Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Aprovou!

Elite Resolve

ITA 2011

Matemática

www.elitecampinas.com.br

os melhores gabaritos da internet

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

det *M*: determinante da matriz *M*

P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto *A*

n(A): número de elementos do conjunto finito *A*

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos *A* e *B*

$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto *B*

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 01

Dado $z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$. **b)** -1. **c)** 0.

d) 1. **e)** $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$.

Resolução — Alternativa B

Por hipótese, $z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$.

Como a soma pedida é $\sum_{n=1}^{89} z^n = z + z^2 + z^3 + ... + z^{89}$, a partir do valor de z, temos:

$$z = \text{cis}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z^2 = \text{cis}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z^3 = \text{cis}\,2\pi = 1$$

Podemos ver que $z + z^2 + z^3 = 0$, e que a soma das subsequentes potências de z, três a três, é zero. Além disso, como $z^3 = 1 \Rightarrow z^{3k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Logo, $\sum_{n=1}^{89} z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{87} z^n}_{=0} + z^{88} + z^{89} = 0 + z^{87}\cdot z + z^{87}\cdot z^2 = z + z^2 = -1$.

QUESTÃO 02

Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I − $|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2||$.

II − $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||$.

III − Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \ne 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas II. **c)** apenas III.
d) apenas II e III. **e)** todas.

Resolução — Alternativa C

(I) Falsa. Tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$, obtemos:

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |1-(-1)| = 2 \\ ||z_1| - |z_2|| = ||1| - |-1|| = |1-1| = 0 \end{cases}$$

Portanto, temos um contra-exemplo em que $|z_1 - z_2| > ||z_1| - |z_2||$.

Na verdade, pode-se mostrar que a desigualdade sempre válida para quaisquer dois números complexos z_1 e z_2 é $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$., isto é, com o sinal da inequação invertido.

(II) Falsa. Tomando $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, e sendo ambos números reais, temos que $\bar{z}_1 = 0$ e $\bar{z}_2 = 1$. Assim:

$$\begin{cases} |\bar{z}_1 \cdot z_2| = |0\cdot 1| = 0 \\ ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2|| = |1\cdot 1| = 1 \end{cases}$$

Portanto, temos um contra-exemplo em que $|\bar{z}_1 \cdot z_2| \ne ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||$.

Obs.: Consideramos que talvez tenha ocorrido um erro de digitação nessa afirmação, pois a identidade que faria mais sentido apresentar seria
$|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2||$, a qual seria, inclusive, uma identidade verdadeira.

(III) Verdadeira. De fato, para $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \ne 0$, temos que:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|\cdot(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)} \Leftrightarrow z_1^{-1} = \frac{|z_1|^{-1}}{(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)} \cdot \left[\frac{\cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta}\right] \Leftrightarrow$$

$$z_1^{-1} = \frac{|z_1|^{-1}\cdot(\cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta)}{(\cos^2\theta - i^2\cdot\text{sen}^2\theta)} = \frac{|z_1|^{-1}\cdot(\cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta)}{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z_1^{-1} = |z_1|^{-1}\cdot(\cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta)}$$

QUESTÃO 03

A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2. **b)** $\frac{i}{2}$. **c)** 0. **d)** $-\frac{1}{2}$. **e)** $-2i$.

Resolução — Alternativa E

Sendo $z = x + i\cdot y$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+i\cdot y)^2 + (x^2+y^2) + i\cdot(x+i\cdot y) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x^2 + 2\cdot x\cdot y\cdot i - y^2) + (x^2+y^2) + i\cdot x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(2x^2 - y - 1) + i\cdot(2\cdot x\cdot y + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y - 1 = 0 \\ 2\cdot x\cdot y + x = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, vem que: $x\cdot(2y+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = -\frac{1}{2}$

Para *x* = 0, da primeira equação temos que: $2\cdot 0^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Para y = $-\frac{1}{2}$, da primeira equação temos que:

$$2x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Assim, as raízes $z = x + i\cdot y$ da equação apresentada são:

$-i$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. A soma *S* dessas raízes é dada por:

$$S = (-i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \Leftrightarrow \boxed{S = -2i}$$

QUESTÃO 04

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

a) $\frac{7}{8}$. **b)** $\frac{5}{7}$. **c)** $\frac{5}{8}$. **d)** $\frac{3}{5}$. **e)** $\frac{3}{7}$.

Resolução **Sem Resposta**

Primeiramente definimos os eventos:

A={ A moeda selecionada tem 2 caras }
B={ A moeda selecionada é normal (cara e coroa) }
C={ A moeda selecionada tem 2 coroas }
D={ A face observada é uma coroa }

Agora, computemos $p(D)$ através do Teorema da Probabilidade Total (já que A, B e C são disjuntos e $A\cup B\cup C=\Omega$, onde Ω é o espaço amostral):

$$p(D)=p(D\,|\,A)\cdot p(A)+p(D\,|\,B)\cdot p(B)+p(D\,|\,C)\cdot p(C)$$

$$p(D)=0\cdot\frac{5}{40}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{40}+1\cdot\frac{25}{40}=\frac{3}{4}$$

Agora computemos nossa probabilidade desejada $p(C\,|\,D)$ através do Teorema de Bayes:

$$p(C\,|\,D)=\frac{p(C\cap D)}{p(D)}=\frac{p(C)\cdot p(D\,|\,C)}{p(D)}=\frac{\frac{25}{40}\cdot 1}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}$$

Desta forma, nenhuma alternativa está correta.

Observação:
Uma confusão que poderia ocorrer é pensar que ao saber que uma coroa foi retirada, teríamos que sobram 35 moedas no espaço amostral, onde 10 são normais e 25 são de duas coroas, o que daria $p(C\,|\,D)=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$. Esse pensamento, no entanto, está errado, pois a partir do momento que sabemos que uma face é coroa, isto faz nosso espaço amostral deixar de ser equiprovável, não valendo mais a razão anterior, **pois cada moeda com 2 coroas tem o dobro de chance de ter sido a escolhida**.
Se ponderarmos os casos por suas probabilidades chegamos na probabilidade correta:

$$p(C\,|\,D)=\frac{2\cdot n(\text{Duas Coroas})}{n(\text{Normais})+2\cdot n(\text{Duas Coroas})}=\frac{2\cdot 25}{10+2\cdot 25}=\frac{50}{60}=\frac{5}{6}.$$

QUESTÃO 05

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A\subset B$ e $n\left(\{C: C\subset B\setminus A\}\right)=128$.

Então, das afirmações abaixo:

I – $n(B)-n(A)$ é único;

II – $n(B)+n(A)\le 128$;

III – a dupla ordenada $(n(A),n(B))$ é única:

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas II. **c)** apenas III.
d) apenas I e II. **e)** nenhuma.

Resolução **Alternativa A**

O número $n\left(\{C: C\subset B\setminus A\}\right)=128$ representa justamente o total de subconjuntos que o conjunto B\A admite, ou seja, é o total de partes que esse conjunto tem.
Sabe-se de Teoria dos Conjuntos que se um conjunto apresenta um número k de elementos (k inteiro, positivo e finito), o total de subconjuntos é dado então por 2^k. Assim, seja k o total de elementos de B\A. A partir da fórmula anterior:

$$2^k=128\Leftrightarrow 2^k=2^7\Leftrightarrow k=7$$

Como B\A tem 7 elementos e $A\subset B$, temos que n(B) – n(A) = 7, o que torna a afirmação I verdadeira.
As afirmações II e III são falsas. De fato, o exercício só permite concluir que a diferença entre o número de elementos de B e A é 7. Pode-se ter n(B) = 1000 e n(A) = 993, por exemplo. Assim, não é correto afirmar que $n(B)+n(A)\le 128$. Como os valores de n(B) e n(A) não são determináveis com as informações dadas, não podemos afirmar que a dupla ordenada (n(A);n(B)) é única.

QUESTÃO 06

O sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ \quad\; y+2z=b \\ 3x-y-5cz=0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) é possível quando $a=\frac{7b}{3}$ ou $c\neq 1$.

c) é impossível quando $c=1$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a\neq\frac{7b}{3}$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

e) é possível $c=1$ e $a\neq\frac{7b}{3}$.

Resolução **Alternativa B**

Escrevendo o sistema no formato matricial, temos:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\3&-1&-5c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$$

Seja L_i a i-ésima linha da matriz. Fazendo $L_3'=-3\cdot L_1+L_3$, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\0&1&2&b\\0&-7&-5c-9&-3a\end{array}\right]$$

Fazendo $L_3'=7\cdot L_2+L_3$, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\0&1&2&b\\0&0&5-5c&7b-3a\end{array}\right]$$

Da última equação, temos: $5\cdot(1-c)\cdot z=7b-3a$
Nesse caso, temos as seguintes considerações:
(I) Se $c\neq 1$, o sistema é do tipo possível e determinado (SPD);

(II) Se $\begin{cases}c=1\\ a=\frac{7b}{3}\end{cases}$, o sistema é do tipo possível e indeterminado (SPI);

(III) Se $\begin{cases}c=1\\ a\neq\frac{7b}{3}\end{cases}$, o sistema é do tipo impossível (SI).

QUESTÃO 07

Considere as afirmações abaixo:

I – Se M é uma matriz quadrada de ordem $n>1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.
II – Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2-M)=0$, então existe matriz não-nula X, de ordem $n\times 1$, tal que $MX=X$.

III – A matriz $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)
a) apenas II. **b)** apenas I eII. **c)** apenas I e III.
d) apenas II e III. **e)** todas.

Resolução **Alternativa E**

(I) Verdadeira. Sejam $M=\begin{pmatrix}m_{11}&\cdots&m_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ m_{n1}&\cdots&m_{nn}\end{pmatrix}$ e $N=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}$.

Então $M\cdot N=O_n$ (matriz nula de ordem $n\times n$) $\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}m_{11}&\cdots&m_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ m_{n1}&\cdots&m_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$, o que é equivalente a n sistemas lineares homogêneos da forma:

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, onde $i \in \{1,2,3...n\}$ indica a i-ésima coluna de N. Mas como M é singular, tem-se que $\det M = 0$, o que faz com que cada sistema homogêneo apresente uma solução não trivial. Portanto, conseguimos montar uma matriz N não nula (tomando ao menos uma solução não trivial de cada um dos n sistemas), tal que seja válida o produto $M \cdot N = O_n$.

(II) Verdadeira. Temos:

$$\det(M^2 - M) = 0 \Leftrightarrow \det(M \cdot (M - I_n)) = 0 \Leftrightarrow \det(M) \cdot \det(M - I_n) = 0$$

Mas sabemos que $\det(M) \neq 0$, pois M é inversível, de modo que $\det(M - I_n) = 0$. Agora, dizer que existe matriz coluna não-nula X tal que $M \cdot X = X$ é equivalente a dizer que existe uma solução não-trivial para $M \cdot X - X = O_n \Leftrightarrow (M - I_n) \cdot X = 0$. E de fato, sabemos que isso é satisfeito, pois temos que $\det(M - I_n) = 0$, o que torna nosso sistema homogêneo possível e indeterminado.

(III) Verdadeira. Primeiramente, temos:

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} = \operatorname{tg}\theta \cdot \dfrac{1}{\sec\theta} = \operatorname{tg}\theta \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

(2) $1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} = \cos\left(2 \cdot \dfrac{\theta}{2}\right) = \cos\theta$

Assim, reescrevemos a matriz dada como:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Calculando então o determinante dessa matriz, encontramos:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Como o determinante é sempre não nulo, para todo valor de θ em que existam a tangente e a secante ($\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), tal matriz é sempre inversível para esses valores.

QUESTÃO 08

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) -64. **b)** -36. **c)** -28. **d)** 18. **e)** 27.

Resolução — Alternativa C

Por hipótese, se $x = 1$ é raiz com multiplicidade 2 de $p(x) = x^4 + x^2 + ax + b$, então, pelo teste da derivada, $x = 1$ é raiz simples da derivada de $p(x)$.

Então: $p'(x) = 4x^3 + 2x + a$.

Desta forma temos:

$$p'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Como $x = 1$ é raiz de $p(x)$, para $a = -6$, temos:

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 - 6 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4.$$

Portanto,

$$a^2 - b^3 = (-6)^2 - (4)^3 \Rightarrow a^2 - b^3 = 36 - 64 = -28 \Rightarrow \boxed{a^2 - b^3 = -28}.$$

QUESTÃO 09

O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) −5. **b)** −1. **c)** 1. **d)** 2. **e)** 5.

Resolução — Alternativa A

Como há módulo em ambos os lados da equação, não é necessário analisar separadamente o sinal das funções dentro destes.

Assim, temos que:

$$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3| \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = \pm(2x - 3) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sendo todas as raízes reais, seu produto é dado por:

$$P = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{P = -5}$$

QUESTÃO 10

Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

a) a soma de todas as raízes é 5.
b) o produto de todas as raízes é 21.
c) a única raiz real é maior que zero.
d) a soma das raízes não reais é 10.
e) todas as raízes são reais.

Resolução — Alternativa A

Podemos reescrever o somatório da seguinte maneira:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = 0 \Leftrightarrow (x - a_1)^3 + (x - a_2)^2 + (x - a_3) = 0$$

Desenvolvendo cada binômio e agrupando os termos com o mesmo expoente, temos:

$$(x - a_1)^3 + (x - a_2)^2 + (x - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x^2(1 - 3a_1) + x(3a_1^2 - 2a_2 + 1) + (-a_1^3 + a_2^2 - a_3) = 0$$

Sabendo que $a_1 = 2$, temos que:

$$\begin{cases} x = 0 \text{ é raiz} \Rightarrow -a_1^3 + a_2^2 - a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1^3 + a_3 = a_2^2 & \text{(I)} \\ a_1 + a_2 + a_3 = 6 \Leftrightarrow 2 + 2q + 2q^2 = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a equação **(II)**, temos $q = 1$ ou $q = 2$.

Se $q = 1$, a equação **(I)** fica $8 + 2 = 4$, que é falso.

Se $q = -2$, a equação **(I)** fica $8 + 8 = 16$, que é verdadeiro.

Logo, $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$ e $p(x) = x^3 - 5x^2 + 21x$.

Fatorando p(x), temos $p(x) = x^3 - 5x^2 + 21x = x \cdot (x^2 - 5x + 21)$.

Assim, as raízes de *p(x)* são $x = 0$ e $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{59}i}{2}$.

Portanto, **a soma das raízes é 5.**

QUESTÃO 11

A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com x e y reais, representa

a) o conjunto vazio.
b) um conjunto unitário.
c) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
d) um conjunto com um número infinito de pontos.
e) o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2(e^y - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

Resolução — Alternativa D

Reescrevendo a expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, temos:

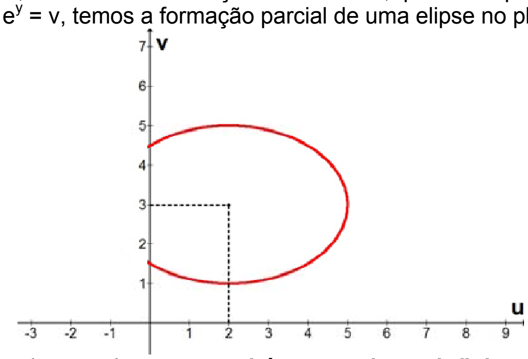
$$4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(4e^{2x} - 16e^x + 16\right) + \left(9e^{2y} - 54e^y + 81\right) = -61 + 97 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\left(2e^x - 4\right)^2 + \left(3e^y - 9\right)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$4\left(e^x - 2\right)^2 + 9\left(e^y - 3\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\left(e^x - 2\right)^2}{9} + \frac{\left(e^y - 3\right)^2}{4} = 1}.$$

Note que, com uma mudança de variáveis, por exemplo, fazendo e^x = u e e^y = v, temos a formação parcial de uma elipse no plano (u,v):



Assim, podemos observar que **há um conjunto infinito de pontos que satisfazem a equação.**

QUESTÃO 12

Com respeito à equação polinomial $2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=0$ é correto afirmar que

a) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

b) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

c) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.

d) não é divisível por $2x-1$.

e) uma única raiz está em $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Resolução — Alternativa E

Pelo teorema das raízes racionais, sabemos que as possíveis raízes racionais, da forma *p/q*, são tais que *p* é um divisor do termo independente (que no caso é 2) e *q* é um divisor do coeficiente líder (que no caso é 2 também). Sendo o conjunto dos divisores inteiros de 2 igual a $D(2)=\{1,-1,2,-2\}$, as possíveis raízes racionais são:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{2}$$

Por inspeção, obtemos que $+1$ é raiz (notando-se que a soma dos coeficientes é zero, chega-se rapidamente a esta conclusão) e $+\frac{1}{2}$ é também de fato raiz.

Reduzindo-se o grau do polinômio, através do dispositivo de Briot-Ruffini para x = +1:

1	2	-3	-3	+6	-2
	2	-1	-4	+2	0

Logo, $2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=(x-1)\cdot\underbrace{(2x^3-x^2-4x+2)}_{Q(x)}$

Repetindo-se a redução de grau para o polinômio Q(x) acima e $x=+\frac{1}{2}$:

½	2	-1	-4	+2
	2	0	-4	0

Assim, temos a fatoração do polinômio dado:

$$2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=(x-1)\cdot(x-1/2)\cdot(2x^2-4)\Rightarrow$$
$$2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=(x-1)\cdot(2x-1)\cdot(x^2-2)$$

De modo que as raízes desse polinômio são: 1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Julgando agora cada alternativa.

a) Incorreta. Temos apenas duas raízes racionais, 1 e $\frac{1}{2}$, já que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ e $-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

b) Incorreta. De fato há uma única raiz inteira ($x=1$), porém somente a raiz $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, enquanto $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ e $-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, já que nenhuma dessas raízes são números racionais.

c) Incorreta. De fato, duas raízes são racionais (1 e $\frac{1}{2}$), porém as outras duas raízes ($\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$) ainda são reais, isto é, têm parte imaginária nula.

d) Incorreta. Sendo $x=\frac{1}{2}$ uma raiz, segue que $2x-1$ é um dos fatores da equação, conforme apresentado acima.

e) Correta. De fato, uma única raiz é racional não inteira ($\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$) e pelo menos uma das raízes outras raízes é real não racional (tanto $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ como $-\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

QUESTÃO 13

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n}=-\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2+36y^2+mx+ny-23=0$ representa uma circunferência de raio $r=1$ cm e o centro *C* localizado no segundo quadrante. Se *A* e *B* são os pontos onde a circunferência cruza o eixo *Oy*, a área do triângulo *ABC*, em *cm*², é igual a

a) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **b)** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **c)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **d)** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **e)** $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Resolução — Alternativa D

Temos que:

$$36x^2+36y^2+mx+ny-23=0\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{mx}{36}+\frac{ny}{36}-\frac{23}{36}=0\Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{m}{72}\right)^2+\left(y+\frac{n}{72}\right)^2=\frac{23}{36}+\frac{m^2}{72^2}+\frac{n^2}{72^2}$$

Assim, o centro da circunferência C é $C\left(-\frac{m}{72},-\frac{n}{72}\right)$, e como o raio vale 1 cm:

$$\frac{23}{36}+\frac{m^2}{72^2}+\frac{n^2}{72^2}=1^2\Leftrightarrow\frac{m^2+n^2}{72^2}=\frac{13}{36}\Rightarrow\frac{4m^2+4n^2}{72^2}=\frac{13}{9}$$

Mas temos que $\frac{m}{n}=-\frac{2}{3}\Rightarrow3m=-2n\Rightarrow9m^2=4n^2$ e nossa equação fica:

$$\frac{4m^2+4n^2}{72^2}=\frac{4m^2+9m^2}{72^2}=\frac{13m^2}{72^2}=\frac{13}{9}\Rightarrow m^2=24^2$$

Como *C* deve pertencer ao segundo quadrante, temos que

$$\begin{cases}-\frac{m}{72}<0\\-\frac{n}{72}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\n<0\end{cases}$$

Logo $m=24$ e $n=-\frac{3}{2}\cdot m=-36$, e a intersecção da circunferência com o eixo y será então:

$$\begin{cases}x=0\\(x+\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{2})^2=1\end{cases}\Rightarrow(y-\frac{1}{2})^2=\frac{8}{9}\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

E os pontos são:

$$\begin{cases}A=(0,\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3})\\B=(0,\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3})\\C=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})\end{cases}\Rightarrow2\cdot A_{\Delta}=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}&1\\0&\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}&1\\\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}&1\end{matrix}\right\|=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Finalmente:

$$\boxed{A_{\Delta}=\frac{2\sqrt{2}}{9}}$$

QUESTÃO 14

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a

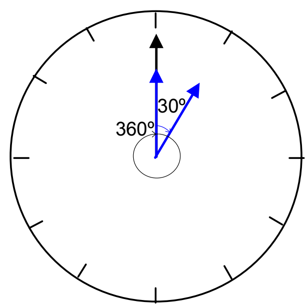
a) $\frac{23}{11}\pi$. **b)** $\frac{13}{6}\pi$. **c)** $\frac{24}{11}\pi$. **d)** $\frac{25}{11}\pi$. **e)** $\frac{7}{3}\pi$.

Resolução — Alternativa C

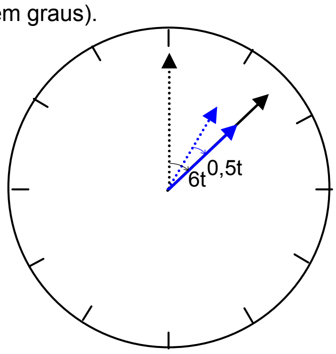
Inicialmente, note que o ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 minutos, ou seja, tem velocidade angular de 6°/min. O ponteiro das horas percorre 360° em 12 h (720 minutos), ou seja, tem velocidade angular de 0,5°/min.

Como as velocidades angulares são constantes, então o ângulo varrido pelo ponteiro de minutos entre duas superposições é fixo. Admita, sem perda de generalidade, que o primeiro "encontro" entre os ponteiros do relógio ocorre às 12h00min. Assim, o segundo "encontro" acontece entre 1h00min e 2h00min.

Observe, na figura abaixo que, quando o relógio marca exatamente 1h00min o ponteiro dos minutos está sobre o número 12, enquanto o das horas está sobre o número 1, ou seja, 30° à frente do ponteiro dos minutos.



Seja t o instante do segundo encontro, medido em minutos. Nesse instante, temos:
1) ponteiro dos minutos: percorreu uma distância angular de 6t (medida em graus).
2) ponteiro das horas: percorreu uma distância angular de 0,5t (também medida em graus).



Como o ponteiro das horas, no instante inicial (1h00min), estava 30° à frente do ponteiro dos minutos e ambos se encontram no instante t, segue que:

$$30° + 0{,}5t = 6t \Leftrightarrow 5{,}5t = 30 \Leftrightarrow t = \frac{30}{5{,}5} \Leftrightarrow t = \frac{60}{11}\text{min}$$

Desse modo, o segundo encontro ocorre a $1\text{h}\frac{60}{11}\text{min}$, ou seja, o tempo necessário para ocorrerem duas superposições consecutivas entre os ponteiros das horas e dos minutos é $60 + \frac{60}{11} = \frac{720}{11}\text{min}$. Sabemos que o ângulo varrido pelo ponteiro dos minutos, em graus, é dado por 6t. Em radianos esse ângulo seria dado por $\frac{\pi.t}{30}$. Desse modo, o ângulo, em radianos, varrido pelo ponteiro dos minutos é dado por $\frac{\pi}{30}.\frac{720}{11} = \frac{24\pi}{11}\text{rad}$.

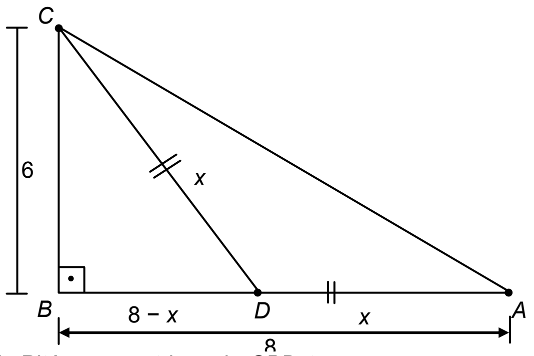
QUESTÃO 15

Seja *ABC* um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm respectivamente. Se *D* é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo *ADC* é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $\frac{3}{4}$. **b)** $\frac{15}{6}$. **c)** $\frac{15}{4}$. **d)** $\frac{25}{4}$. **e)** $\frac{25}{2}$.

Resolução **Alternativa D**

Abaixo esta um desenho ilustrando a situação:



Aplicando Pitágoras no triangulo *CBD*, temos:

$$CB^2 + BD^2 = CD^2 \Leftrightarrow 6^2 + (8 - x)^2 = x^2 \Leftrightarrow 36 + 64 - 16x + x^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$16x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{AD = \frac{25}{4}}$$

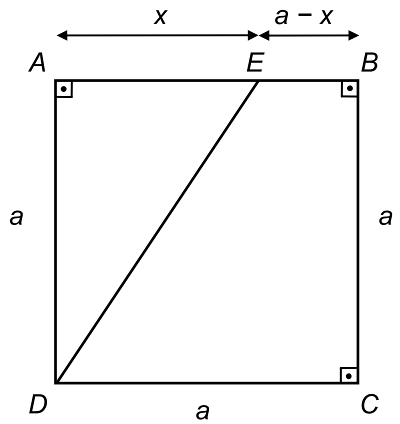
QUESTÃO 16

Sejam *ABCD* em quadrado e *E* um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado *ABCD*, do trapézio *BEDC* e do triângulo *ADE*. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}$. **b)** 5. **c)** $\frac{20}{3}$. **d)** $\frac{25}{3}$. **e)** 10.

Resolução **Alternativa C**

Sejam *x* a medida do segmento $\overline{AE}$ e *a* a medida do lado do quadrado.



Assim:
(1) área do quadrado: a^2

(2) área do trapézio: $\frac{(a + a - x) \cdot a}{2} = \frac{2a^2 - a \cdot x}{2}$

(3) área do triângulo: $\frac{a \cdot x}{2}$

Pelo enunciado, a sequência $\left(a^2; \frac{2a^2 - a \cdot x}{2}; \frac{a \cdot x}{2}\right)$ é uma progressão aritmética. Nesse caso, segue que o termo médio é a média aritmética dos extremos, ou seja:

$$\frac{2a^2 - a \cdot x}{2} = \frac{a^2 + \frac{a \cdot x}{2}}{2} \Leftrightarrow 2a^2 - 3ax = 0 \Leftrightarrow$$

$$a \cdot (2a - 3x) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } x = \frac{2a}{3}$$

Como *a* representa a medida do lado do quadrado, segue que $a > 0$, de modo que $x = \frac{2a}{3}$. Desse modo, a progressão aritmética fica $\left(a^2; \frac{2a^2}{3}; \frac{a^2}{3}\right)$. A soma desses termos é justamente o triplo do termo médio, ou seja, a soma é $3.\left(\frac{2a^2}{3}\right) = 2a^2 = 200 \Leftrightarrow a^2 = 100 \Leftrightarrow a = 10$.

Assim, temos que a medida de $\overline{AE}$ é igual a:

$$AE = \frac{2a}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3} \Leftrightarrow \boxed{AE = \frac{20}{3}}$$

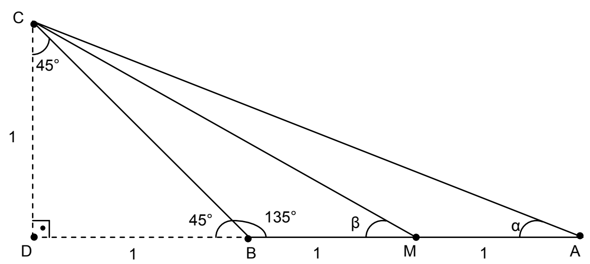
QUESTÃO 17

Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 *cm*, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 *cm*, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135° e *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em *radianos*, é igual a

a) $\frac{1}{5}\pi$. **b)** $\frac{1}{4}\pi$. **c)** $\frac{1}{3}\pi$. **d)** $\frac{3}{8}\pi$. **e)** $\frac{2}{5}\pi$.

Resolução **Alternativa B**

Um desenho representando o problema se encontra abaixo:



Como $\overline{CB}$ é hipotenusa de um triangulo retângulo, por pitágoras temos que sua medida é $\sqrt{2}$, e analogamente descobrimos que $\overline{CM}=\sqrt{5}$ e $\overline{CA}=\sqrt{10}$, então:

$$\cos(B\hat{A}C+B\hat{M}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=$$

$$=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}-\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}\frac{\overline{DC}}{\overline{MC}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{6}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $0<\alpha+\beta<180°\Rightarrow\alpha+\beta=45°=\frac{\pi}{4}$ radianos.

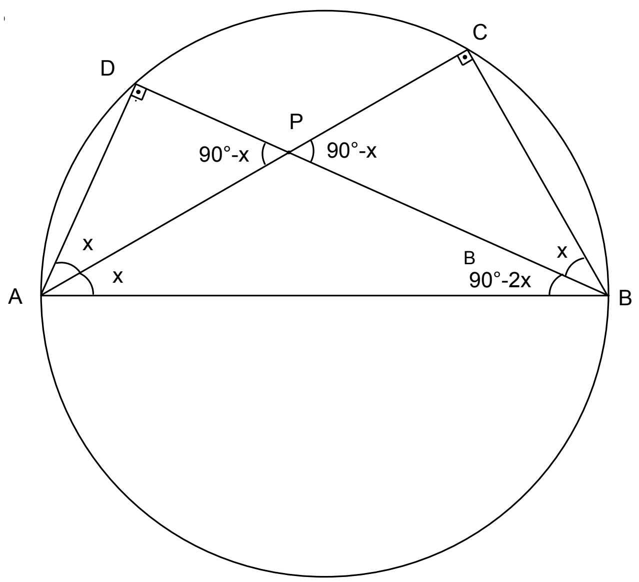
QUESTÃO 18

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha-2\beta$, em cm^2, é igual a

a) 14. **b)** 15. **c)** 16.
d) 17. **e)** 18.

Resolução **Alternativa A**

A partir do enunciado, podemos montar a seguinte figura:



Na figura P representa o ponto de intersecção entre a bissetriz BD e o lado AC do triângulo ABC. Note que se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha-2\beta$ corresponde justamente à soma das áreas dos triângulos APD e PBC.

Observe também que os triângulos ABC e ABD são retângulos, uma vez que possuem um lado igual ao diâmetro da circunferência. Para simplificar a notação, utilizaremos $\measuredangle ABC=2x$. Os triângulos PBC e ADP são semelhantes, uma vez que possuem os mesmos ângulos internos.

Como AB = 10 cm e BC = 6 cm, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos:

$$AB^2=BC^2+AC^2\Leftrightarrow 10^2=6^2+AC^2\Leftrightarrow AC^2=64\Leftrightarrow AC=8\text{ cm}$$

Note que, usando o triângulo ABC, temos $\cos 2x=\frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}2x=\frac{4}{5}$. A partir da identidade trigonométrica $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, temos:

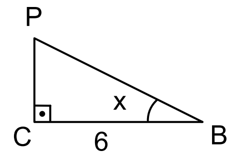
$$\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{\frac{3}{5}+1}{2}\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, segue que, para $0<x<\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2 x=1-\frac{4}{5}\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Ainda, $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{1}{2}$.

Considere agora o triângulo PBC:

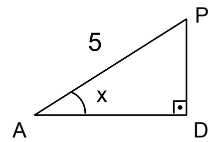


Aplicando tg x:

$$\operatorname{tg}x=\frac{PC}{BC}\Leftrightarrow\frac{PC}{6}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow PC=3\text{ cm}$$

Assim, a área do triângulo PBC é dada por $\frac{PC\cdot CB}{2}=\frac{3\cdot 6}{2}=9\text{ cm}^2$.

Considere agora o triângulo ADP:



Aplicando sen x e cos x:

$$\operatorname{sen}x=\frac{PD}{AP}\Leftrightarrow\frac{PD}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow PD=\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$\cos x=\frac{AD}{AP}\Leftrightarrow\frac{AD}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow AD=2\sqrt{5}\text{ cm}$$

Assim, a área do triângulo APD é dada por:

$\frac{AD\cdot PD}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=5\text{ cm}^2$.

Desse modo, encontramos $\alpha-2\beta=9+5\Leftrightarrow\boxed{\alpha-2\beta=14\text{ cm}^2}$.

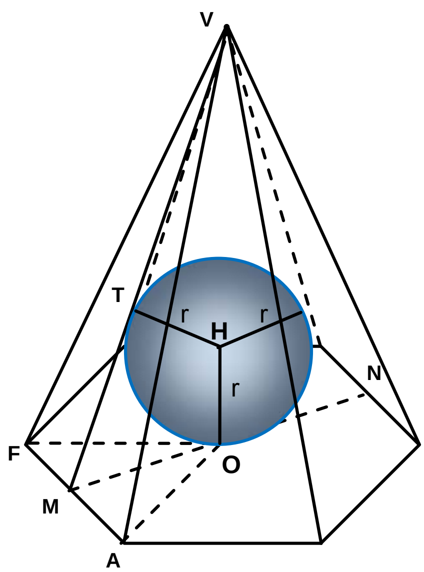
QUESTÃO 19

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$. **b)** $\frac{13}{3}$. **c)** $\frac{15}{4}$. **d)** $2\sqrt{3}$. **e)** $\frac{10}{3}$.

Resolução **Alternativa E**

Analisando a figura a seguir, onde O é o centro do hexágono, temos:



Como a base é um hexágono regular de lado igual a $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm, temos que o segmento OM é a altura de um dos seis triângulos equiláteros na qual é dividido o hexágono regular.

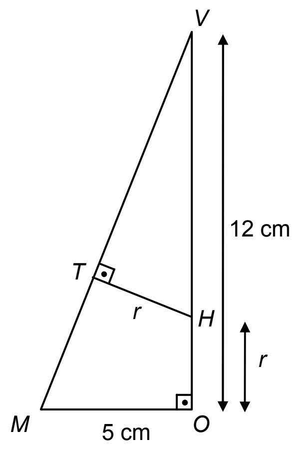
Assim, $OM=\frac{10}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5$ cm.

Do fato de que a altura da pirâmide é 12 cm, considerando o triângulo retângulo *VOM*, temos que:

$$VM^2 = OM^2 + OV^2 \Leftrightarrow$$
$$VM^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow VM = 13 \text{ cm}$$

Como os triângulos *VTH* e *VOM* são semelhantes (pois são ambos retângulos e têm o ângulo no vértice *V* em comum), temos a seguinte proporção:

$$\frac{r}{5} = \frac{12 - r}{13} \Leftrightarrow 13r = 60 - 5r \Leftrightarrow$$
$$\boxed{r = \frac{10}{3} \text{ cm}}$$



QUESTÃO 20

Considere as afirmações:

I - Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $\alpha = 120^\circ$.

II - Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30°, 45°, 50°, 50° e 170°.

III - Um poliedro convexo que tem 3 faces trlangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV - A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880°.

Destas, é(são) correta(s) apenas.

a) II. **b)** IV. **c)** II e IV.
d) I, II e IV. **e)** II, III e IV.

Resolução — Alternativa C

I – Falsa. A soma das medidas das faces deve ser maior do que 180° e menor do que 360°. Como as três faces têm medida 120°, a soma das três é exatamente 360°.

II – Verdadeira. Somando as medidas das faces, temos $30^\circ + 45^\circ + 50^\circ + 50^\circ + 170^\circ = 345^\circ$, ou seja, um valor maior do que 180° e menor do que 360°.

III – Falsa. Observe que o total de faces é $F = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$. Além disso, o total de arestas é $A = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2} = 15$. A partir da relação de Euler, se *V* representa o número de vértices temos $V - A + F = 2$, donde segue que $V - 15 + 7 = 2 \Leftrightarrow V = 10$. Assim, a figura tem 10 vértices.

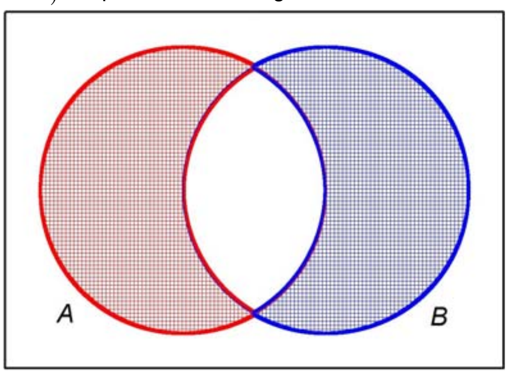
IV – Verdadeira. A soma das medidas dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é dada por $(V - 2) \cdot 360^\circ$. Assim, se ele possui 10 vértices, a soma será $(10 - 2) \cdot 360^\circ = 2880^\circ$.

QUESTÃO 21

Analise a existência de conjuntos *A* e *B*, ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

Resolução

Tomando dois conjuntos *A* e *B* quaisquer, temos a representação de $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ esquematizada a seguir.



Vamos supor que existam dois conjuntos *A* e *B* tais que:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \supset A \end{cases}$$

Em particular, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus B) \subset A \\ (B \setminus A) \subset A \end{cases}$.

A primeira sentença, $(A \setminus B) \subset A$, é sempre verdadeira, mas para que se tenha $(B \setminus A) \subset A$, necessariamente $B \setminus A = \varnothing$, pois caso contrário, existira elemento em *B* que não seria elemento de *A*, o que naturalmente impediria a inclusão de $B \setminus A$ em *A*.

Assim, teríamos $B \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow B \subset A$.

Se $\begin{cases} B \subset A \\ B \neq \varnothing \end{cases}$, temos que $A \setminus B \neq A$, já que *A* e *B* têm pelo menos um elemento em comum. Logo:

$$\begin{cases} A \setminus B \neq A \\ B \setminus A = \varnothing \end{cases} \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus B) \cup \varnothing = A \setminus B \neq A.$$

QUESTÃO 22

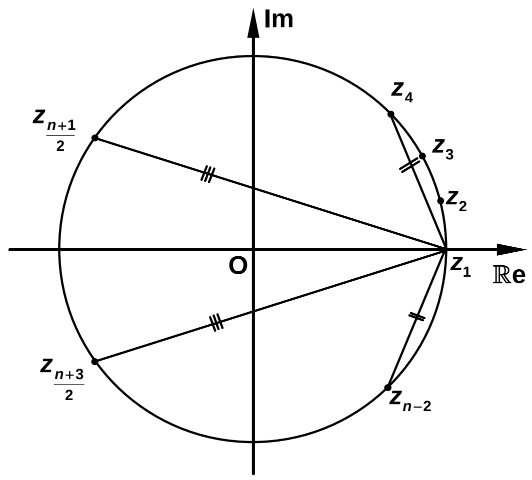
Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

Resolução

Por hipótese, a equação dada equivale ao polinômio de grau n dado por: $z^n - 1 = 0$.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, esse polinômio tem n raízes complexas: $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Representando tais raízes no plano complexo de Argand-Gauss abaixo, temos que os afixos dessas raízes formam um polígono regular convexo de ***n*** lados inscrito em uma circunferência de raio unitário.



Assim, $|z_i - z_j|$ é a distância entre dois afixos distintos.

Portanto, o que está sendo pedido é o número total de distâncias distintas entre dois vértices do polígono formado.

Como o polígono é regular, podemos escolher qualquer um de seus vértices como referência, uma vez que o polígono pode ser rotacionado em torno da origem e para cada rotação obteríamos os mesmos resultados.

Por simplicidade, tomaremos $z_1 = 1$ como vértice de referência.

Sabendo do enunciado que o número de vértices é ímpar (pois **n** é ímpar), cada uma das $n - 1$ raízes restantes possui uma raiz simétrica em relação ao eixo real.

Portanto, se z_i é a simétrica de z_k, então $|z_i - z_1| = |z_k - z_1|$.

Assim, o número de distâncias distintas que podemos obter é $\frac{n-1}{2}$.

Portanto, o número de valores $|z_i - z_j|$ distintos entre si é $\boxed{\frac{n-1}{2}}$.

QUESTÃO 23

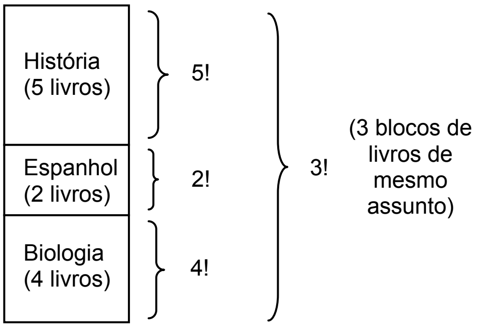
Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Resolução

Vamos calcular o número de possibilidades de empilhar os livros da maneira como pede o exercício (juntar os do mesmo assunto). Podemos ver que:

- Devemos permutar os livros de mesmo assunto dentro de cada bloco.
- Devemos permutar os blocos entre si.

Podemos ver na figura abaixo os três "blocos" de livros de mesmo assunto:



Desta forma, o número de possíveis empilhamentos desejados é $e = (5! \cdot 2! \cdot 4!) \cdot 3!$.

Como temos um total de 11 livros, o número de total empilhamentos possíveis é 11!.

Assim, a probabilidade de empilhar os livros juntando aqueles de mesmo assunto é $p = \frac{(5! \cdot 2! \cdot 4!) \cdot 3!}{11!} \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{1}{1155}}$.

QUESTÃO 24

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - x + 19\right)}$.

Resolução

Vamos antes encontrar as condições de existência do logaritmo, tomando o logaritmando como positivo:

$$x^2 - x + 19 > 0$$

Para essa inequação de segundo grau, calculamos o discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 19 = -75 < 0$. Sendo assim, o logaritmando $x^2 - x + 19$ é sempre positivo, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Reescrevendo então a inequação para igualar as bases das potências em ambos os lados, temos:

$$4^2 < 4^{-\log_{5^{-1}}\left(x^2 - x + 19\right)}$$

Como as bases são maiores que 1, podemos comparar os expoentes mantendo o sinal da inequação:

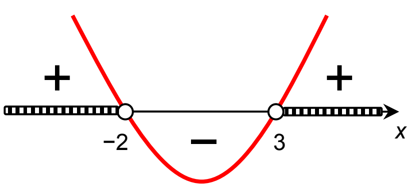
$$2 < -\log_{5^{-1}}\left(x^2 - x + 19\right)$$

$$\log_5\left(x^2 - x + 19\right) > 2$$

$$\log_5\left(x^2 - x + 19\right) > \log_5 25$$

Sendo aqui a base também maior que 1, comparamos os logaritmandos novamente mantendo o sinal da inequação:

$$x^2 - x + 19 > 25 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0$$



Resolvendo a partir do gráfico da função do segundo grau esboçado acima, temos que:

$$\boxed{x < -2 \text{ ou } x > 3}$$

QUESTÃO 25

Determine todas as matrizes $M \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

Resolução

Consideremos $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, devemos encontrar as relações em x,y,z e w tal que $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tenhamos $MN = NM$, então isso é equivalente a:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

Igualando o primeiro elemento de cada matriz obtemos:

$$ax + cy = ax + bz \Leftrightarrow cy = bz,\ \forall b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = z = 0$$

Então nossa igualdade se reduz a:

$$\begin{pmatrix} ax & bx \\ cw & dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bw \\ cx & dw \end{pmatrix},\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = w$$

Então nossa solução são todas as matrizes da forma $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

> Ou seja $M = \lambda \cdot I_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.

QUESTÃO 26

Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Resolução

Por hipótese, se a equação do segundo grau admite duas raízes reais, distintas e maiores do que zero, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \quad (*) \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Admitiremos que $2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ para que a equação seja efetivamente uma equação do segundo grau.

Da equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ temos:

$$\begin{cases} \Delta = 8m^2 - 16 \\ S = \frac{2m}{m - 2} \\ P = \frac{m + 2}{2 - m} \end{cases}.$$

Aplicando as condições de (*), temos:

$$\begin{cases} \Delta = 8m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow m > \sqrt{2} \text{ ou } m < -\sqrt{2} \\ S = \frac{2m}{m - 2} > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ ou } m > 2 \\ P = \frac{m + 2}{2 - m} > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \end{cases}$$

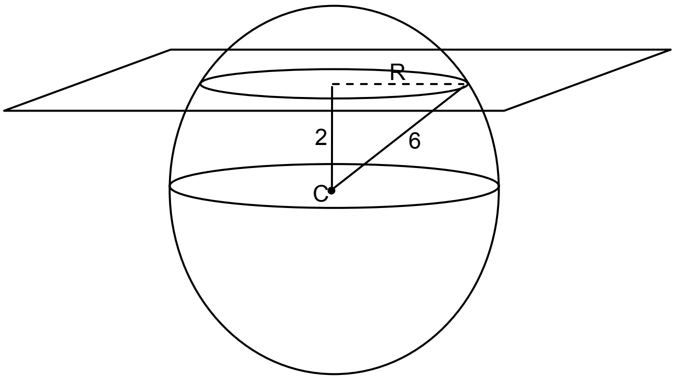
Fazendo a intersecção das três possibilidades, temos que $\boxed{-2 < m < -\sqrt{2}}$.

QUESTÃO 27

Considere uma esfera Ω com centro em *C* e raio $r = 6\,cm$ e um plano Σ que dista 2 *cm* de *C*. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

Resolução

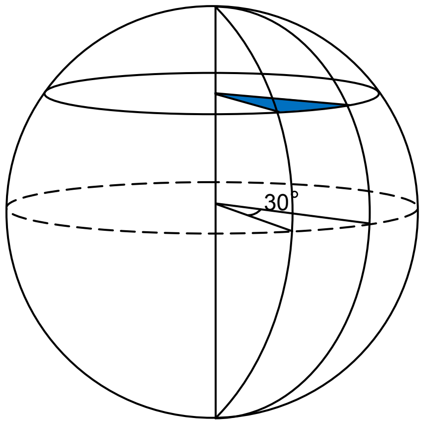
Fazendo a intersecção entre a esfera Ω e o plano Σ, temos:



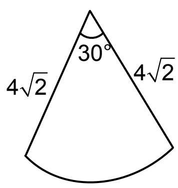
Observe que essa intersecção é uma circunferência. Seja R a medida de seu raio. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 2^2 = 6^2 \Leftrightarrow R^2 = 32 \Leftrightarrow R = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

Considere agora a intersecção entre a cunha esférica e o plano:



Note que essa intersecção é um setor circular de raio $4\sqrt{2}$ cm e ângulo de 30°:



Assim, a área dessa interseção corresponde a $\frac{1}{12}$ da área de um círculo de raio $4\sqrt{2}$ cm. Desse modo:

$$Area = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot(4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow Area = \frac{32\pi}{12} \Leftrightarrow \boxed{Area = \frac{8\pi}{3}cm^2}$$

QUESTÃO 28

a) Calcule $\left(\cos^2\frac{\pi}{5} - \text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{10} - 2\cdot\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10}$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $\text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$.

Resolução

a) Seja $E = \underbrace{\left(\cos^2\frac{\pi}{5} - \text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)}_{\cos\frac{2\pi}{5}}\cdot\cos\frac{\pi}{10} - \underbrace{2\cdot\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}_{\text{sen}\frac{2\pi}{5}}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$

$$E = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{10} - \text{sen}\frac{2\pi}{5}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Logo: $\boxed{\left(\cos^2\frac{\pi}{5} - \text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{10} - 2\cdot\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10} = 0}$.

b) Seja $x = \text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$

Pelo desenvolvimento do item (a), notamos que os ângulos $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{2\pi}{5}$ são complementares, isto é, $\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$.

Logo: $\text{sen}\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\frac{\pi}{10} = \cos^2\frac{\pi}{5} - \text{sen}^2\frac{\pi}{5}$ (I)

Também do item (a), temos que:

$$2\cdot\text{sen}\frac{\pi}{5}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{5}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10}}_{x} = \underbrace{\left(\cos^2\frac{\pi}{5} - \text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)}_{\text{sen}\frac{\pi}{10}\text{ (eq. I)}}\cdot\cos\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\text{sen}\frac{\pi}{5}\cdot x = \text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow 2\cdot\left(2\cdot\text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}\right)\cdot x = \text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Logo: $\boxed{\text{sen}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}}$.

QUESTÃO 29

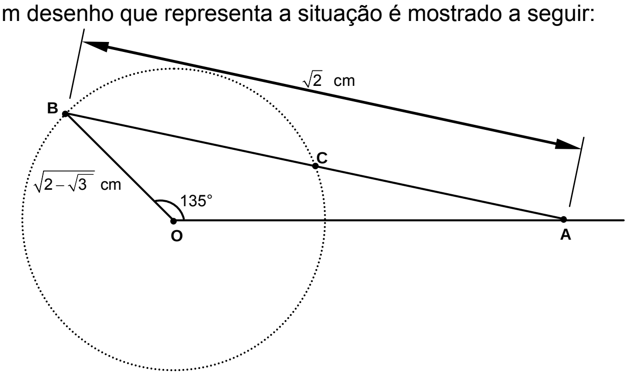
Num triângulo *AOB* o ângulo *AÔB* mede 135° e oas lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto C $(\neq B)$.

a) Mostre que OÂB mede 15°.

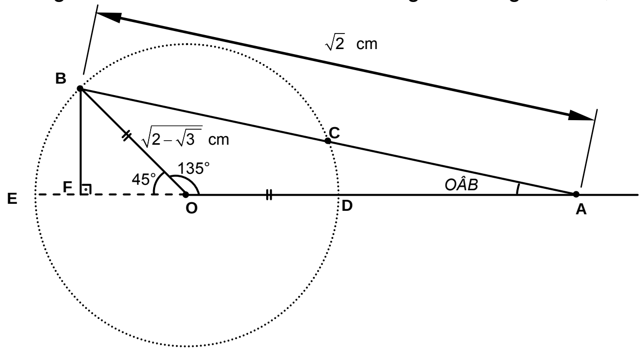
b) Calcule o comprimento $\overline{AC}$.

Resolução

a) Um desenho que representa a situação é mostrado a seguir:



Prolongando a reta AO e fechando o triângulo retângulo OFB, temos:



Aplicando o seno do angulo $F\hat{O}B = 45^\circ$:

$$\text{sen}\left(F\hat{O}B\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{FB}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

Agora para o triângulo FAB:

$$\text{sen}\left(O\hat{A}B\right) = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

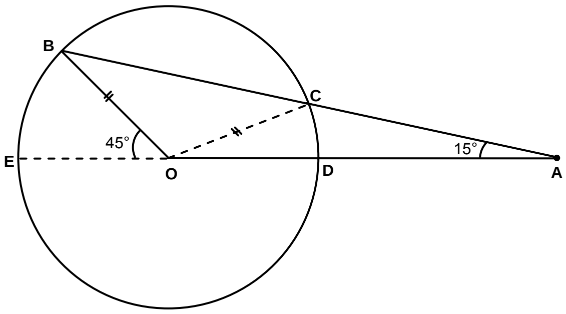
Agora, usando o fato de que $\text{sen}^2\,\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, mostraremos que $\text{sen}\left(O\hat{A}B\right) = \text{sen}15°$:

$$\text{sen}^2 15° = \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\text{sen}15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \text{sen}(O\hat{A}B)$$

Como $\text{sen}(O\hat{A}B) = \text{sen}15°$ e $0 < O\hat{A}B < 90°$, então $\boxed{O\hat{A}B = 15°}$.

b) Analisemos a figura a seguir:



Como $O\hat{A}B$ é ângulo excêntrico externo à circunferência, temos a relação:

$$O\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow 15° = \frac{45° - \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 15°$$

Como $C\hat{O}D$ é ângulo central correspondente a $\overset{\frown}{CD}$, $C\hat{O}D = 15°$.

Temos que o triângulo COA é isósceles, pois $C\hat{A}O = C\hat{O}A = 15°$.

Então $\overline{AC} = \overline{CO} =$ raio da circunferência $\Rightarrow \boxed{\overline{AC} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\ \text{cm}}$.

QUESTÃO 30

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}$ *cm*. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio *r*. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

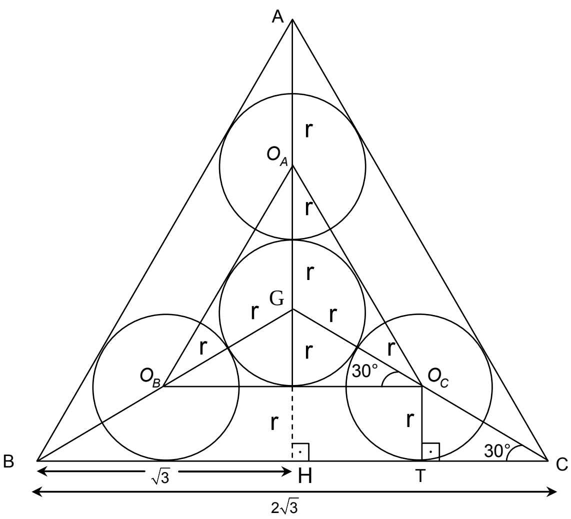
a) Determine o valor de *r*.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

Resolução

Por hipótese, podemos montar a seguinte figura:



Assim:

a) No triângulo CGH, temos:

$$\text{tg}30° = \frac{2\cdot r}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot r}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}cm}$$

b) A área A pedida é a área do triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm menos 4 áreas de um círculo de $r = \dfrac{1}{2}$. Logo,

$$A = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} - 4\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{A = \left(3\sqrt{3}-\pi\right)\ \text{cm}^2}$$

c) No triângulo CO_CT, temos que a distância *d* é o segmento O_CC, que é a hipotenusa do triângulo considerado. Assim, temos:

$$\text{sen}30° = \frac{r}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2d} \Leftrightarrow \boxed{d = 1cm}$$

IME 2011:
2 aprovados em 7 alunos

Equipe desta resolução

Matemática

Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Rafael da Gama Cavallari
Rodrigo do Carmo Silva

Revisão

Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani
Vagner Figueira de Faria

Digitação, Diagramação e Publicação

Carolina Marcondes Garcia Ferreira
Hannay Nishimaru Molar