R}$, a e b devem ser não negativos. Além disso, se algum deles fosse zero, tal expressão seria também igual a zero, o que não é o caso. Assim, a e b devem ser números reais positivos.

A partir dessa observação, temos que:

$$\sqrt{a\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\sqrt{b}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2\cdot b=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{16\cdot b}$$

Por outro lado:

$$\ln(a^2+b)+\ln 8=\ln 5\Leftrightarrow\ln(a^2+b)=\ln 5-\ln 8=\ln\left(\frac{5}{8}\right)\Leftrightarrow a^2+b=\frac{5}{8}$$

Substituindo uma expressão na outra, temos:

$$\frac{1}{16\cdot b}+b=\frac{5}{8}\Leftrightarrow b^2-\frac{5}{8}\cdot b+\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow b=\frac{1}{2} \text{ ou } b=\frac{1}{8}$$

(I) Para $b=\frac{1}{2}$, temos:

$$a^2=\frac{1}{16\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{16}\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Como a deve ser positivo, $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(II) Para $b=\frac{1}{8}$, temos:

$$a^2=\frac{1}{16\cdot\frac{1}{8}}=\frac{2}{4}\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como a deve ser positivo, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, os pares ordenados (a,b) que resolvem o problema são:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8}\right),$$

de modo que os possíveis valores do quociente $\frac{a}{b}$ são:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\boxed{\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{8}}\Leftrightarrow\boxed{\frac{a}{b}=4\sqrt{2}}$$

QUESTÃO 06

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por

$$f(x)=e^{x^2+ax+b} \quad \text{e} \quad g(x)=\ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1)=1=f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g\circ f$ que

a) $g\circ f(1)=\ln 3$.

b) $\nexists\, g\circ f(0)$.

c) $g\circ f$ nunca se anula.

d) $g\circ f$ está definida apenas em $\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$.

e) $g\circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Resolução **Alternativa E**

Temos que:

$$f(x)=1\Leftrightarrow e^{x^2+ax+b}=e^0\Leftrightarrow x^2+a\cdot x+b=0$$

Assim dizer que $f(-1)=1=f(-2)$ é equivalente a dizer que -1 e -2 são as raízes da equação do segundo grau $x^2+a\cdot x+b=0$. A partir disso, usando as relações de soma e produto, vem que:

$$\begin{cases}(-1)+(-2)=-\frac{a}{1}\Leftrightarrow a=3\\(-1)\cdot(-2)=\frac{b}{1}\Leftrightarrow b=2\end{cases}$$

Portanto, as funções dadas são:

$$\begin{cases}f(x)=e^{x^2+3x+2}\\g(x)=\ln\left(\frac{3\cdot x}{3\cdot 2}\right)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases},$$

e a função composta $g\circ f$ é dada por:

$$g\circ f(x)=\ln\left(\frac{f(x)}{2}\right)=\ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right)=\ln\left(e^{x^2+3x+2}\right)-\ln 2\Leftrightarrow$$
$$g\circ f(x)=x^2+3x+2-\ln 2$$

Julgamos agora cada alternativa.

a) Incorreta.

$$g\circ f(1)=1^2+3\cdot 1+2-\ln 2=6-\ln 2\neq\ln 3$$

b) Incorreta. A composta $g\circ f$ está definida para todo x real.

c) Incorreta. Temos que:

$$g\circ f(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+2-\ln 2=0$$

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot(2-\ln 2)=1+4\cdot\ln 2>0$$

Assim, tal equação tem duas raízes reais distintas.

d) Incorreta. A composta $g\circ f$ está definida para todo x real.

e) Correta. Conforme já explicado na justificativa da alternativa (c), a equação $g\circ f(x)=0$ tem duas raízes reais distintas.

QUESTÃO 07

Considere funções f, g, $f+g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, $f+g$ é injetora;
II. Se f e g são sobrejetoras, $f+g$ é sobrejetora;
III. Se f e g não são injetoras, $f+g$ não é injetora;
IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f+g$ não é sobrejetora.

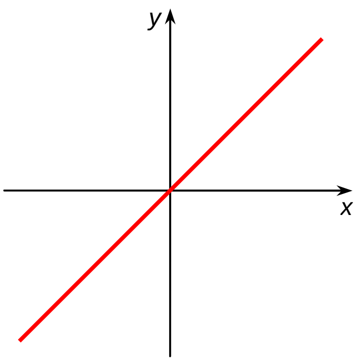
é(são) verdadeira(s)

a) nenhuma. **b)** apenas I e II. **c)** apenas I e III.
d) apenas III e IV. **e)** todas.

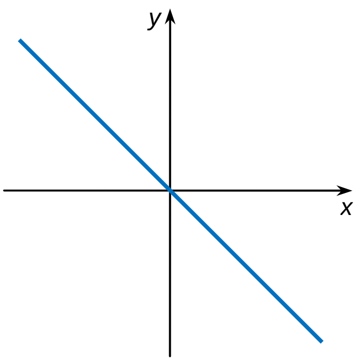
Resolução — Alternativa A

Consideremos inicialmente os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:

$f_1(x)=x$

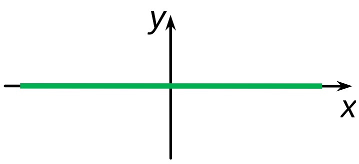


$f_2(x)=-x$



Observe que são ambas funções injetoras e sobrejetoras.
Já a soma delas é:

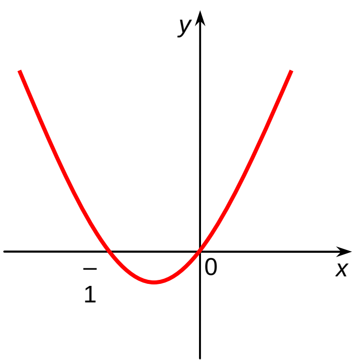
$$f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)=x+(-x)=0\ ,\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}\ .$$



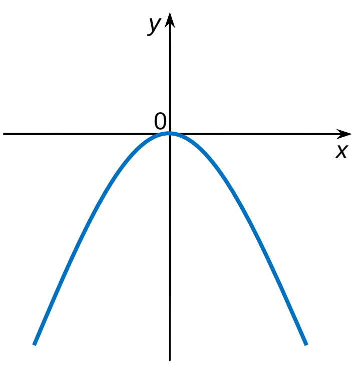
Como a função identicamente nula não é injetora nem sobrejetora, tal contraexemplo torna as **afirmações (I) e (II) falsas**.

Consideremos agora os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:

$f_3(x)=x^2+x$



$f_4(x)=-x^2$



Observe que tais funções não são injetoras nem sobrejetoras.
Entretanto, a soma delas é dada por:

$$f_3(x)+f_4(x)=(x^2+x)+(-x^2)=x\ ,\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Assim, tal soma corresponde à função $f_1(x)=x$, que é tanto injetora quanto sobrejetora, como já apresentado no início da resolução. Tal contraexemplo torna as **afirmações (III) e (IV) falsas**.

Assim, nenhuma afirmação apresentada é verdadeira.

QUESTÃO 08

Seja $n>6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução — Alternativa C

Seja $n=6\cdot q+r$, com q inteiro positivo e $r\in\{1,2,3,4,5\}$ (r não pode ser zero já que n não é divisível por 6). Segue que:

$$n^2=(6\cdot q+r)^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot r+r^2$$

Analisemos agora as possibilidades para r.

(I) $r=1$:

$$n^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot 1+1^2=6\cdot(6\cdot q^2+2\cdot q)+1$$

(II) $r=2$:

$$n^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot 2+2^2=6\cdot(6\cdot q^2+4\cdot q)+4$$

(III) $r=3$:

$$n^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot 3+3^2=6\cdot(6\cdot q^2+6\cdot q+1)+3$$

(IV) $r=4$:

$$n^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot 4+4^2=6\cdot(6\cdot q^2+8\cdot q+2)+4$$

(V) $r=5$:

$$n^2=36\cdot q^2+12\cdot q\cdot 5+5^2=6\cdot(6\cdot q^2+10\cdot q+4)+1$$

As quantidades entre parênteses são os quocientes de cada divisão de n^2 por 6. Temos que:

- $(6\cdot q^2+2\cdot q)$ é par;
- $(6\cdot q^2+4\cdot q)$ é par;
- $(6\cdot q^2+6\cdot q+1)$ é ímpar;
- $(6\cdot q^2+8\cdot q+2)$ é par;
- $(6\cdot q^2+10\cdot q+4)$ é par.

Portanto, o único caso em que o quociente da divisão de n^2 por 6 é ímpar é quando $\boxed{r=3}$.

QUESTÃO 09

Considere a equação $\sum_{n=0}^{5}a_nx^n=0$ em que a soma das raízes é igual a -2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0=1$. Então $\sum_{n=0}^{5}a_n$ é igual a

a) -21. **b)** $-\frac{2}{3}$. **c)** $\frac{21}{32}$.
d) $\frac{63}{32}$. **e)** 63.

Resolução **Alternativa D**

Temos a equação:

$$a_5\cdot x^5+a_4\cdot x^4+a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0=0$$

Sendo q a razão da progressão geométrica, de acordo com as relações de Girard, temos para a soma das raízes:

$$S=-\frac{a_4}{a_5}\Leftrightarrow -2=-\frac{a_4}{a_5}\Leftrightarrow \frac{a_5}{a_4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$$

Portanto a progressão geométrica é:

$$\text{P.G.}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}\right).$$

Assim, a soma pedida é dada por:

$$\sum_{n=0}^{5}a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{5}a_n=\frac{63}{32}}$$

Alternativamente, podemos também utilizar diretamente a expressão da soma dos 6 primeiros termos da progressão geométrica:

$$\sum_{n=0}^{5}a_n=\frac{a_0\cdot(1-q^6)}{1-q}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{5}a_n=\frac{63}{32}}$$

QUESTÃO 10

Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}=12$. Então a soma das soluções z, com $\operatorname{Re} z>0$, da equação $z^4=\lambda-32$, é

a) $\sqrt{2}$. **b)** $2\sqrt{2}$. **c)** $4\sqrt{2}$. **d)** 4. **e)** 16.

Resolução **Alternativa B**

Temos que:

$$\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}=12\Leftrightarrow \sqrt{2\lambda+17}=12-\sqrt{\lambda+9}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos que:

$$\left(\sqrt{2\lambda+17}\right)^2=\left(12-\sqrt{\lambda+9}\right)^2\Leftrightarrow 2\lambda+17=144-24\sqrt{\lambda+9}+\lambda+9\Leftrightarrow$$
$$24\sqrt{\lambda+9}=136-\lambda$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(24\sqrt{\lambda+9}\right)^2=(136-\lambda)^2\Leftrightarrow 576(\lambda+9)=18496-272\lambda+\lambda^2\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2-848\lambda+13312=0\Leftrightarrow \lambda=832\ \text{ ou }\ \lambda=16$$

Como no desenvolvimento das contas tivemos que elevar ambos os membros da equação ao quadrado, é necessário fazer verificação na equação original.

(I) Para $\lambda=832$:

$$\sqrt{832+9}+\sqrt{2\cdot 832+17}=29+41=70\neq 12$$

Logo, $\lambda=832$ **não é** raiz da equação.

(II) Para $\lambda=16$:

$$\sqrt{16+9}+\sqrt{2\cdot 16+17}=5+7=12$$

Logo, $\lambda=16$ **é** raiz da equação.

Agora, com relação à equação $z^4=\lambda-32$, temos:

$$z^4=16-32\Leftrightarrow z^4=-16=2^4\cdot(\cos\pi+i\cdot\operatorname{sen}\pi)\Leftrightarrow$$

$$z_k=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{4}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{4}\right)\right],\ \text{para}\ k=0,1,2,3$$

Assim, as soluções dessa outra equação são:

$$z_0=2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$
$$z_1=2\cdot\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right]=-\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$
$$z_2=2\cdot\left[\cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right]=-\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$$
$$z_3=2\cdot\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right]=\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$$

Assim, a soma S das soluções z cuja parte real é positiva são:

$$S=z_0+z_3=\left(\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \boxed{S=2\sqrt{2}}$$

QUESTÃO 11

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{1}{3}$ e $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A\setminus B$, $A\cup B$ e $A^C\cup B^C$ são, respectivamente,

a) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. **b)** $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. **c)** $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$. **e)** $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Resolução **Alternativa E**

(I) Temos que:

$$p(A\setminus B)=p(A)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \boxed{p(A\setminus B)=\frac{1}{4}}$$

(II) Temos que:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \boxed{p(A\cup B)=\frac{7}{12}}$$

(III) Temos que:

$$p(A^C\cup B^C)=p\left((A\cap B)^C\right)=1-p(A\cap B)=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \boxed{p(A^C\cup B^C)=\frac{3}{4}}$$

QUESTÃO 12

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.
II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que
a) dos três resultados, I é o mais provável.
b) dos três resultados, II é o mais provável.
c) dos três resultados, III é o mais provável.
d) os resultados I e II são igualmente prováveis.
e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Resolução **Alternativa D**

(I) Para a ocorrência de duas caras em dois lançamentos, temos:

$$p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(II) Já para a ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos, pela Lei Binomial da Probabilidade, temos:

$$p_2=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=4\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(III) Também para a ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos, novamente pela Lei Binomial da Probabilidade, temos:

$$p_3=\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$$

Assim, como $\frac{7}{32}<\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, temos a comparação:

$$p_3<p_2=p_1$$

Portanto, não há um único evento mais provável que os demais, sendo os eventos I e II equiprováveis.

QUESTÃO 13

Considere $A\in\mathbb{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ com $\det(A)=\sqrt{6}$ e $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Se $\det(\alpha A^t A A^t)=\sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$. **b)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **c)** $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$. **d)** 1. **e)** $\sqrt{216}$.

Resolução — **Alternativa C**

Sendo a matriz quadrada de ordem 5 e $\alpha \neq 0$, temos que:

$$\det(\alpha \cdot A^t \cdot A \cdot A^t) = \alpha^5 \cdot \det(A^t \cdot A \cdot A^t) \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{6}\alpha^2 = \alpha^5 \cdot \det(A^t \cdot A \cdot A^t) \Leftrightarrow \alpha^3 \cdot \det(A^t \cdot A \cdot A^t) = \sqrt{6}$$

Pelo teorema de Binet, temos:

$$\alpha^3 \cdot \det(A^t \cdot A \cdot A^t) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \alpha^3 \cdot \det(A^t) \cdot \det(A) \cdot \det(A^t) = \sqrt{6}$$

Como $\det(A^t) = \det(A)$, segue que:

$$\alpha^3 \cdot \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \alpha^3 \cdot (\sqrt{6})^3 = \sqrt{6} \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{6}$$

Sendo α real:

$$\alpha^3 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}}$$

QUESTÃO 14

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - sen^8 x + 4 sen^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;
II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;
III. Se $a = 1$, então $n = 7$;
IV. Se $a = 3$, então $n = 2$;

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas III. **c)** apenas I e III.
d) apenas II e IV. **e)** todas.

Resolução — **Alternativa E**

Fatorando a expressão dada e usando conceitos da trigonometria de modo a obtermos uma expressão contendo somente senos:

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = (\cos^4 x + \text{sen}^4 x)(\cos^4 x - \text{sen}^4 x) \Rightarrow$$
$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = (\cos^4 x + \text{sen}^4 x)(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) =$$
$$= ((1 - \text{sen}^2 x)^2 + \text{sen}^4 x) \cdot 1 \cdot (1 - 2\text{sen}^2 x) = 1 - 4\text{sen}^2 x + 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^6 x$$

Assim, temos:

$\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\text{sen}^6 x = a \Leftrightarrow 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 1 - a = 0$, cujas soluções são $\text{sen}^2 x = \dfrac{4 \pm \sqrt{24a - 8}}{12}$.

Com isso, analisando cada item, concluímos:

I. Verdadeira: Se a = 0, $\text{sen}^2 x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-8}}{12}$, e como sen²x é real e positivo, a equação não tem solução;

II. Verdadeira: Se $a = \frac{1}{2}$, $\text{sen}^2 x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{12} = \dfrac{4 \pm 2}{12}$, e assim, as soluções são:

- $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$ (4 soluções) ou
- $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, que, analogamente ao caso anterior, possui 4 soluções.

Portanto, a equação tem 8 soluções;

III. Verdadeira: Se a = 1, $\text{sen}^2 x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16}}{12} = \dfrac{4 \pm 4}{12}$, e assim, as soluções são:

- $\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi\}$ (3 soluções) ou
- $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (4 soluções para x).

Portanto, a equação tem 7 soluções;

IV. Verdadeira: Se a = 3, $\text{sen}^2 x = \dfrac{4 \pm \sqrt{64}}{12} = \dfrac{4 \pm 8}{12}$ e assim, as soluções são $\text{sen}\, x = \pm 1 \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ (2 soluções) ou $\text{sen}^2 x = -\dfrac{1}{3}$ (0 soluções).
Portanto, a equação tem 2 soluções.

QUESTÃO 15

Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\dfrac{\text{cotg}\, x - 1}{\text{cossec}(x - \pi) - \sec(\pi - x)}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **b)** 1. **c)** $\sqrt{2}$. **d)** $\sqrt{3}$. **e)** 2.

Resolução — **Alternativa A**

Da trigonometria, temos:

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x},$$
$$\text{cossec}(x - \pi) = \frac{1}{\text{sen}(x - \pi)} = -\frac{1}{\text{sen}\, x},$$
$$\sec(x - \pi) = \frac{1}{\cos(x - \pi)} = -\frac{1}{\cos x}.$$

Assim, a expressão dada fica:

$$\frac{\text{cotg}\, x - 1}{\text{cossec}(x - \pi) - \sec(\pi - x)} = \frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} - 1}{-\dfrac{1}{\text{sen}\, x} + \dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos x - \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x}}{\dfrac{-\cos x + \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x \cos x}} = -\cos x$$

Do valor dado, cos2x = $\frac{1}{2}$, e sabendo que cos2x = 2cos²x – 1, temos que $\frac{1}{2} = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $-\cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

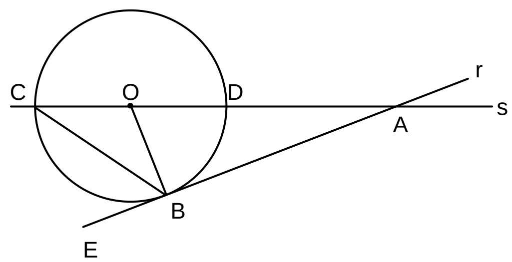
QUESTÃO 16

Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

a) $\frac{1}{2}A\hat{B}C$. **b)** $\frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C$. **c)** $\frac{2}{3}A\hat{B}C$.
d) $2A\hat{B}C - \pi$. **e)** $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$.

Resolução — **Alternativa B**

A figura abaixo ilustra a situação descrita no enunciado:



Podemos notar que $O\hat{B}A$ é reto e que $A\hat{O}B = 2 \cdot (A\hat{C}B)$, já que $A\hat{O}B$ é ângulo central e $A\hat{C}B$ é ângulo inscrito. Segue também que:

$$A\hat{B}C = \frac{\pi}{2} + C\hat{B}O \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\pi}{2} + A\hat{C}B.$$ Já que $C\hat{B}O = A\hat{C}B$

Podemos observar que o ângulo $C\hat{A}B$ é excêntrico exterior, logo:

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\overset{\frown}{BD} = A\hat{O}B = 2A\hat{C}B \Leftrightarrow \overset{\frown}{BD} = 2\cdot\left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overset{\frown}{CB} = 2\cdot C\hat{B}E = 2\cdot\left(\pi - A\hat{B}C\right)$$

Logo,

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{BD}}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{\cancel{2}\cdot\left(\pi - A\hat{B}C\right) - \cancel{2}\cdot\left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{2}} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C\hat{A}B = \frac{3\pi}{2} - 2A\hat{B}C}$$

QUESTÃO 17

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox .

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox .

c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox .

d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{1}{2}$.

e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Resolução — Alternativa B

Para justificativa dos primeiros 3 itens, vamos checar a derivada implícita da curva, pois esse valor é a inclinação da reta tangente à curva. Em especial, estamos verificando a existência de pontos em que $\frac{dy}{dx} = 0$, ou seja, tangentes paralelas ao eixo Ox .

Derivando implicitamente a equação da parábola em x temos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 2 + 4\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(x + y - 1)}{x + y + 2}$$

Resolvendo $\frac{dy}{dx} = 0$, chegamos que $y = 1 - x$, substituindo isso na equação temos:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ou seja, existe apenas um ponto em que a tangente é paralela ao eixo Ox .

a) FALSA – Como justificado anteriormente.

b) VERDADEIRA – Como justificado anteriormente.

c) FALSA – Como justificado anteriormente.

d) FALSA – Seja α o ângulo de rotação de uma cônica da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Temos válida a seguinte relação:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

Porém, $A - C = 0$, então $\mathrm{tg}2\alpha$ não existe. Logo:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} .$$

Deste modo, o eixo de simetria da parábola descrita, ou é a reta $y = x$, ou é a reta $y = -x$. Para encontrarmos o vértice da nossa parábola devemos saber onde o eixo de simetria intercepta a cônica em questão.

Para $y = x$

$$x^2 + 2x\cdot x + x^2 - 2x + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

Não há solução em $\mathbb{R}$ para a equação acima.

Para $y = -x$

$$x^2 + 2x\cdot(-x) + x^2 - 2x + 4\cdot(-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow -6x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} .$$

Portanto o vértice da parábola está no ponto $\boxed{V = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)}$

e) FALSA – Como visto na justificativa da alternativa **d** o vértice é o ponto $\boxed{V = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)}$.

QUESTÃO 18

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;
II. Duas retas que não têm um ponto em comum são reversas;
III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é(são) verdadeira(s) apenas

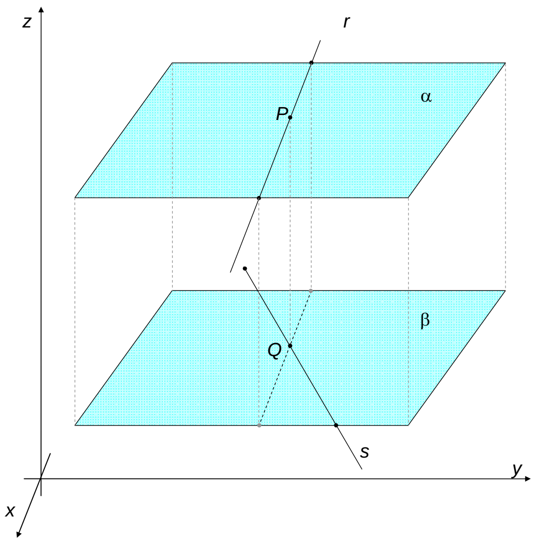
a) III. **b)** I e III. **c)** II e III. **d)** III e IV. **e)** I e II e IV.

Resolução — Alternativa D

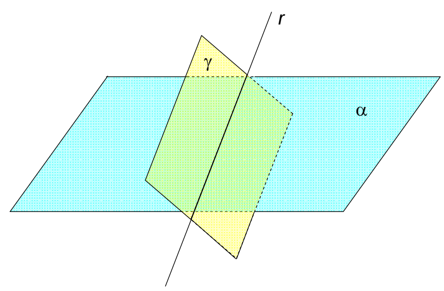
I. Falsa. Duas retas coplanares podem ser paralelas, não sendo assim, concorrentes.

II. Falsa. Duas retas paralelas não são reversas e não têm ponto em comum.

III. Verdadeira: Seja *r* uma reta no espaço, paralela ao eixo *x*. Tomemos um plano α (paralelo ao plano *xy*, usado como referência) que contém *r*. Também tomemos um plano β, paralelo a α, e que contém uma reta *s* reversa a *r*.
Para mostrar que α e β existem, basta observar que cada um dos planos possui uma reta normal que passa pelos pontos *P* e *Q*, de menor distância entre uma reta e outra:

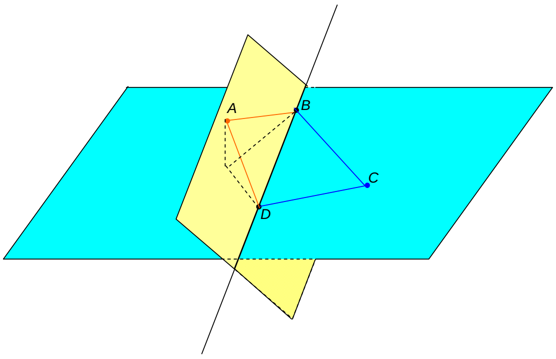


Consideremos, então, todos os planos γ que passam por *r* mas não contêm α :

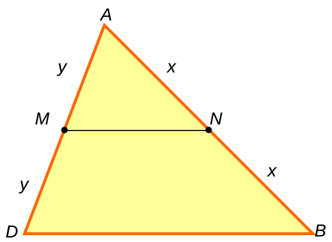


Observe que as intersecções de todos os planos γ com o plano β são retas paralelas a *r*. Essas retas não são paralelas a *s* e, portanto, cruzam *s* em um único ponto cada uma delas.
Assim, os planos γ não são paralelos à reta *s* nem contêm *s*.
Não há, portanto, um plano que contém *s* e ao mesmo tempo é paralelo a um dos planos γ.

IV – Verdadeira: Um quadrilátero reverso possui três vértices em um plano e o quarto vértice em um plano diferente. Observe o quadrilátero *ABCD* abaixo:



Perceba o que acontece com o triângulo *ABD*, quando tomamos os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$:

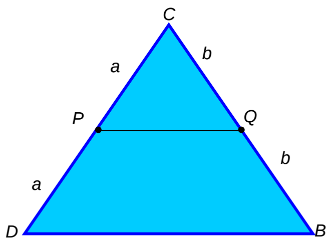


O segmento $\overline{MN}$ é, portanto, a base média do triângulo, sendo:

(i) $MN = \dfrac{DB}{2}$

(ii) $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{DB}$

Analogamente, para o triângulo *BCD* isso também vale:

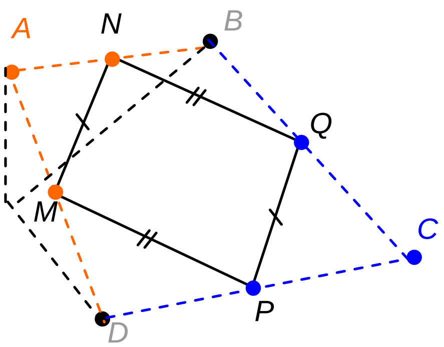


Logo:

(i) $PQ = \dfrac{DB}{2} = MN$

(ii) $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{DB}$ e, portanto, é paralelo a $\overline{PQ}$

Sendo o raciocínio totalmente análogo para os segmentos $\overline{NQ}$ e $\overline{MP}$, então o quadrilátero *MNQP* é um paralelogramo:



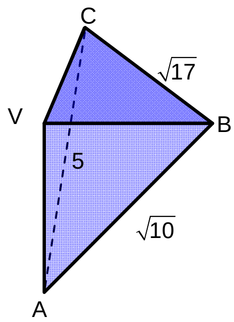
QUESTÃO 19

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2. **b)** 4. **c)** $\sqrt{17}$. **d)** 6. **e)** $5\sqrt{10}$.

Resolução — Alternativa A

A figura abaixo ilustra a situação descrita pelo enunciado.



Podemos notar que a figura formada é um tetraedro e que os triângulos *VAB, VBC* e *VAC* são todos retângulos em V. Logo, pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} (VA)^2 + (VB)^2 = (\sqrt{10})^2 & \text{(I)} \\ (VA)^2 + (VC)^2 = (5)^2 & \text{(II)} \\ (VB)^2 + (VC)^2 = (\sqrt{17})^2 & \text{(III)} \end{cases},$$

Fazendo $(\text{I}) - (\text{II}) + (\text{III})$ obtemos:

$$(\text{I}) - (\text{II}) + (\text{III}): \quad 2 \cdot (VB)^2 = 2 \Rightarrow VB = 1$$

Substituindo,

$$(VA)^2 + (VB)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow VA = 3 \text{ e } (VA)^2 + (VC)^2 = (5)^2 \Rightarrow VC = 4.$$

Por fim, o volume do tetraedro formado:

$$V_{tetraedro} = \frac{(VA)\cdot(VB)\cdot(VC)}{6} \Leftrightarrow V_{tetraedro} = \frac{3\cdot 1\cdot 4}{6} \Leftrightarrow \boxed{V_{tetra} = 2\text{ cm}^3}$$

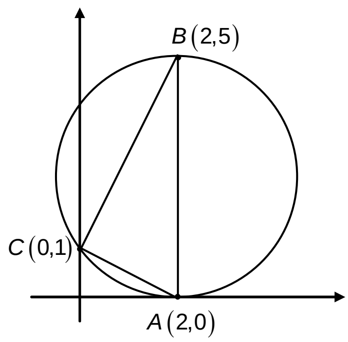
QUESTÃO 20

No sistema xOy os pontos $A = (2,0)$, $B = (2,5)$ e $C = (0,1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\dfrac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1. **b)** $\dfrac{100}{105}$. **c)** $\dfrac{10}{11}$. **d)** $\dfrac{100}{115}$. **e)** $\dfrac{5}{6}$.

Resolução — Alternativa B

A figura abaixo ilustra a situação descrita pelo enunciado.



Observe que:

$$d_{BC} = \sqrt{4^2 + 2^2} \Leftrightarrow d_{BC} = \sqrt{20}$$

$$d_{AC} = \sqrt{1^2 + 2^2} \Leftrightarrow d_{AC} = \sqrt{5}$$

$$d_{AB} = \sqrt{5^2 + 0^2} \Leftrightarrow d_{BC} = 5$$

Podemos notar, pela recíproca do teorema de Pitágoras, que o triângulo *ABC* é retângulo, já que:

$$(BC)^2+(AC)^2=(AB)^2$$

Logo, *AB* é hipotenusa. Sendo *R* o raio da circunferência que é base do cilindro. Então,

$$R=\frac{AB}{2}\Leftrightarrow R=\frac{5}{2}$$

Deste modo:

$$V_{cil}=\pi\cdot R^2\cdot h\Leftrightarrow V_{cil}=\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 8\Leftrightarrow V_{cil}=50\pi \text{ e}$$

$$A_T=2\pi\cdot R\cdot h+2\pi\cdot R^2\Leftrightarrow A_T=2\pi\cdot\frac{5}{2}\cdot 8+2\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow A_T=\frac{105\pi}{2}$$

Logo, $\dfrac{V_{cil}}{A_T}=\dfrac{50\pi}{\frac{105\pi}{2}}\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{V_{cil}}{A_T}=\dfrac{100}{105}}$

QUESTÃO 21

Para $z=1+iy$, $y>0$, determine todos os pares (a,y), $a>1$, tais que $z^{10}=a$. Escreva *a* e *y* em função Arg *z*.

Resolução

Pela definição do módulo de um número complexo, temos:

$$|z|=\sqrt{1^2+y^2}\ ,$$

Sendo θ o argumento de z, segue que:

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \Leftrightarrow\ \cos^2\theta=\frac{1}{1+y^2}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 1+y^2=\sec^2\theta=1+\text{tg}^2\,\theta\quad\Leftrightarrow\ y=\text{tg}\,\theta$$

Podemos observar, também, que, dado que a é um número real positivo, temos:

$$z^{10}=a\ \Rightarrow\ |z^{10}|=|a|\ \Rightarrow\ |z|^{10}=a$$

Portanto:

$$|z|^{10}=a\ \Leftrightarrow\ \left(\sqrt{1+y^2}\right)^{10}=a\ \Leftrightarrow\ \left(1+\text{tg}^2\,\theta\right)^5=a\ \Leftrightarrow\ a=\sec^{10}\theta\,.$$

Agora, se $z^{10}=a$, então o argumento de z^{10} é igual ao argumento de a, que é real positivo. Portanto, usando que $\arg\left(z^{10}\right)=10\arg(z)$ chegamos em:

$$\arg\left(z^{10}\right)=\arg(a)\ \Leftrightarrow\ 10\arg(z)=2k\pi\ \Leftrightarrow\ \arg(z)=\frac{k\pi}{5}$$

Substituindo:

$$\begin{cases} y=\text{tg}\,\theta\ \Leftrightarrow\ y=\text{tg}\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\\ a=\sec^{10}\theta\ \Leftrightarrow\ a=\sec^{10}\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\end{cases}$$

Agora, note que como o enunciado nos da $y>0$, devemos ter:

$$\frac{k\pi}{5}=\frac{\pi}{5}+2j\pi\ \text{ ou }\ \frac{k\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}+2j\pi$$

Mas como queremos apenas valores de y, arcos defasados de $2j\pi$ não nos interessa e tomamos $k\in\{1,2\}$.

Portanto os pares que satisfazem as condições do enunciado são:

$$\boxed{\left(\sec^{10}\left(\frac{\pi}{5}\right),\text{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\ \text{ e }\ \left(\sec^{10}\left(\frac{2\pi}{5}\right),\text{tg}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)}$$

E escrevendo a e y em função de $\arg(z)$ ficamos com:

$\boxed{y=\text{tg}(\arg(z))}$ e $\boxed{a=\sec^{10}(\arg(z))}$.

Observação: A banca poderia estar interessada nos valores numéricos dos pontos, já que são calculáveis.

Para esse calculo vamos considerar a equação polinomial $z^5-1=0$, podemos reescrever essa equação como:

$$(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0$$

Então as raízes de $z^4+z^3+z^2+z+1$ são as raízes quintas da unidade, exceto por $z=1$, ou seja:

$$r_1=\text{cis}\frac{2\pi}{5}\ ;\ r_2=\text{cis}\frac{4\pi}{5}\ ;\ r_3=\text{cis}\frac{6\pi}{5}\ ;\ r_4=\text{cis}\frac{8\pi}{5}$$

Onde $\text{cis}\,\theta=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$. Pelas relações de Girard sabemos sobre a soma das raízes que:

$$S=\text{cis}\frac{2\pi}{5}+\text{cis}\frac{4\pi}{5}+\text{cis}\frac{6\pi}{5}+\text{cis}\frac{8\pi}{5}=\frac{-1}{1}=-1$$

Tomando igualdade na parte real da expressão temos:

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1$$

Por simetria temos que:

$$\begin{cases}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\cos\dfrac{8\pi}{5}\\ \cos\dfrac{4\pi}{5}=\cos\dfrac{6\pi}{5}\end{cases}$$

Substituindo isso na equação chegamos em:

$$2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=-1$$

Utilizando a relação de arco-duplo temos:

$$2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=-1\ \Leftrightarrow\ 2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)=-1\ \Leftrightarrow$$
$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

Resolvendo isso como uma equação de segundo grau, chegamos em:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ \Leftrightarrow\ \text{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}\ \Leftrightarrow\ \text{tg}\frac{2\pi}{5}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$$

Utilizando novamente a relação de arco-duplo conseguimos a tangente faltante:

$$\cos^2\frac{\pi}{5}=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}\ \Leftrightarrow\ \text{sen}^2\frac{\pi}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}\ \Leftrightarrow$$
$$\text{tg}^2\frac{\pi}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=5-2\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\ \text{tg}\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Finalmente,como $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, chegamos que:

$$\sec\frac{2\pi}{5}=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1$$
e
$$\sec^2\frac{\pi}{5}=\frac{8}{3+\sqrt{5}}=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2\ \Leftrightarrow\ \sec\frac{\pi}{5}=\sqrt{5}-1$$

Então os pares seriam:

$$\boxed{\left(\sec^{10}\left(\frac{\pi}{5}\right),\text{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=\left(\left(\sqrt{5}-1\right)^{10},\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}$$
e
$$\boxed{\left(\sec^{10}\left(\frac{2\pi}{5}\right),\text{tg}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)=\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{10},\frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right)}$$

QUESTÃO 22

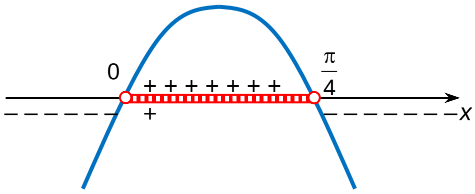
Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4\operatorname{sen}x\cos x - 1)$

Resolução

Devemos condicionar a existência do logaritmo apresentado no enunciado. Portanto, temos para a base do logaritmo:

$$x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) > 0 \quad \text{e} \quad x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \neq 1.$$

Para $x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) > 0$, pelo estudo dos sinais obtemos:



Portanto $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{4}\right\}$

Para $x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \neq 1$, temos:

$$x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{\pi}{4}x + 1 \neq 0.$$

Observe que o discriminante da desigualdade acima é negativo, o que indica que não possui valores que a anulem. Portanto, podemos garantir que $x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \neq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Para a condição do logaritmando, sendo k inteiro, temos:

$$4\operatorname{sen}x\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}2x > 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Deste modo, $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

Logo, a intersecção entre os intervalos obtidos para *x* nas condições acima determina o maior domínio da função *f.*

$$S_1 \cap S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}\right\}, \text{ logo } \boxed{D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}\right\}}$$

QUESTÃO 23

Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de *P* é igual a 3. Determine a raiz *m* de *P* tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em *x*, $x^3 + mx^2 + (m+4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2, 2[$.

Resolução

Como a soma das raízes *m* de $P(m)$ é igual a 3, temos que $\frac{3}{a} = 3 \Leftrightarrow a = 1$. Desta forma, vê-se que o produto destas raízes é -18 e as raízes são $m = 6$ e $m = -3$.

Para achar a raiz *m* que satisfaz as condições do enunciado, vamos substituir as possibilidades na equação em *x*:

(I) $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ ($m = -3$)

Podemos ver por substituição que $x = -1$ é solução desta equação. Ao aplicarmos Briot-Ruffini com esta solução, obtemos a equação de segundo grau abaixo:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Para esta equação, temos $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 \Rightarrow \Delta < 0$. Assim, a única solução real que pertence ao intervalo desejado é $x = -1$.

(II) $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$ ($m = 6$)

Podemos ver mais uma vez que $x = -1$ é solução desta equação. Aplicando Briot-Ruffini como no caso anterior obtemos:

$$x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

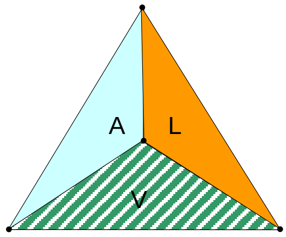
Das soluções acima, temos que apenas $x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ e $x = -1$ pertencem ao intervalo desejado. Assim, $\boxed{m = 6}$ é a raiz que procuramos.

QUESTÃO 24

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Resolução

Considere a vista superior de um tetraedro regular:

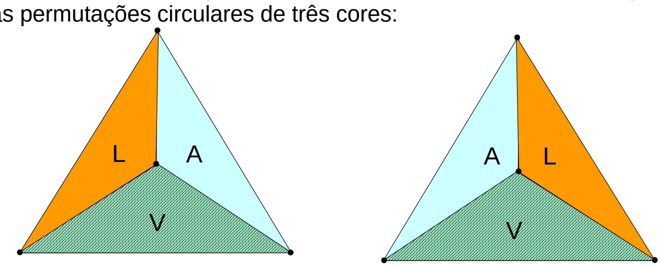


Supondo as cores de tinta:

Vermelha
Verde
Azul
Laranja

Escolha uma das cores para ser a base inferior (no caso a base vermelha).

As outras três cores podem ser distribuídas de duas formas, que são as permutações circulares de três cores:



Resposta: $\boxed{\text{dois tetraedros distintos.}}$

QUESTÃO 25

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases}$$

a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Resolução

Primeiro vamos resolver o caso particular $\alpha = 0$, o que faz que a solução de $x^2 - x = 0$ seja $x = 0$ ou $x = 1$, implicando em $\beta = 0$. Assim, o par $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ é uma das soluções desejadas.

Agora podemos considerar o caso $\alpha \neq 0$, com isso veja que nossas expressões fatoram como:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = \alpha \\ -x(x-1)(x+1) = \beta \end{cases}$$

E como $\alpha \neq 0$, podemos dividir uma expressão pela outra para obter:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = -x - 1 \Leftrightarrow x = -\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Agora, substituindo essa solução nas equações chegamos em:

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(2+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha\\ \left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(2+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\dfrac{\beta}{\alpha}=\beta\end{cases}\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(2+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2+3\alpha\beta+2\alpha^2-\alpha^3=0 \qquad \text{(I)}$$

Agora tratando isso como uma equação de segundo grau na variável β, notamos que ela terá solução real quando:

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow (3\alpha)^2-4\cdot 1\cdot\left(2\alpha^2-\alpha^3\right)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(1+4\alpha)\geq 0$$

E como $\alpha\neq 0$ chegamos em $(1+4\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\geq -\dfrac{1}{4}$.

Com essa restrição satisfeita, temos que os possíveis valores de β são dados por:

$$\beta=\frac{-3\alpha\pm\sqrt{\alpha^2(1+4\alpha)}}{2}=\alpha\frac{-3\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2} \qquad \text{(II)}$$

Assim podemos responder os itens:

a) Então os valores que satisfazem as restrições dadas são:

$$\boxed{\begin{cases}\alpha\geq -\dfrac{1}{4}\\ \beta=\alpha\dfrac{-3\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}\end{cases}}$$

b) Veja que $x=-\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ é a solução do sistema, portanto satisfaz a segunda equação. Aplicando o algoritmo de Briott-Ruffini então na equação $x^3-x+\beta=0$:

$-1-\dfrac{\beta}{\alpha}$	1	0	-1	β
	1	$-1-\dfrac{\beta}{\alpha}$	$\dfrac{2\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$	$\beta-\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}-3\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-2\dfrac{\beta}{\alpha}$

Onde:

$$\beta-\frac{\beta^3}{\alpha^3}-3\frac{\beta^2}{\alpha^2}-2\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha^3}\left(\alpha^3-\beta^2-3\alpha\beta-2\alpha^2\right)$$

De (I), temos que $\alpha^3-\beta^2-3\alpha\beta-2\alpha^2=0$.

Seja então $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$, as outras duas soluções de $x^3-x+\beta=0$ são as soluções de:

$$x^2-\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\left(\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\left\{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-1\right\}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(1+k)x+\left\{(1+k)^2-1\right\}=0 \Leftrightarrow$$

Então:

$$x=\frac{1}{2}\left\{(1+k)\pm\sqrt{4-3(1+k)^2}\right\}$$

Ou seja, as soluções são:

$$\boxed{\begin{cases}x_1=-1-k\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left\{(1+k)+\sqrt{4-3(1+k)^2}\right\}\\ x_3=\dfrac{1}{2}\left\{(1+k)-\sqrt{4-3(1+k)^2}\right\}\end{cases}}$$

De (II), temos: $k=\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $k=\dfrac{-3-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

Se quisermos as respostas em função do parâmetro α, para $k=\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$, temos:

$$\begin{cases}x_1=-1-k=\dfrac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1+\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)+\sqrt{4-3\left(1+\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^2}\right\}\\ x_3=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1+\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)-\sqrt{4-3\left(1+\dfrac{-3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^2}\right\}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)+\sqrt{\dfrac{5+3\sqrt{1+4\alpha}-6\alpha}{2}}\right\}\\ x_3=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)-\sqrt{\dfrac{5+3\sqrt{1+4\alpha}-6\alpha}{2}}\right\}\end{cases}}$$

Para $k=\dfrac{-3-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$:

$$\boxed{\begin{cases}x_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)+\sqrt{1-3\sqrt{1+4\alpha}-6\alpha}\right\}\\ x_3=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)-\sqrt{1-3\sqrt{1+4\alpha}-6\alpha}\right\}\end{cases}}$$

QUESTÃO 26

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases}x\,\text{sen}\,\alpha+3y\cos\alpha=a\\ x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha=b,\end{cases}$$

com $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ e $a,b\in\mathbb{R}$.

Analise para que valores de α, a e b o sistema é

(i) possível determinado,
(ii) possível indeterminado ou
(iii) impossível, respectivamente.

Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Resolução

Colocando o sistema linear no formato matricial, temos:

$$\begin{bmatrix}\text{sen}\,\alpha & 3\cos\alpha\\ \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

Seja $A=\begin{bmatrix}\text{sen}\,\alpha & 3\cos\alpha\\ \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha\end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes do sistema.

(I) Pela regra de Cramer, sendo um sistema com número de equações igual ao número de incógnitas, ele será possível e determinado (SPD) se e somente se $\det A\neq 0$.

Assim, calculando o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\det A=\begin{vmatrix}\text{sen}\,\alpha & 3\cos\alpha\\ \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha\end{vmatrix}=\text{sen}^2\,\alpha-3\cdot\cos^2\alpha$$

Para que seja um sistema possível e determinado:

$$\det A\neq 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha-3\cdot\cos^2\alpha\neq 0$$

Sendo $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, de modo que $\cos\alpha \ne 0$, reescrevemos a condição sobre o determinante como:

$$\operatorname{sen}^2\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha \ne 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha \ne 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \ne \pm\sqrt{3}$$

Novamente usando o fato de que $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, o que garante que $\operatorname{tg}\alpha \ge 0$, ficamos com a única restrição:

$$\operatorname{tg}\alpha \ne \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha \ne \frac{\pi}{3}$$

Mediante essa restrição, a regra de Cramer nos dá o par ordenado (x, y) que resolve o sistema expresso como:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 3\cos\alpha \\ b & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}} = \dfrac{a\cdot\operatorname{sen}\alpha - 3\cdot b\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha} \\[3em] y = \dfrac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & a \\ \cos\alpha & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}} = \dfrac{b\cdot\operatorname{sen}\alpha - a\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha} \end{cases}$$

Portanto, o sistema será possível e determinado para $\alpha \ne \frac{\pi}{3}$ e quaisquer a e b reais, sendo o conjunto-solução dado por:

$$S = \left\{\left(\frac{a\cdot\operatorname{sen}\alpha - 3\cdot b\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha}, \frac{b\cdot\operatorname{sen}\alpha - a\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha}\right)\right\}.$$

Analisemos agora o que acontece para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Nesse caso, sendo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, o sistema fica:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x + \frac{3}{2}\cdot y = a \\ \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y = b \end{cases}.$$

A partir disso, temos que:

(II) se $\frac{a}{\sqrt{3}} = b \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$, as duas equações são, na verdade, iguais e, portanto, o sistema é possível e indeterminado. Nesse caso, temos que atribuir um valor arbitrário para uma das incógnitas (por exemplo, fazendo $y = \theta$) e deixar a outra variável também em função de θ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y = b \\ y = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \theta = b \\ y = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cdot b - \sqrt{3}\cdot\theta \\ y = \theta \end{cases}$$

Portanto, o sistema será possível e indeterminado quando $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $a = b\sqrt{3}$, sendo o conjunto-solução dado por:

$$S = \left\{\left(2\cdot b - \sqrt{3}\cdot\theta, \theta\right),\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

(III) Finalmente, o sistema será impossível quando $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $a \ne b\sqrt{3}$, sendo naturalmente o conjunto-solução:

$$V = \varnothing.$$

QUESTÃO 27

Encontre os pares $(\alpha,\beta) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos^2(\alpha-\beta) = -1 \text{ e}$$
$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = \sqrt{3}.$$

Resolução

Primeiro vamos manipular a seguinte expressão:

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\right)\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

Substituindo isso na primeira expressão temos:

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta - 2\cos^2(\alpha-\beta) = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta) - 2\cos^2(\alpha-\beta) = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta) - 1 = 0$$

Com a substituição $y = \cos(\alpha-\beta)$, chegamos à equação de segundo grau:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$$

Porém, observe que:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0 \end{cases}$$

Somando membro a membro as inequações, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$$

Mediante essa restrição, $y = \cos(\alpha-\beta) > 0$ e a única solução é $y = 1$. Logo:

$$\begin{cases} \cos(\alpha-\beta) = 1 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta = k\cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$$

Substituindo $\beta = \alpha$ na segunda equação dada, vem que:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(2\alpha) + \cos(2\alpha) = \sqrt{3}$$

Dividindo então a expressão por 2, obtemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen}(2\alpha) + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\operatorname{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$
$$2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad 2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow$$
$$\alpha = \frac{\pi}{12} + k\cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$$

Sendo $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, ficamos com

$$\alpha = \frac{\pi}{12} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Como $\beta = \alpha$, o conjunto solução é:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right);\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)\right\}}$$

QUESTÃO 28

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas $(y - x - 2)\cdot\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0$ e $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.

Resolução

Por hipótese, podemos construir uma figura, que é formada pela circunferência:

$$\lambda:\ x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$$

e por duas retas:

$$(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ r: y - x - 2 = 0 \text{ ou } s: y + \frac{x}{2} - 2 = 0$$

Assim, reescrevendo as equações dadas, temos:

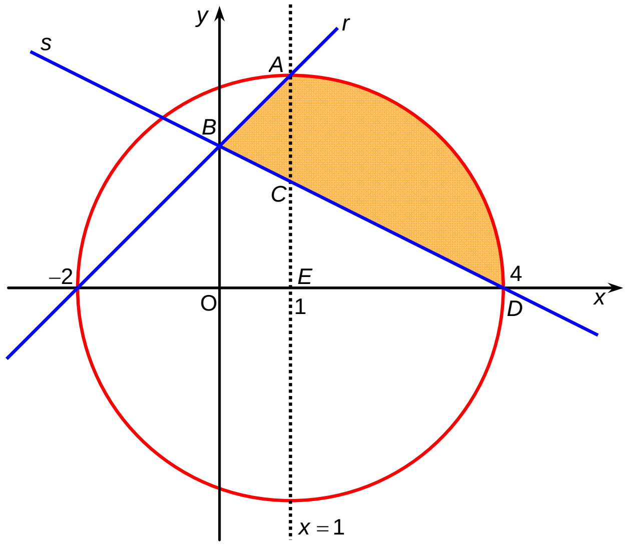
$$\lambda:\ x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x-1)^2 + y^2 = 9,$$

que é uma circunferência de centro (1,0) e raio 3. As equações das retas acima referidas são:

$$r:\ y - x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = x + 2;$$

$$s:\ y + \frac{x}{2} - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = -\frac{x}{2} + 2,$$

Cujas representações estão abaixo.



Onde $A = (1,3)$, $B = (0,2)$ e $C = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

A região mencionada no enunciado está pintada na figura acima. Vemos que a área desta região é composta pela parte de 1/4 de circunferência que está acima da reta *s* unido do triângulo *ABC*.
Vamos agora calcular cada uma dessas regiões.
Calculamos a área do setor *ACD* acima descrito pela diferença entre a área do setor e do triângulo *CED*:

$$A_{ACD} = A_{setor} - A_{CED}$$

Calculando cada uma das regiões:

$$A_{setor} = \frac{A_{circ}}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

$$A_{CED} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ e}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{3}{4}.$$

Logo, a área pedida é:

$$A = A_{ABC} + A_{ACD} = A_{ABC} + A_{setor} - A_{CED} = \frac{3}{4} + \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{4} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{A = \frac{9\pi - 6}{4}}$$

QUESTÃO 29

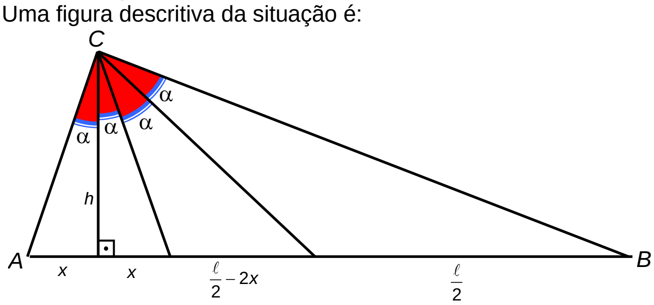
Em um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice *C*, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se ℓ é a medida do lado oposto ao vértice *C*, calcule:

a) A medida da mediana em função de ℓ.

b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Resolução

Uma figura descritiva da situação é:



Então conseguimos os seguintes valores de tangente:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{h} \\ \operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{\frac{\ell}{2} - x}{h} = \dfrac{\ell}{2h} - \dfrac{x}{h} \\ \operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{\ell - x}{h} = \dfrac{\ell}{h} - \dfrac{x}{h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\ell}{2h} \\ \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\ell}{h} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\cdot(\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha) \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}3\alpha = 2\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

Utilizando as relações de arco-duplo e arco-triplo de tangente:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Chamando $y = \operatorname{tg}\alpha$ e sabendo que $y > 0$, chegamos então em:

$$\operatorname{tg}3\alpha = 2\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \ \Leftrightarrow\ \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} = 2\cdot\frac{2y}{1 - y^2} + y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3 - y^2}{1 - 3y^2} = \frac{5 - y^2}{1 - y^2} \ \Leftrightarrow\ y^4 - 6y^2 + 1 = 0$$

Resolvendo a equação biquadrática chegamos em:

$$y^4 - 6y^2 + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ y^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Agora note que $3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$ e $3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ e como neste caso a tangente é positiva, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} + 1 \text{ ou } \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Mas se $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} + 1 > 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, então $\alpha > \frac{\pi}{4}$ e, portanto $4\alpha > \pi$, o que é um absurdo com a formação do triângulo. Então $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$, calculando a tangente do arco duplo temos então:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{1 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2} - 2} = 1$$

Assim $2\alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$ e $4\alpha = \frac{\pi}{2}$, o que torna nosso triângulo retângulo de hipotenusa $AB = \ell$.

a) Utilizando que o comprimento da mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade do comprimento da hipotenusa, temos que:

$$\boxed{m = \frac{\text{Hipotenusa}}{2} = \frac{\ell}{2}}$$

b) Como visto $B\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$, pela figura temos:

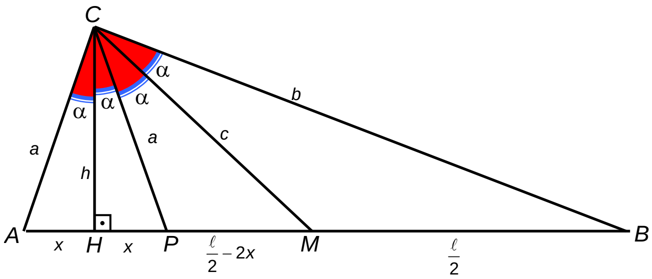
$$C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \qquad A\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

Ou seja:

$$\boxed{C\hat{A}B = \frac{3\pi}{8}},\ \boxed{A\hat{B}C = \frac{\pi}{8}} \text{ e } \boxed{B\hat{C}A = \frac{\pi}{2}}$$

Observação: Os vértices *A* e *B* podem ser trocados entre si, pois o enunciado não deixa claro suas posições em relação a *C*.

Solução alternativa:
Observe a figura abaixo:



Vemos que $CA = CP = a$
Teorema das bissetrizes internas (T.B.I.):
T.B.I. no triângulo CPB:

$$\frac{PM}{PC}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{\frac{\ell}{2}-2x}{a}=\frac{\frac{\ell}{2}}{b}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\ell}{\ell-4x}\qquad(1)$$

T.B.I. no triângulo CAB:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{BP}{BC}\Rightarrow\frac{2x}{a}=\frac{\ell-2x}{b}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\ell-2x}{2x}\qquad(2)$$

(1) = (2):

$$\frac{\ell}{\ell-4x}=\frac{\ell-2x}{2x}\Rightarrow 2\ell x=\ell^2-6\ell x+8x^2\Rightarrow 2\ell x=8x^2-6\ell x+\ell^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^2-8\ell x+\ell^2=0$$

$x=\frac{\ell(2\pm\sqrt{2})}{4}$, mas observe pela figura que $AP < AM \Rightarrow 2x<\frac{\ell}{2}$

$\Rightarrow x<\frac{\ell}{4}$, então:

$$x=\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{4}\qquad(3)$$

Trigonometria nos triângulos CHP e CHM:

$$\left.\begin{aligned}tg\alpha&=\frac{x}{h}\\ tg2\alpha&=\frac{\frac{\ell}{2}-x}{h}\end{aligned}\right\}\ tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\Rightarrow\frac{\frac{\ell}{2}-x}{\cancel{h}}=\frac{2\cdot\frac{x}{\cancel{h}}}{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}\Rightarrow 1-\left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac{2x}{\frac{\ell}{2}-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac{2x}{\frac{\ell}{2}-x}\Rightarrow\left(\frac{x}{h}\right)^2=1-\frac{2\cdot 2x}{\ell-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac{\ell-6x}{\ell-2x}\Rightarrow\left(\frac{h}{x}\right)^2=\frac{\ell-2x}{\ell-6x}\qquad(4)$$

T.B.I. no triângulo CHM:

$$\frac{HP}{HC}=\frac{MP}{MC}\Rightarrow\frac{x}{h}=\frac{\frac{\ell}{2}-2x}{c}\Rightarrow c=\frac{h}{x}\cdot\left(\frac{\ell-4x}{2}\right)$$

Elevando ao quadrado:

$$c^2=\left(\frac{h}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{\ell-4x}{2}\right)^2$$

Substituindo (4):

$$c^2=\left(\frac{\ell-2x}{\ell-6x}\right)\cdot\left(\frac{\ell-4x}{2}\right)^2$$

Substituindo (3):

$$c^2=\left(\frac{\ell-2\cdot\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{4}}{\ell-6\cdot\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{4}}\right)\cdot\left(\frac{\ell-\cancel{4}\cdot\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{\cancel{4}}}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$c^2=\left(\frac{\ell-\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{2}}{\ell-\frac{3\ell(2-\sqrt{2})}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\ell-\ell(2-\sqrt{2})}{2}\right)^2=\left(\frac{\frac{\cancel{\ell}\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\ell}(3\sqrt{2}-4)}{\cancel{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\ell(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2\ ..$$

$$c^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{(3\sqrt{2}-4)}\right)\cdot\left(\frac{\ell^2(3-2\sqrt{2})}{4}\right)\frac{(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}+4)}=\ell^2\frac{\cancel{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}}{4\cdot\cancel{(18-16)}}=\frac{\ell^2}{4}\ ..$$

a) Resposta: $\boxed{c=\frac{\ell}{2}}$

Agora observe o triângulo CHM:

$$\text{sen}\,2\alpha=\frac{x+\frac{\ell}{2}-2x}{c}=\frac{\frac{\ell}{2}-x}{c}$$

Substituindo x e c já encontrados:

$$\text{sen}\,2\alpha=\frac{\frac{\ell}{2}-\frac{\ell(2-\sqrt{2})}{4}}{\frac{\ell}{2}}=\frac{\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}-\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}\frac{(2-\sqrt{2})}{2}}{\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}}=1-\frac{(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{sen}\,2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2\alpha=45^\circ\Rightarrow\boxed{\alpha=22{,}5^\circ}$$

b) Pela figura:

$C\hat{A}B=90^\circ-\alpha=\boxed{67{,}5^\circ}$ $A\hat{B}C=90^\circ-3\alpha=\boxed{22{,}5^\circ}$, e $B\hat{C}A=4\alpha=90^\circ$

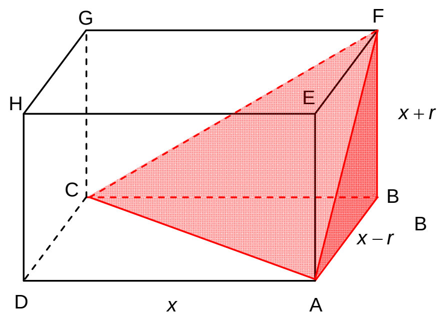
QUESTÃO 30

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm³. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.
b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Resolução

a) Sendo $x-r, x$ e $x+r$ as dimensões do paralelepípedo, segue a ilustração da situação descrita no enunciado:



Pelo enunciado temos:

$$AB+AD+BF=12\Leftrightarrow x-r+x+x+r=12\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=4$$

Sabe-se também que:

$$V_{ABCF}=\frac{(AB)\cdot(AD)\cdot(BF)}{6}\Leftrightarrow 10=\frac{(4-r)\cdot 4\cdot(4+r)}{6}\Leftrightarrow 15=16-r^2\Rightarrow r=1$$

Logo,

$$AB=x-r\Leftrightarrow AB=4-1\Leftrightarrow\boxed{AB=3\text{ cm}}$$

$$AD=x\Leftrightarrow\boxed{AD=4\text{ cm}}$$

$$BF=AE=x+r\Leftrightarrow AE=4+1\Leftrightarrow\boxed{AE=5\text{ cm}}$$

b) Sabendo que $V_{par}=(AB)\cdot(AD)\cdot(AE)$, então:

$$V_{par}=3\cdot 4\cdot 5\Leftrightarrow\boxed{V_{par}=60\text{ cm}^2}$$

E a área total é definida por:

$$A_{total}=2\cdot((AB)\cdot(AD)+(AB)\cdot(AE)+(AD)\cdot(AE))\Leftrightarrow$$

$$A_{total}=2\cdot(3\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 5)\Leftrightarrow A_{total}=2\cdot(12+15+20)$$

$$\boxed{A_{total}=94\text{ cm}^2}$$

Equipe desta resolução

Matemática

Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Felipe Eboli Sotorilli
Rodrigo do Carmo Silva
Vinício Merçon Poltronieri

Revisão

Danilo José de Lima
Edson Vilela Gadbem
Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani

Digitação, Diagramação e Publicação

Ana Luiza Brunetti
Isabela Porto Renó
Eduardo Teixeira Akyiama