

FEZ

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
**c a m p i n a s**

**Aprovou!**

Elite Resolve

**ITA 2011**

**Física**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**

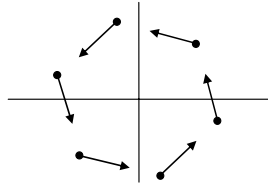
os melhores **gabaritos** da internet

**FÍSICA**

**QUESTÃO 01**

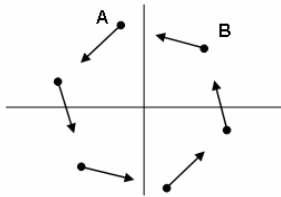
Um problema clássico da cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular. Considere que o hexágono tinha 10,0 m de lado no instante inicial e que os objetos se movimentam com velocidade de módulo constante de 2,00 m/s. Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

- a) 5,8 s e 11,5 m
- b) 11,5 s e 5,8 m
- c) 10,0 s e 20,0 m
- d) 20,0 s e 10,0 m
- e) 20,0 s e 40,0 m



**Resolução**

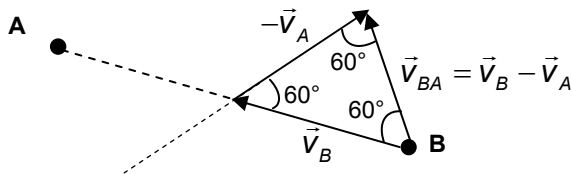
Vamos analisar dois objetos vizinhos, A e B:



**Alternativa C**

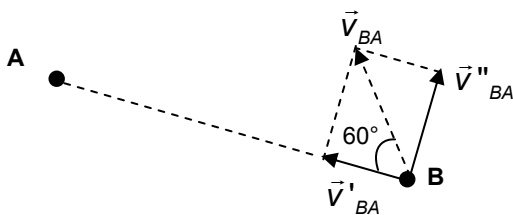
Observe que, pela simetria do problema, os objetos sempre estarão sobre os vértices de algum hexágono regular a cada instante.

Para resolver, calculamos a velocidade relativa  $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ . Como  $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A|$ , o triângulo formado pelos vetores abaixo é equilátero.



Pela figura acima, temos que  $|\vec{v}_{BA}| = |\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = 2,00$  m/s, pois são lados de um triângulo equilátero.

Sendo  $\vec{v}_{BA}$  a velocidade de aproximação entre os objetos no referencial do objeto A, temos:



Logo:

$$|\vec{v}'_{BA}| = |\vec{v}_{BA}| \cdot \cos 60^\circ = 2,00 \cdot \frac{1}{2} = 1,00 \text{ m/s}$$

Assim, B se aproxima de A à razão de 1,00m/s. Sendo a distância inicial entre eles de 10,0 m, temos:

$$\Delta t = \frac{|\vec{v}'_{BA}|}{L_0} = \frac{10,0}{1,00} = \boxed{10,0\text{s}}$$

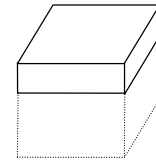
Como a velocidade de cada objeto tem módulo constante igual a 2,00 m/s, então a distância total percorrida será:

$$\Delta S = v \cdot \Delta t = 2,00 \cdot 10 = \boxed{20,0\text{m}}$$

**QUESTÃO 02**

Um cubo maciço homogêneo com 4,0 cm de aresta flutua na água tranqüila de uma lagoa, de modo a manter 70% da área total da sua superfície em contato com a água, conforme mostra a figura. A seguir, uma pequena rã se acomoda no centro da face superior do cubo e este se afunda mais 0,50 cm na água. Assinale a opção com os valores aproximados da densidade do cubo e da massa da rã, respectivamente.

- a) 0,20 g/cm³ e 6,4 g
- b) 0,70 g/cm³ e 6,4 g
- c) 0,70 g/cm³ e 8,0 g
- d) 0,80 g/cm³ e 6,4 g
- e) 0,80 g/cm³ e 8,0 g



**Resolução**

**Alternativa E**

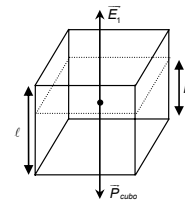
Na figura abaixo temos uma representação da situação inicial, onde o cubo flutua em água com uma parte submersa correspondente à altura  $h_1$ . Do enunciado temos que a área da parte submersa corresponde a 70% da área total do cubo, assim:

$$\frac{70}{100} A_T = A_{\text{Submersa}} \Rightarrow 0,7 \cdot 6 \cdot \ell^2 = A_{\text{Base}} + 4 \cdot A_{\text{Reângulo Lateral}} \Rightarrow$$

$$0,7 \cdot 6 \cdot \ell^2 = \ell^2 + 4 \cdot (\ell \cdot h_1) \Rightarrow 4,2 \cdot 4^2 = 4^2 + 4 \cdot (4 \cdot h_1)$$

$$4^2 \cdot (4,2 - 1) = 4^2 \cdot h_1$$

$$h_1 = 3,2 \text{ cm}$$



Para a situação de equilíbrio expressa na figura, temos:

$$|\vec{P}_{\text{Cubo}}| = |\vec{E}_1|$$

$$m_{\text{cubo}} \cdot g = d_{\text{Água}} \cdot V_{\text{Água Deslocada}} \cdot g \Rightarrow d_{\text{cubo}} \cdot V_{\text{Cubo}} = d_{\text{Água}} \cdot V_{\text{parte submersa}} \Rightarrow$$

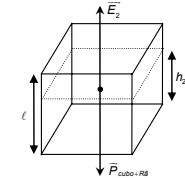
$$d_{\text{cubo}} = \frac{d_{\text{Água}} \cdot V_{\text{parte submersa}}}{V_{\text{Cubo}}} = \frac{d_{\text{Água}} \cdot \ell^2 \cdot h_1}{\ell^3} \Rightarrow d_{\text{cubo}} = 1,0 \left( \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) \cdot \frac{h_1}{\ell}$$

$$d_{\text{cubo}} = 1,0 \cdot \left( \frac{3,2}{4} \right) \left( \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{d_{\text{cubo}} = 0,8 \text{ g/cm}^3}$$

Na situação dois, expressa na figura abaixo, temos  $h_2 > h_1$ , ao colocarmos uma rã de massa  $m$  sobre o cubo. Pelo enunciado temos:

$$h_2 = h_1 + 0,5 = 3,7 \text{ cm}$$



Para este caso, podemos considerar que, na condição de equilíbrio, temos:

$$|\vec{P}_{\text{Cubo}}| + |\vec{P}_{\text{Rã}}| = |\vec{E}_2|$$

$$m_{\text{Cubo}} \cdot g + m_{\text{Rã}} \cdot g = d_{\text{Água}} \cdot V_{\text{Água Deslocada}} \cdot g \Rightarrow$$

$$m_{\text{Rã}} = d_{\text{Água}} \cdot V_{\text{parte submersa}} - d_{\text{cubo}} \cdot V_{\text{Cubo}} \Rightarrow$$

$$m_{\text{Rã}} = d_{\text{Água}} \cdot \ell^2 \cdot h_2 - d_{\text{cubo}} \cdot \ell^3 = \ell^2 \cdot (d_{\text{Água}} \cdot h_2 - d_{\text{cubo}} \cdot \ell) \Rightarrow$$

$$m_{\text{Rã}} = 4^2 \cdot (1,0 \cdot 3,7 - 0,8 \cdot 4) (\text{g}) \Rightarrow$$

$$\boxed{m_{\text{Rã}} = 8,0 \text{ g}}$$

**QUESTÃO 03**

Uma pessoa de 80,0 kg deixa-se cair verticalmente de uma ponte amarrada a uma corda elástica de "bungee jumping" com 16,0 m de comprimento. Considere que a corda se esticará até 20,0 m de comprimento sob a ação do peso. Suponha que, em todo o trajeto, a pessoa toque continuamente uma vuvuzela, cuja frequência natural é de 235 Hz. Qual(is) é(são) a(s) distância(s) abaixo da ponte em que a pessoa se encontra para que um som de 225 Hz seja percebido por alguém parado sobre a ponte?

- a) 11,4 m
- b) 11,4 m e 14,4 m
- c) 11,4 m e 18,4 m
- d) 14,4 m e 18,4 m
- e) 11,4 m, 14,4 m e 18,4 m

**Resolução**

**Alternativa C**

Primeiramente, vamos calcular a velocidade da pessoa em queda para que o observador perceba a frequência de 225 Hz. Pela equação do efeito Doppler, temos:

$$\frac{f_{obs}}{v \pm v_{obs}} = \frac{f_{fonte}}{v \mp v_{fonte}} \Leftrightarrow \frac{225}{340} = \frac{235}{340 + v_{fonte}} \Leftrightarrow \boxed{v_{fonte} \approx 15,11 \text{ m/s}}$$

No caso de queda livre, a distância percorrida a partir da ponte será dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S \Leftrightarrow \boxed{\Delta S \approx 11,4 \text{ m}}$$

Durante a queda, segundo o texto, a corda terá comprimento máximo igual a 20 m; assim já podemos, por eliminação, encontrar a resposta correta. Como se trata de uma corda elástica, a força da corda sobre a pessoa irá aumentar a partir do instante em que a pessoa estiver 16 m de distância da ponte e será igual ao peso quando estiver a 18 m, a partir daí a força da corda sobre a pessoa passará a ser maior que o peso e começa a freá-la. Portanto, somente entre 18 m e 20 m de distância da ponte que poderemos ter novamente a mesma velocidade, ficando apenas a alternativa C como satisfatória. Vamos, mesmo assim, calcular a outra distância. Utilizando a conservação da energia mecânica, obtemos a constante elástica da corda para o caso da elongação máxima da corda:

$$E_{pot\ grav} = E_{pot\ elás} \Leftrightarrow mgh = \frac{kx^2}{2} \Leftrightarrow k = \frac{2mgh}{x^2} \Leftrightarrow k = 2000 \text{ N/m}$$

Por fim, para o caso em que a velocidade da pessoa seja de 15,11 m/s, teremos a seguinte relação:

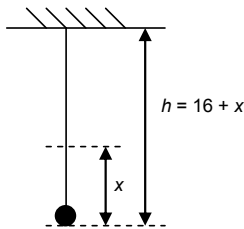
$$E_{pot\ grav} = E_{pot\ elás} + E_{cin} \Leftrightarrow mgh = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

onde  $x$  é a variação do comprimento da corda e  $h$  a distância da pessoa à ponte. Substituindo os valores, obtemos uma equação de segundo grau:

$$x^2 - 0,8x - 3,667 = 0 \text{ e } \Delta = 15,31 \approx 3,9^2. \text{ Obtendo } x \text{ levando em conta}$$

$$\text{que } x > 0, \text{ temos } x \approx \frac{0,8 \pm 3,9}{2} > 0 \Rightarrow x \approx 2,35 \text{ m.}$$

$$\therefore \boxed{\Delta S = 16 + x \approx 18,4 \text{ m}}$$



**QUESTÃO 04**

Na ficção científica *A Estrela*, de H.G.Wells, um grande asteroide passa próximo à Terra que, em consequência, fica com sua nova órbita mais próxima do Sol e tem seu ciclo lunar alterado para 80 dias. Pode-se concluir que, após o fenômeno, o ano terrestre e a distância Terra-Lua vão tornar-se, respectivamente,

- a) mais curto – aproximadamente a metade do que era antes.
- b) mais curto – aproximadamente duas vezes o que era antes.
- c) mais curto – aproximadamente quatro vezes o que era antes.
- d) mais longo – aproximadamente a metade do que era antes.
- e) mais longo – aproximadamente um quarto do que era antes.

**Resolução**

**Alternativa B**

Pela terceira Lei de Kepler (ou Lei Harmônica), podemos ver que se a Terra se aproximar do Sol, o período da órbita (ano terrestre) diminui:

$$\frac{T^2}{R^3} = cte$$

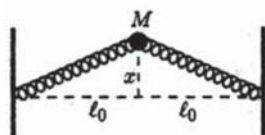
Para a Lua podemos fazer algo similar, levando-se em conta que o período orbital da Lua ao redor da Terra é em torno de 28 dias:

$$\frac{T^2}{R^3} = cte \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{T_0^2}{R_0^3} \Leftrightarrow \frac{80^2}{R^3} = \frac{28^2}{R_0^3} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\left(\frac{80}{28}\right)^2} \cdot R_0 \Leftrightarrow \boxed{R \approx 2R_0}$$

**QUESTÃO 05**

Sobre uma mesa sem atrito, uma bola de massa  $M$  é presa por duas molas alinhadas, de constante de mola  $k$  e comprimento natural  $\ell_0$ , fixadas nas extremidades da mesa. Então, a bola é deslocada a uma distância  $x$  na direção perpendicular à linha inicial das molas, como mostra a figura, sendo solta a seguir. Obtenha a aceleração da bola, usando a aproximação  $(1+a)^x \approx 1 + \alpha a$ .

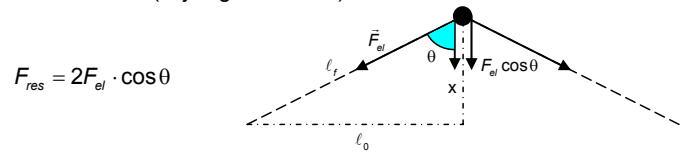
- a)  $a = -kx / M$
- b)  $a = -kx^2 / 2M\ell_0$
- c)  $a = -kx^2 / M\ell_0$
- d)  $a = -kx^3 / 2M\ell_0^2$
- e)  $a = -kx^3 / M\ell_0^2$



**Resolução**

**Alternativa E**

Partindo de uma análise vetorial, vamos calcular a força resultante que atua sobre a bola (veja figura abaixo):



Lembrando que, pela Lei de Hooke,  $F_{el} = -k \cdot \Delta x$ , assim:

$$M \cdot a = -2k \cdot (\ell_f - \ell_0) \cdot \frac{x}{\ell_f} = -2kx \cdot \underbrace{\frac{(\ell_f - \ell_0)}{\ell_f}}_{= \gamma}$$

Trabalhando com a fração que apareceu no último termo:

$$\frac{(\ell_f - \ell_0)}{\ell_f} = 1 - \frac{\ell_0}{\ell_f} = 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}} = 1 - \ell_0 (x^2 + \ell_0^2)^{-1/2} = 1 - \ell_0 \left[ \ell_0^2 \left( \frac{x^2}{\ell_0^2} + 1 \right) \right]^{-1/2} = \gamma$$

Usando a aproximação do enunciado encontramos  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell_0^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell_0^2}$$

obteremos:

$$M \cdot a = -2kx \cdot \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell_0^2} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{-kx^3}{M\ell_0^2}}$$

**QUESTÃO 06**

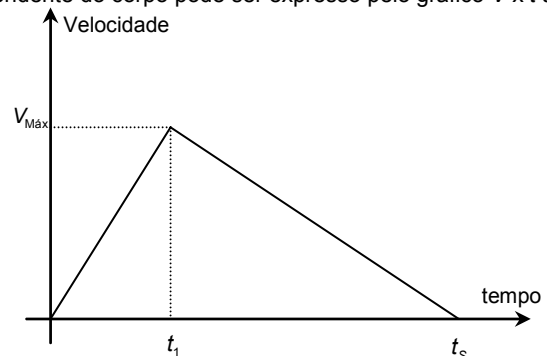
Um corpo de massa  $M$ , inicialmente em repouso, é erguido por uma corda de massa desprezível até uma altura  $H$ , onde fica novamente em repouso. Considere que a maior tração que a corda pode suportar tenha módulo igual a  $nMg$ , em que  $n > 1$ . Qual deve ser o menor tempo possível para ser feito o erguimento desse corpo?

- a)  $\sqrt{\frac{2H}{(n-1)g}}$
- b)  $\sqrt{\frac{2nH}{(n-1)g}}$
- c)  $\sqrt{\frac{nH}{2(n-1)^2g}}$
- d)  $\sqrt{\frac{4nH}{(n-2)g}}$
- e)  $\sqrt{\frac{4nH}{(n-1)g}}$

**Resolução**

**Alternativa B**

O movimento terá menor duração se o corpo gozar de suas máximas aceleração e desaceleração ao longo da subida. Assim, o movimento ascendente do corpo pode ser expresso pelo gráfico  $V \times t$  abaixo:



Onde  $t_s$  é o tempo total do movimento. A área para  $0 < t < t_s$  será igual à altura  $H$ :

$$H = \frac{V_{Máx} \cdot t_s}{2} \quad (1)$$

Para  $0 < t < t_1$ , temos que a força de tração no cabo será maior que o peso (e atingirá o valor máximo suportado  $nMg$ ). Assim, pela segunda lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{T}| - |\vec{P}| &= M \cdot a \\ n \cdot M \cdot g - M \cdot g &= M \cdot a \Leftrightarrow a = (n-1) \cdot g \end{aligned}$$

Assim conseguimos calcular  $V_{Máx}$ :

$$V = V_0 + a \cdot t \Leftrightarrow V_{Máx} = (n-1) \cdot g \cdot t_1$$

Para calcular  $t_s$  em função de  $t_1$ , vamos impor a máxima desaceleração possível, que acontece quando a força de tração é

zero, ou seja, o corpo estará sob ação da gravidade (a desaceleração será  $g$ ).

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = (n-1) \cdot g \cdot t_1 - g \cdot (t_s - t_1) \Leftrightarrow$$

$$t_1 = \frac{t_s}{n} \quad (2)$$

Voltando à equação (1) temos:

$$H = \frac{V_{\text{Máx}} \cdot t_s}{2} = \frac{(n-1) \cdot g \cdot t_1 \cdot t_s}{2}$$

Usando a equação (2):

$$H = \frac{(n-1) \cdot g \cdot \left(\frac{t_s}{n}\right) \cdot t_s}{2} \Leftrightarrow$$

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot H}{(n-1) \cdot g}}$$

**QUESTÃO 07**

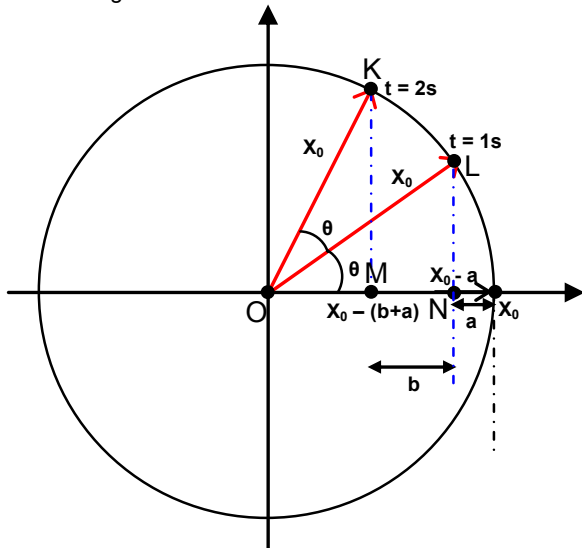
Uma partícula de massa  $m$  move-se sobre uma linha reta horizontal num Movimento Harmônico Simples (MHS) com centro  $O$ . Inicialmente, a partícula encontra-se na máxima distância  $x_0$  de  $O$  e, a seguir, percorre uma distância  $a$  no primeiro segundo e uma distância  $b$  no segundo seguinte, na mesma direção e sentido. Quanto vale a amplitude  $x_0$  desse movimento?

- a)  $2a^3 / (3a^2 - b^2)$
- b)  $2b^2 / (4a - b)$
- c)  $2a^2 / (3a - b)$
- d)  $2a^2 b / (3a^2 - b^2)$
- e)  $4a^2 / (3a - 2b)$

**Resolução**

**Alternativa C**

Na comparação entre o MHS e o MCU associado ao problema proposto temos a figura abaixo:



Como os intervalos de tempo são iguais temos que o ângulo percorrido no 1º segundo e no decorrer do 2º segundo serão iguais (os chamamos de  $\theta$ ).

Do triângulo OLN temos:

$$\cos \theta = \frac{x_0 - a}{x_0} \quad (1)$$

Do triângulo OKM temos:

$$\cos 2\theta = \frac{x_0 - (b+a)}{x_0} \quad (2)$$

$$\cos 2\theta = 2 \cdot \cos^2 \theta - 1 \quad (3)$$

Substituindo a equação (3) na equação (2):

$$2 \cdot \cos^2 \theta - 1 = \frac{x_0 - (b+a)}{x_0}$$

Agora substituímos a equação (1) na equação acima e desenvolvemos para obter:

$$2 \cdot \left(\frac{x_0 - a}{x_0}\right)^2 - 1 = \frac{x_0 - (b+a)}{x_0} \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = x_0(3a - b) \Leftrightarrow x_0 = \frac{2a^2}{3a - b}$$

**QUESTÃO 08**

Dois partículas idênticas, de mesma massa  $m$ , são projetadas de uma origem  $O$  comum, num plano vertical, com velocidades iniciais de mesmo módulo  $v_0$  e ângulos de lançamento respectivamente  $\alpha$  e  $\beta$  em relação à horizontal. Considere  $T_1$  e  $T_2$  os respectivos tempos de alcance do ponto mais alto de cada trajetória e  $t_1$  e  $t_2$  os respectivos tempos para as partículas alcançarem um ponto comum de ambas as trajetórias. Assinale a opção com o valor da expressão  $t_1 T_1 + t_2 T_2$ .

- a)  $2v_0^2(tg\alpha + tg\beta) / g^2$
- b)  $2v_0^2 / g^2$
- c)  $4v_0^2 \text{sen}\alpha / g^2$
- d)  $4v_0^2 \text{sen}\beta / g^2$
- e)  $2v_0^2(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta) / g^2$

**Resolução**

**Alternativa B**

**Obs:** Apesar de o enunciado não mencionar, consideraremos na resolução do problema um campo gravitacional  $\vec{g}$ , uniforme, vertical e orientado para baixo.

Seja um lançamento oblíquo com ângulo de lançamento igual a  $\theta$  e velocidade inicial de módulo igual a  $v_0$ .

Determinação do tempo de alcance do ponto mais alto da trajetória:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -g = \frac{0 - v_0 \text{sen}\theta}{T - 0} \Rightarrow T = \frac{v_0}{g} \text{sen}\theta$$

Determinação da equação reduzida da trajetória a partir das equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{cases}, \text{ como } \begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta \\ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen} \theta \\ a = -g \end{cases}, \text{ temos:}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t \\ y(t) = v_0 \cdot \text{sen} \theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Isolando  $t$  na 1ª equação, obtemos:  $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \theta}$  (I).

Substituindo  $t$  na 2ª equação, obtemos:

$$y = v_0 \cdot \text{sen} \theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \theta}\right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \theta}\right)^2$$

$$y = tg\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2$$

(equação reduzida da trajetória)

Considerando as duas partículas do problema, podemos escrever:

	Tempo de alcance do ápice	Equação reduzida da trajetória
Partícula 1	$T_1 = \frac{v_0}{g} \text{sen}\alpha$	$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$
Partícula 2	$T_2 = \frac{v_0}{g} \text{sen}\beta$	$y = tg\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} \cdot x^2$

Para o ponto P, comum às duas trajetórias, temos  $y_1 = y_2$ :

$$tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 = tg\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

$$(tg\alpha - tg\beta) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2} \left( \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\beta} \right) \cdot x^2 = 0$$

$$\left[ (tg\alpha - tg\beta) - \frac{g}{2v_0^2} \left( \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\beta} \right) \cdot x \right] \cdot x = 0$$

$x = 0$  (abscissa do ponto de lançamento comum) ou

$$x_p = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{(tg\alpha - tg\beta)}{(\sec^2\alpha - \sec^2\beta)}, \text{ (abscissa do ponto P).}$$

Determinação dos tempos para as partículas alcançarem o ponto P:  
Da equação (I), temos:

$$t_1 = \frac{x_p}{v_0 \cdot \cos\alpha} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{x_p}{v_0 \cdot \cos\beta}$$

Seja  $E$  a expressão pedida no enunciado.

$$E = t_1 T_1 + t_2 T_2$$

Substituindo as expressões determinadas para  $t_1$ ,  $T_1$ ,  $t_2$  e  $T_2$ , obtemos:

$$E = \frac{x_p}{v_0 \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{v_0}{g} \text{sen}\alpha + \frac{x_p}{v_0 \cdot \cos\beta} \cdot \frac{v_0}{g} \text{sen}\beta$$

$$E = \frac{1}{g} \cdot (tg\alpha + tg\beta) \cdot x_p, \text{ retomando a expressão de } x_p, \text{ temos:}$$

$$E = \frac{1}{g} \cdot (tg\alpha + tg\beta) \cdot \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{(tg\alpha - tg\beta)}{(\sec^2\alpha - \sec^2\beta)}$$

$$E = \frac{2v_0^2}{g^2} \cdot \frac{(tg^2\alpha - tg^2\beta)}{(\sec^2\alpha - \sec^2\beta)}$$

Da trigonometria, sabemos que:  $tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ . Logo,  
 $(\sec^2\alpha - \sec^2\beta) = (tg^2\alpha - tg^2\beta)$ . Então:

$$E = \frac{2v_0^2}{g^2} \cdot \frac{(tg^2\alpha - tg^2\beta)}{(tg^2\alpha - tg^2\beta)} \Rightarrow E = \frac{2v_0^2}{g^2}$$

### QUESTÃO 09

Um exercício sobre a dinâmica da partícula tem seu início assim enunciado: *Uma partícula está se movendo com uma aceleração cujo módulo é dado por  $\mu(r + a^3 / r^2)$ , sendo  $r$  a distância entre a origem e a partícula. Considere que a partícula foi lançada a partir de uma distância  $a$  com uma velocidade inicial  $2\sqrt{\mu a}$ . Existe algum erro conceitual nesse enunciado? Por que razão?*

- a) Não, porque a expressão para a velocidade é consistente com a da aceleração;  
b) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria  $2a^2\sqrt{\mu}$ ;  
c) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria  $2a^2\sqrt{\mu/r}$ ;  
d) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria  $2\sqrt{a^2\mu/r}$ ;  
e) Sim, porque a expressão correta para a velocidade seria  $2a\sqrt{\mu}$ ;

### Resolução Alternativa E

Analisando as dimensões das grandezas físicas envolvidas, temos:

$$[\text{aceleração}] = [\mu(r + a^3 / r^2)] \Leftrightarrow L^1 \cdot T^{-2} = [\mu \cdot r] = [\mu \cdot a^3 / r^2]$$

Sendo  $[r] = L^1$ , vem que: 
$$\begin{cases} [\mu] = T^{-2} \\ [a] = L^1 \end{cases}$$

Dessa forma, a velocidade inicial indicada,  $2\sqrt{\mu a}$ , tem dimensão

$$[v] = [2\sqrt{\mu a}] = L^{1/2} \cdot T^{-1}, \text{ o que não é conceitualmente correto, uma vez que } [v] = L^1 \cdot T^{-1}.$$

Analisando as dimensões das alternativas (b), (c), (d) e (e), temos:

b)  $[2a^2\sqrt{\mu}] = L^2 \cdot T^{-1}$

c)  $[2a^2\sqrt{\frac{\mu}{r}}] = L^{3/2} \cdot T^{-1}$

d)  $[2\sqrt{\frac{a^2 \cdot \mu}{r}}] = L^2 \cdot T^{-1}$

e)  $[2a\sqrt{\mu}] = L^1 \cdot T^{-1}$

Das alternativas, a única que tem dimensão de velocidade é a alternativa E.

### Observação:

Da maneira como estão apresentadas as alternativas, o aluno poderia ficar com a falsa impressão de que é possível determinar a velocidade inicial da partícula. A expressão apresentada na alternativa E é apenas e tão somente uma possibilidade para a velocidade inicial, sendo a única dentre as alternativas que fornece um valor coerente em termos dimensionais. A velocidade inicial pode assumir qualquer valor, desde que tenha dimensão de velocidade.

Podemos sugerir como correção para a redação da alternativa:

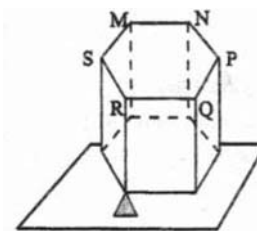
“Sim, e a expressão correta para a velocidade **poderia** ser  $2a\sqrt{\mu}$ ”

ou

“Sim, e **uma possível** expressão correta para a velocidade seria  $2a\sqrt{\mu}$ ”.

### QUESTÃO 10

Um prisma regular hexagonal homogêneo com peso de 15 N e aresta da base de 2,0 m é mantido de pé graças ao apoio de um dos seus vértices da base inferior (ver figura) e à ação de uma força vertical de suspensão de 10 N (não mostrada). Nessas condições, o ponto de aplicação da força na base superior do prisma encontra-se



- a) sobre o segmento  $\overline{RM}$  a 2,0 m de R.  
b) sobre o segmento  $\overline{RN}$  a 4,0 m de R.  
c) sobre o segmento  $\overline{RN}$  a 3,0 m de R.  
d) sobre o segmento  $\overline{RN}$  a 2,0 m de R.  
e) sobre o segmento  $\overline{RP}$  a 2,5 m de R.

### Resolução

Pela figura a seguir, observamos que a força vertical de suspensão deve estar no segmento  $\overline{RN}$ . Para um equilíbrio estático, temos que o momento total em relação a um ponto qualquer deve ser nulo:

$$M_{\text{horário}} = M_{\text{anti-horário}}$$

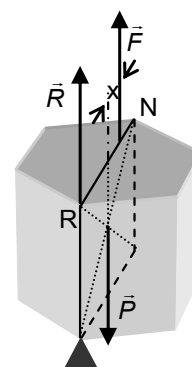
Escolhendo o apoio do prisma como ponto de articulação para o cálculo do momento total, teremos os torques da força peso (aplicada na altura do ponto médio de  $\overline{RN}$ ) e da força vertical de suspensão (localizada a uma distância  $x$  de R):

$$P \cdot \ell = F_{\text{susp}} \cdot x$$

Pode-se calcular, para um hexágono, que  $\overline{RN} = 2 \cdot \ell$ , onde  $\ell$  é o lado do hexágono. Substituindo os valores chegamos em:

$$15 \cdot 2 = 10 \cdot x \Leftrightarrow x = 3 \text{ m}$$

### Alternativa C



### QUESTÃO 11

Um relógio tem um pêndulo de 35 cm de comprimento. Para regular seu funcionamento, ele possui uma porca de ajuste que encurta o comprimento do pêndulo de 1 mm a cada rotação completa à direita e alonga este comprimento de 1 mm a cada rotação completa à esquerda. Se o relógio atrasa um minuto por dia, indique o número

aproximado de rotações da porca e sua direção necessários para que ele funcione corretamente.

- a) 1 rotação à esquerda
- b) 1/2 rotação à esquerda
- c) 1/2 rotação à direita
- d) 1 rotação à direita
- e) 1 e 1/2 rotações à direita

**Resolução** **Alternativa C**

Se o relógio com pêndulo de 35 cm atrasa um minuto por dia, então após o passar de um dia (86400 segundos) o relógio terá marcado 60 segundos a menos (86340 oscilações do pêndulo).

Desta forma, a frequência do pêndulo, que deveria ser 1 Hz se o relógio não atrasasse, é  $f = \frac{86340}{86400}$  Hz, e podemos aplicar a equação do pêndulo para esta situação inicial (de atraso):

$$\frac{1}{f} = T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{86400}{86340} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{0,35}}$$

Agora devemos rotacionar a porca para mudar o comprimento do pêndulo, de forma a obter  $T = 1$  s (relógio sincronizado). Para este novo comprimento  $\ell_{\text{final}}$ :

$$T = 1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell_{\text{final}}}{g}}$$

Dividindo as duas equações obtidas temos:

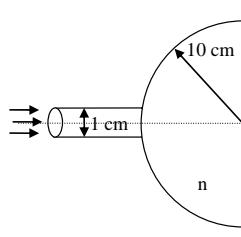
$$\begin{aligned} \frac{86340}{86400} &= \sqrt{\frac{\ell_{\text{final}}}{0,35}} \Rightarrow \ell_{\text{final}} = 0,35 \cdot \left(\frac{86340}{86400}\right)^2 \Rightarrow \\ \ell_{\text{final}} &= 0,35 \cdot \left(\frac{1439}{1440}\right)^2 = 0,35 \cdot \left(1 - \frac{1}{1440}\right)^2 \Rightarrow \\ \ell_{\text{final}} &= 0,35 \cdot \left(1 - \frac{2}{1440} + \left(\frac{1}{1440}\right)^2\right) \cong \left(1 - \frac{2}{1440}\right) \\ \ell_{\text{final}} &\cong 34,95 \text{ cm} \end{aligned}$$

Podemos ver que o comprimento do pêndulo deve encurtar 0,05 cm = 0,5 mm, logo é necessária **1/2 rotação à direita**.

**QUESTÃO 12**

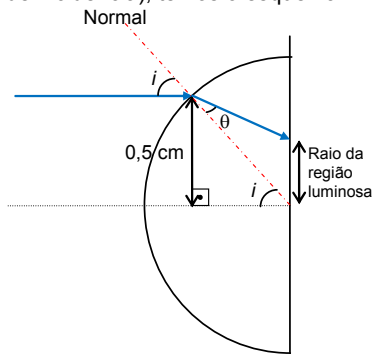
Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração  $n = 3/2$  tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura. Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequenos,  $\sin\theta \approx \theta$  e  $\tan\theta \approx \theta$ , o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de

- a) 1 cm
- b)  $\frac{2}{3}$  cm
- c)  $\frac{1}{2}$  cm
- d)  $\frac{1}{3}$  cm
- e)  $\frac{1}{10}$  cm



**Resolução** **Alternativa B**

Observando apenas o raio de luz de cima do feixe, e traçando o raio do hemisfério no ponto de incidência (que coincide com a direção normal no ponto de incidência), temos o esquema:



Podemos ver que os ângulos entre a normal e a luz incidente e entre a normal e o eixo de simetria do hemisfério são iguais (paralelas cortadas por uma transversal).

Observando o triângulo retângulo interno ao hemisfério (que possui raio igual a 10 cm), tem-se que

$$\text{sen } i = \frac{0,5}{10} = \frac{1}{20}$$

Aplicando agora a Lei de Snell (e considerando  $n_{\text{ar}} = 1$ ):

$$\begin{aligned} n_{\text{ar}} \cdot \text{sen } i &= n_{\text{vidro}} \cdot \text{sen } \theta \\ 1 \cdot \frac{1}{20} &= \frac{3}{2} \cdot \text{sen } \theta \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Nas condições de aproximação dadas pelo enunciado, o ângulo de incidência  $i$  é bastante pequeno, de forma que podemos aproximar o raio da região luminosa ( $\frac{1}{2} \cdot D$ ) por um arco de circunferência de raio

igual a 10 cm e ângulo  $\theta \approx \text{sen } \theta = \frac{1}{30}$ . Desta forma:

$$\frac{1}{2} \cdot D = R \cdot \theta = 10 \cdot \frac{1}{30} \Leftrightarrow \boxed{D = \frac{2}{3} \text{ cm}}$$

**QUESTÃO 13**

A inversão temporal de qual dos processos abaixo NÃO violaria a segunda lei de termodinâmica?

- a) A queda de um objeto de uma altura H e subsequente parada no chão
- b) O movimento de um satélite ao redor da Terra
- c) A freada brusca de um carro em alta velocidade
- d) O esfriamento de um objeto quente num banho de água fria
- e) A troca de matéria entre as duas estrelas de um sistema binário

**Resolução** **Alternativa B**

A Segunda Lei da Termodinâmica pode ser enunciada de várias formas e está intimamente relacionada com a ocorrência de processos espontâneos, que não se revertem a não ser que haja intervenção de um agente externo ao sistema analisado.

Essa intervenção externa está limitada pela natureza, de tal forma que a entropia (estado de desorganização) total do universo sempre aumenta ou se mantém constante com o tempo ( $\frac{dS}{dt} \geq 0$ ).

Em relação às alternativas, uma boa descrição para a lei em questão é:

*“a quantidade de trabalho útil que se pode obter a partir da energia do universo está constantemente diminuindo”*

Como o satélite orbitando ao redor da Terra (alternativa B) pode ser considerado conservativo, se considerarmos somente o efeito das forças gravitacionais (desprezando, por exemplo, efeitos de maré, que são fenômenos não conservativos) não há realização de trabalho por

agentes externos, sendo conservada a entropia ( $\frac{dS}{dt} = 0$ ). A reversão

do processo no tempo, portanto, também conservaria a entropia, não violando a Segunda Lei da Termodinâmica, pois  $\frac{dS}{dt} \geq 0$  vale para o

tempo no seu sentido normal ou no sentido contrário.

As outras alternativas possuem processos espontâneos e dissipativos, com trocas de energia, que implicam aumento de entropia:

- a) A transformação da energia com a colisão com o chão, por exemplo em energia sonora é um processo irreversível;
- c) O trabalho da força de atrito, que é uma força não conservativa, é irreversível;
- d) A transferência de energia térmica (calor), para o material de mais baixa temperatura, com perda de calor para o ambiente, simultaneamente e vaporização da água é um processo irreversível;
- e) A troca de massa entre as estrelas em um sistema binário é um processo irreversível, associado à evolução das estrelas, que ocorre com grande aumento da entropia do universo.

**QUESTÃO 14**

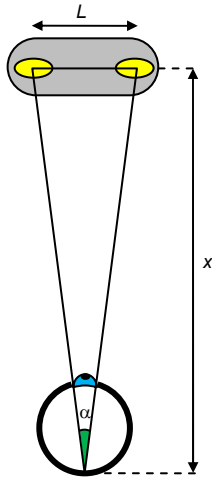
Fontes distantes de luz separadas por um ângulo  $\alpha$  numa abertura de diâmetro D podem ser distinguidas quando  $\alpha > 1,22\lambda / D$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz. Usando o valor de 5 mm para o diâmetro das suas pupilas, a que distância máxima aproximada de um carro você deveria estar para ainda poder distinguir seus faróis acesos? Considere uma separação entre os faróis de 2 m.

- a) 100 m
- b) 500 m
- c) 1 km
- d) 10 km
- e) 100 km

**Resolução**

**Alternativa D**

Seja  $L = 2 \text{ m}$  a separação entre os faróis,  $D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  a abertura da pupila e  $x$  o comprimento máximo, como esquematizado na figura a seguir.



Na situação limite do máximo comprimento, vamos impor que:

$$\alpha = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Leftrightarrow \frac{L}{x} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Leftrightarrow x = \frac{L \cdot D}{1,22 \cdot \lambda}$$

Adotando o comprimento de onda médio da luz fornecido no início da prova,  $\lambda = 570 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ :

$$x = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 570 \cdot 10^{-9}} \Leftrightarrow x \approx 1,44 \cdot 10^4 \text{ m} \approx 14,4 \text{ km}$$

**Observação.** Poderíamos adotar um intervalo de confiança para esse comprimento  $x$  impondo que o espectro da luz visível varia aproximadamente entre 400 nm e 700 nm. Nesse caso, teríamos:

$$400 \cdot 10^{-9} \leq \lambda \leq 700 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow 400 \cdot 10^{-9} \leq \frac{L \cdot D}{1,22 \cdot x} \leq 700 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow$$

$$400 \cdot 10^{-9} \leq \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot x} \leq 700 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow 1,17 \cdot 10^4 \leq x \leq 2,05 \cdot 10^4 \Leftrightarrow$$

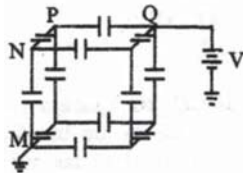
$$11,7 \text{ km} \leq x \leq 20,5 \text{ km}$$

Nesse caso, notamos que a alternativa que fica mais próxima desse intervalo é de fato a alternativa D.

**QUESTÃO 15**

Uma diferença de potencial eletrostático  $V$  é estabelecida entre os pontos  $M$  e  $Q$  da rede cúbica de capacitores idênticos mostrada na figura. A diferença de potencial entre os pontos  $N$  e  $P$  é

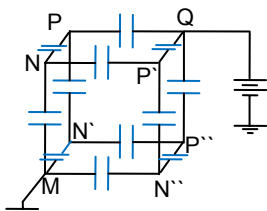
- a)  $\frac{V}{2}$
- b)  $\frac{V}{3}$
- c)  $\frac{V}{4}$
- d)  $\frac{V}{5}$
- e)  $\frac{V}{6}$



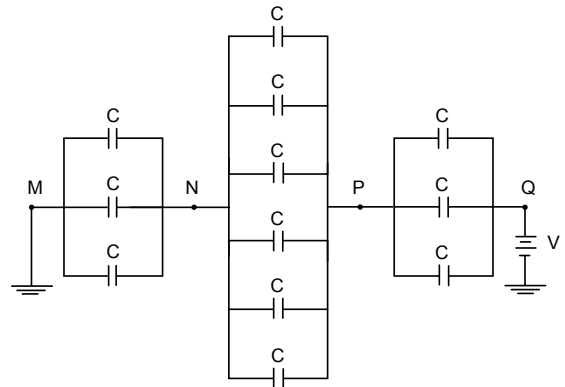
**Resolução**

**Alternativa D**

Seja  $C$  a capacitância de cada um dos doze capacitores do cubo. Nota-se que a rede de capacitores do nó  $Q$  para o nó  $M$  apresenta simetria geométrica e elétrica, pois todos os capacitores são idênticos e cada um dos "caminhos" de  $Q$  para  $M$  apresenta as mesmas características, 3 arestas e, portanto, 3 capacitores. Observe a figura a seguir:



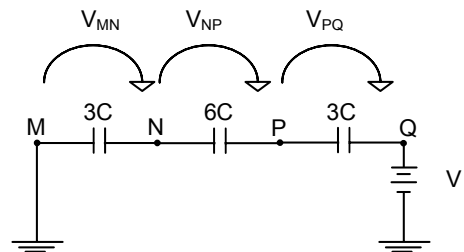
De acordo com o enunciado, o potencial em  $M$  é  $V_M = 0 \text{ V}$  (aterrado). Por simetria, observando a partir de  $M$ , os nós  $N$ ,  $N'$  e  $N''$  apresentam potenciais elétricos iguais ( $V_N$ ). Seguindo o mesmo raciocínio, os nós  $P$ ,  $P'$  e  $P''$  apresentam potenciais elétricos iguais ( $V_P$ ). Em uma rede elétrica, nós que apresentam um mesmo potencial elétrico são equivalentes a nós coincidentes. Desse modo, podemos redesenhar a rede cúbica de capacitores substituindo os nós equivalentes por um mesmo nó. Na figura a seguir o esquema elétrico apresentado é equivalente ao esquema cúbico da questão, porém está todo em um mesmo plano e, com a equivalência dos nós, ficou mais fácil o estudo das capacitâncias equivalentes, das cargas armazenadas e das diferenças de potencial (d.d.p.) entre os nós.



Para os cálculos das capacitâncias equivalentes, lembre-se:

- "n" capacitores em paralelo:  $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$
- "n" capacitores em série:  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

Logo, podemos simplificar ainda mais o circuito acima:



Podemos dizer que os capacitores acima carregam-se através de uma mesma corrente num mesmo intervalo de tempo, e por isso possuem cargas iguais:

$$q_{MN} = q_{NP} = q_{PQ} = q$$

Da definição de capacitância,  $q = C \cdot V$ , podemos escrever, de acordo com o esquema da figura acima:

$$q_{NP} = 6C \cdot V_{NP} \Rightarrow V_{NP} = \frac{q}{6C}$$

$$q_{MN} = 3C \cdot V_{MN} \Rightarrow V_{MN} = \frac{q}{3C} \Rightarrow V_{MN} = 2V_{NP}$$

$$q_{PQ} = 3C \cdot V_{PQ} \Rightarrow V_{PQ} = \frac{q}{3C} \Rightarrow V_{PQ} = 2V_{NP}$$

Pela lei das malhas, podemos escrever sobre as d.d.p. entre os nós:

$$V_{MN} + V_{NP} + V_{PQ} = V. \text{ Então:}$$

$$2V_{NP} + V_{NP} + 2V_{NP} = V$$

$$5V_{NP} = V \Rightarrow V_{NP} = \frac{V}{5}$$

**QUESTÃO 16**

Um fio condutor é derretido quando o calor gerado pela corrente que passa por ele se mantém maior que o calor perdido pela superfície do fio (desprezando a condução de calor pelos contatos). Dado que uma corrente de 1 A é a mínima necessária para derreter um fio de seção transversal circular de 1 mm de raio e 1 cm de comprimento,

determine a corrente mínima necessária para derreter um outro fio da mesma substância com seção transversal circular de 4 mm de raio e 4 cm de comprimento.

- a)  $\frac{1}{8}A$
- b)  $\frac{1}{4}A$
- c) 1 A
- d) 4 A
- e) 8 A

**Resolução**

**Alternativa E**

A figura abaixo esquematiza um condutor com as seguintes características:

S - área de seção;

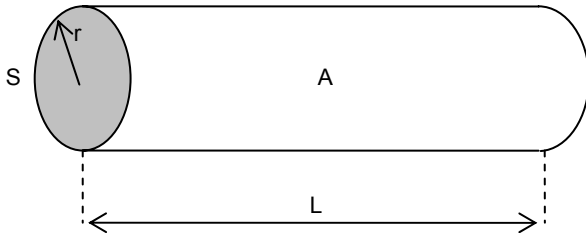
r - raio;

$A_{sup}$  - área de superfície (onde há trocas de calor);

L - comprimento;

R - resistência total;

$\rho$  - resistividade do material.



Assim, vamos encontrar a relação entre a potência elétrica dissipada Pot e a área de superfície  $A_{sup}$ :

$$A_{sup} = 2\pi \cdot r \cdot L$$

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S}$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$Pot = R \cdot i^2$$

Usando todas as relações acima, encontramos a seguinte relação:

$$\left[ \frac{Pot}{A} \right] = \frac{R \cdot i^2}{2\pi \cdot r \cdot L} = \frac{\frac{\rho \cdot L}{S} \cdot i^2}{2\pi \cdot r \cdot L} = \frac{\frac{\rho \cdot L}{\pi \cdot r^2} \cdot i^2}{2\pi \cdot r \cdot L} = \frac{\rho}{2\pi^2} \cdot \frac{i^2}{r^3}$$

Dessa forma, a relação  $\left[ \frac{Pot}{A} \right]$  deve ser a mesma em cada condutor.

Consideremos então o outro fio do enunciado, com  $r_2 = 4$  mm e com a mesma resistividade  $\rho$  do primeiro fio. Então:

$$\frac{\rho}{2\pi^2} \cdot \frac{i_1^2}{r_1^3} = \frac{\rho}{2\pi^2} \cdot \frac{i_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{i_1^2}{r_1^3} = \frac{i_2^2}{r_2^3}$$

$$\frac{1^2}{1^3} = \frac{i_2^2}{4^3} \Rightarrow \boxed{i_2 = 8A}$$

**QUESTÃO 17**

Prótons (carga e e massa  $m_p$ ), deuteron (carga e e massa  $m_d = 2m_p$ ) e partículas alfas (carga 2e e massa  $m_\alpha = 4m_p$ ) entram em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  perpendicular a suas velocidades, onde se movimentam em órbitas circulares de períodos  $T_p$ ,  $T_d$  e  $T_\alpha$ , respectivamente. Pode-se afirmar que as razões dos períodos  $T_d/T_p$  e  $T_\alpha/T_p$  são, respectivamente,

- a) 1 e 1.
- b) 1 e  $\sqrt{2}$ .
- c)  $\sqrt{2}$  e 2.
- d) 2 e  $\sqrt{2}$ .
- e) 2 e 2.

**Resolução**

**Alternativa E**

Ao entrar numa região onde atua um campo magnético de intensidade B perpendicular à sua velocidade, uma carga elétrica q fica submetida a uma força magnética que atuará como resultante de natureza centrípeta. Assim:

$$\vec{F}_m = \vec{F}_{cp} \Leftrightarrow |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}90^\circ = \frac{m \cdot v^2}{R} \Leftrightarrow |q| \cdot B \cdot R = m \cdot v \Leftrightarrow$$

$$|q| \cdot B \cdot R = m \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \right) \Leftrightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{|q| \cdot B}$$

As razões pedidas são dadas por:

$$(I) \frac{T_d}{T_p} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot m_p)}{e \cdot B}}{\frac{2 \cdot \pi \cdot m_p}{e \cdot B}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T_d}{T_p} = 2}$$

$$(II) \frac{T_\alpha}{T_p} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot m_p)}{(2 \cdot e) \cdot B}}{\frac{2 \cdot \pi \cdot m_p}{e \cdot B}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T_\alpha}{T_p} = 2}$$

**QUESTÃO 18**

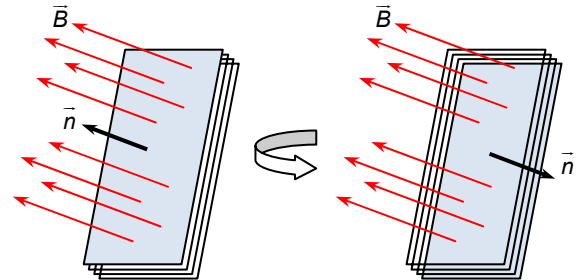
Uma bobina de 100 espiras, com seção transversal de área de 400 cm<sup>2</sup> e resistência de 20  $\Omega$ , está alinhada com seu plano perpendicular ao campo magnético da Terra, de  $7,0 \times 10^{-4}$  T na linha do Equador. Quanta carga flui pela bobina enquanto ela é virada de 180° em relação ao campo magnético?

- a)  $1,4 \times 10^{-4}$  C
- b)  $2,8 \times 10^{-4}$  C
- c)  $1,4 \times 10^{-2}$  C
- d)  $2,8 \times 10^{-2}$  C
- e) 1,4 C

**Resolução**

**Alternativa B**

O fluxo magnético através de uma superfície de área A é dado por  $\Phi_B = |\vec{B}| \cdot A \cdot \cos\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre as linhas do campo magnético  $\vec{B}$  e a normal  $\vec{n}$  à superfície.



Ao longo de meia volta, a variação do fluxo magnético é dada por:  
 $\Delta\Phi_B = |\vec{B}| \cdot A \cdot \cos0^\circ - |\vec{B}| \cdot A \cdot \cos180^\circ = |\vec{B}| \cdot A \cdot [1 - (-1)] = 2 \cdot |\vec{B}| \cdot A$

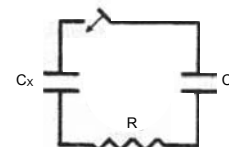
Pela Lei de Lenz, será induzida uma tensão (força eletromotriz)  $\varepsilon$ , que gera uma corrente i a cada pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ . Assim:

$$\varepsilon = N \cdot \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \Leftrightarrow R \cdot i = N \cdot \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \Leftrightarrow R \cdot \frac{Q}{\Delta t} = N \cdot \frac{2 \cdot |\vec{B}| \cdot A}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$Q = N \cdot \frac{2 \cdot |\vec{B}| \cdot A}{R} = 100 \cdot \frac{2 \cdot 7,0 \cdot 10^{-4} \cdot 400 \cdot 10^{-4}}{20} \Leftrightarrow \boxed{Q = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ C}}$$

**QUESTÃO 19**

No circuito ideal da figura, inicialmente aberto, o capacitor de capacitância  $C_x$  encontra-se carregado e armazena uma energia potencial elétrica E. O capacitor de capacitância  $C_y = 2C_x$  está inicialmente descarregado. Após fechar o circuito e este alcançar um novo equilíbrio, pode-se afirmar que a soma das energias armazenadas nos capacitores é igual a



- a) 0
- b) E/9
- c) E/3
- d) 4E/9
- e) E



**Resolução** **Alternativa C**

Energia  $E$  e carga  $Q$  armazenadas inicialmente pelo capacitor  $C_x$ :

$$E = \frac{Q^2}{2C_x}$$

Fechado o circuito, após o novo equilíbrio, as tensões  $U$  nos terminais de  $C_x$  e  $C_y$  se igualam:

$$U_x = U_y \Rightarrow \frac{Q_x}{C_x} = \frac{Q_y}{C_y} \Rightarrow \frac{Q_x}{C_x} = \frac{Q_y}{2C_x} \Rightarrow Q_y = 2Q_x$$

Pela conservação de cargas:

$$Q_x + Q_y = Q$$

Usando as duas últimas equações encontramos  $Q_x = \frac{Q}{3}$  e  $Q_y = \frac{2Q}{3}$ .

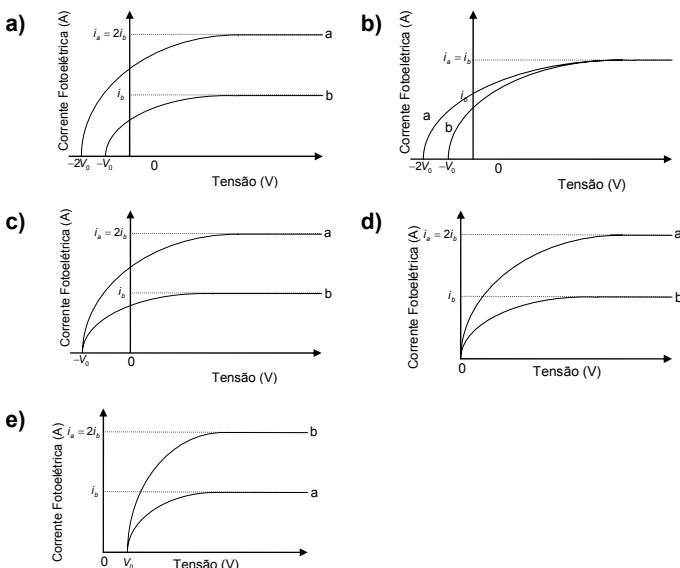
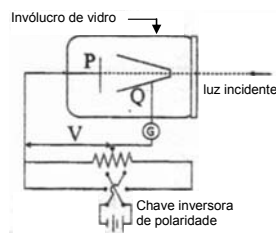
Podemos agora calcular a soma das energias armazenadas pelos capacitores neste novo equilíbrio:

$$E_x + E_y = \frac{\left(\frac{Q}{3}\right)^2}{2C_x} + \frac{\left(\frac{2Q}{3}\right)^2}{2 \cdot 2C_x} = \frac{Q^2}{2C_x} \cdot \frac{1}{3} = E \cdot \frac{1}{3}$$

$$E_x + E_y = \frac{E}{3}$$

**QUESTÃO 20**

O aparato para estudar o efeito fotoelétrico mostrado na figura consiste de um invólucro de vidro que encerra o aparelho em um ambiente no qual se faz vácuo. Através de uma janela de quartzo, luz monocromática incide sobre a placa de metal  $P$  e libera elétrons. Os elétrons são então detectados sob a forma de uma corrente, devido à diferença de potencial  $V$  estabelecida entre  $P$  e  $Q$ . Considerando duas situações distintas  $a$  e  $b$ , nas quais a intensidade da luz incidente em  $a$  é o dobro do caso  $b$ , assinale qual dos gráficos abaixo representa corretamente a corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial.



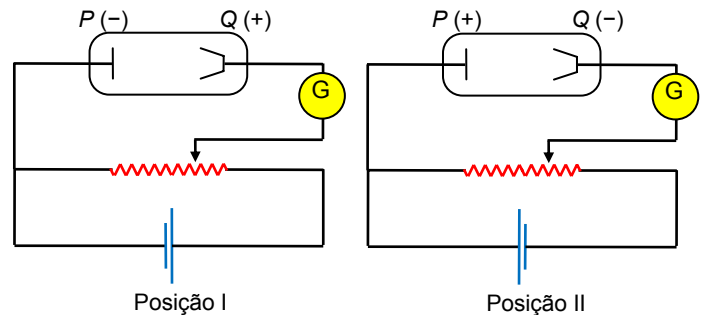
**Resolução** **Alternativa C**

O efeito fotoelétrico é descrito pela relação entre as energias envolvidas no movimento do elétron:

$$h \cdot f = W + E_c$$

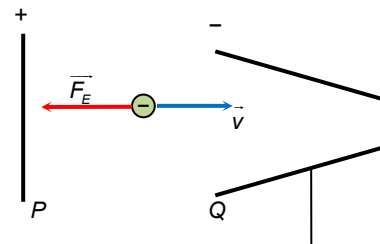
onde  $h \cdot f$  é a energia do fóton que é absorvido pelo elétron do metal,  $W$  é o trabalho necessário para arrancar o elétron do metal e  $E_c$  é a energia cinética do elétron logo que sai do metal, no ponto  $P$ .

Dessa forma, a máxima energia cinética do elétron é  $E_c = h \cdot f - W_0$ , onde  $W_0$  é a função trabalho do metal (menor energia necessária para arrancar o elétron do metal). Como a luz é monocromática, esse valor é fixo. Observe que para haver o efeito fotoelétrico é necessário que  $h \cdot f > W_0$ .



A chave inversora pode ficar tanto na posição I quanto na posição II. Na posição I,  $P$  tem potencial menor do que  $Q$ , de modo que os elétrons naturalmente já são atraídos para a placa  $Q$ . Nesse caso, definimos a diferença de potencial  $V = V_Q - V_P$ .

Na posição II, para atravessar a diferença de potencial  $V$  (que continua definida como  $V = V_Q - V_P$ ), o elétron precisa ter energia cinética  $E_c \geq |V| \cdot e$ , onde  $e$  é a carga elementar, para sair de  $P$  e chegar até  $Q$ . Nesse caso, a energia cinética é suficiente para vencer o trabalho resistente da força elétrica. Observe o esquema, no qual a força elétrica desfavorece o movimento dos elétrons, sendo  $V$  chamado "potencial retardador".



Assim:

$$E_c \geq (V_P - V_Q) \cdot e \Leftrightarrow E_c \geq (-V) \cdot e \Leftrightarrow h \cdot f - W_0 \geq -V \cdot e \Leftrightarrow V \geq -\frac{(h \cdot f - W_0)}{e}$$

Logo,  $V$  tem um valor mínimo negativo, dado por:

$$V_0 = \frac{-(h \cdot f - W_0)}{e}$$

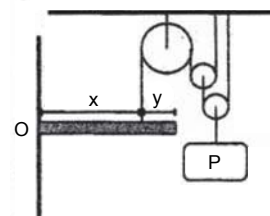
para o qual há a detecção do efeito fotoelétrico. Este valor é fixo para as duas situações ( $a$  e  $b$ ), pois a luz é monocromática ( $h \cdot f$  é constante).

Quanto à intensidade luminosa (relacionada à quantidade de fótons incidentes), vale lembrar que cada elétron absorve um fóton de cada vez. Por isso, a corrente elétrica da situação  $a$  é o dobro da corrente da situação  $b$ .

O gráfico que representa a situação descrita está na alternativa C.

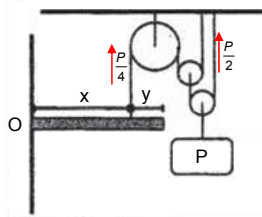
**QUESTÃO 21**

Uma barra homogênea, articulada no pino  $O$ , é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância  $x$  de  $O$ . Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso  $P$ . Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino  $O$  sobre a barra.

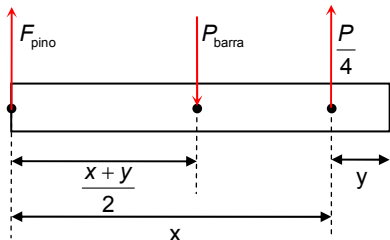


**Resolução**

Numa associação de polias móveis, as forças de tração nos fios que percorrem a polia é igual à metade da força que atua no centro da mesma, como representado no esquema a seguir. Para duas polias móveis, como a do problema, repete-se este padrão obtendo uma força sobre a barra horizontal igual à um quarto do peso  $P$  do bloco.



Olhando a figura abaixo, vemos os pontos de ação das diferentes forças sobre a barra.



Agora, estando a barra em equilíbrio estático, basta fazermos a soma dos momentos das forças em relação ao centro da barra igual a zero:

$$F_y \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{P}{4} \cdot \left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - y\right) \Leftrightarrow 2 \cdot F_y \cdot (x+y) = P \cdot \left(\frac{x-y}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$F_y = \left(\frac{x-y}{x+y}\right) \cdot \frac{P}{4}$$

**QUESTÃO 22**

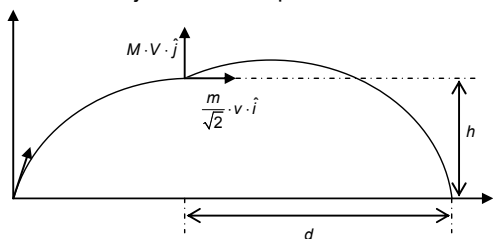
Um objeto de massa  $m$  é projetado no ar a  $45^\circ$  do chão horizontal com uma velocidade  $v$ . No ápice da sua trajetória, esse objeto é interceptado por um segundo objeto, de massa  $M$  e velocidade  $V$ , que havia sido projetado verticalmente no chão. Considerando que os dois objetos "se colam" e desprezando qualquer tipo de resistência aos movimentos, determine a distância  $d$  do ponto de queda dos objetos em relação ao ponto de lançamento do segundo objeto.

**Resolução**

A velocidade do corpo de massa  $m$  imediatamente antes da colisão é dada por sua componente horizontal:

$$v' = v \cdot \cos 45^\circ = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para calcular a velocidade vertical e horizontal dos corpos logo após a colisão, vamos aplicar a conservação da quantidade de movimento na vertical e horizontal durante a colisão. O esquema a seguir representa de forma qualitativa a trajetória dos corpos:

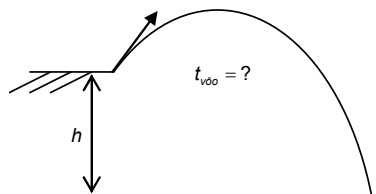


$$Q_x = (m+M)V_x = mv \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow V_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{(m+M)} v \quad (\text{eq. 1})$$

$$Q_y = (m+M)V_y = MV \Leftrightarrow V_y = \frac{M}{(m+M)} V \quad (\text{eq. 2})$$

Usando a equação de Torricelli, calculamos a altura máxima do objeto de massa  $m$ , obtendo:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh \Rightarrow \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{4g} \quad (\text{eq. 3})$$



Calculando agora, a partir do ponto de colisão entre os dois objetos (veja esquema acima), como se fosse outro lançamento para um

objeto de massa  $m+M$  e velocidades vertical e horizontal dadas pelas equações 1 e 2, teremos para o tempo de vôo:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow 0 = h + \frac{M}{m+M}Vt - \frac{g}{2}t^2 \Leftrightarrow \frac{g}{2}t^2 - \frac{M}{m+M}Vt - h = 0$$

Obtemos  $\Delta = \left(\frac{M}{m+M}V\right)^2 + 2gh$  e  $t = \left(\frac{M}{m+M}V + \sqrt{\Delta}\right)/g$ , pois há duas raízes para esta equação, porém a menor delas é negativa. Substituindo o tempo na equação  $d = V_x \cdot t$  obtemos

$$d = \frac{mv}{\sqrt{2}(m+M)g} \left[ \left(\frac{M}{m+M}\right)V + \sqrt{\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2 + \frac{2gv^2}{4g}} \right] \Rightarrow$$

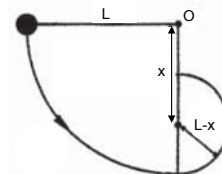
$$d = \frac{mv}{\sqrt{2}(m+M)g} \left[ \left(\frac{M}{m+M}\right)V + \sqrt{\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}} \right] \Rightarrow$$

Ou, colocando  $\left(\frac{MV}{m+M}\right)$  em evidência:

$$d = \frac{mMvV}{\sqrt{2}(m+M)^2g} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2(m+M)^2}{2M^2V^2}} \right]$$

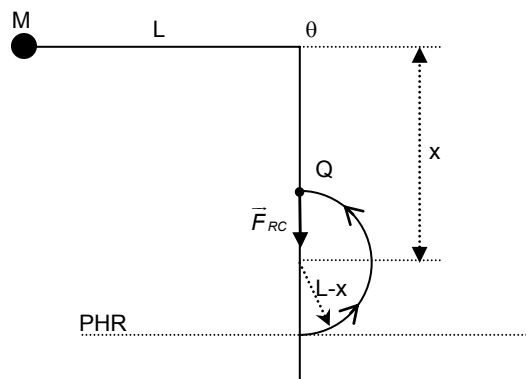
**QUESTÃO 23**

Um pêndulo, composto de uma massa  $M$  fixada na extremidade de um fio inextensível de comprimento  $L$ , é solto de uma posição horizontal. Em dado momento do movimento circular, o fio é interceptado por uma barra metálica de diâmetro desprezível, que se encontra a uma distância  $x$  na vertical abaixo do ponto  $O$ . Em consequência, a massa  $M$  passa a se movimentar num círculo de raio  $L-x$ , conforme mostra a figura. Determine a faixa de valores de  $x$  para os quais a massa do pêndulo alcance o ponto mais alto deste novo círculo.



**Resolução**

Temos abaixo a figura representativa do problema onde PHR é o plano horizontal de referência para a energia potencial gravitacional.



No ponto Q, temos:

$$|\vec{F}_{RC}| = |\vec{P}| + |\vec{T}|$$

Onde  $\vec{F}_{RC}$  é a resultante centrípeta no ponto Q,  $\vec{P}$  é a força peso, que age sobre a massa  $M$  e  $\vec{T}$  é a tração no fio no instante em que a massa atinge o ponto Q. Assim:

$$\frac{M \cdot v_Q^2}{(L-x)} = M \cdot g + |\vec{T}| \quad (1)$$

Pela conservação da energia mecânica temos:

$$E_m^{inicial} = E_m^Q$$

$$M \cdot g \cdot L = M \cdot g \cdot 2 \cdot (L-x) + \frac{M \cdot v_Q^2}{2} \quad (2)$$

Na situação limite, temos que a tração será nula no ponto Q, assim, da equação (1), a velocidade mínima será:

$$\frac{M \cdot v_{Qmin}^2}{(L-x)} = M \cdot g$$

$$v_{Qmin}^2 = (L-x) \cdot g \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2):

$$M \cdot g \cdot L = M \cdot g \cdot 2 \cdot (L - x_{min}) + \frac{M \cdot g \cdot (L - x_{min})}{2} \Rightarrow$$

$$L = 2L - 2x_{min} + \frac{L}{2} - \frac{x_{min}}{2} \Rightarrow \frac{5x_{min}}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$x_{min} = \frac{3L}{5}$$

Para qualquer  $x$  tal que  $x \geq \frac{3L}{5}$ , a massa  $M$  completa o *loop*. Há o limite superior, imposto pelo problema, para que ocorra o *loop*:

$$x < L$$

Logo a massa  $M$  completará o *loop* para:

$$\frac{3L}{5} \leq x < L$$

**QUESTÃO 24**

Um bloco, com distribuição homogênea de massa, tem o formato de um prisma regular cuja seção transversal é um triângulo equilátero. Tendo  $0,5 \text{ g/cm}^3$  de densidade, tal bloco poderá flutuar na água em qualquer das posições mostradas na figura. Qual das duas posições será a mais estável? Justifique sua resposta. Lembrar que o baricentro do triângulo encontra-se a  $2/3$  da distância entre um vértice e seu lado oposto.



**Resolução**

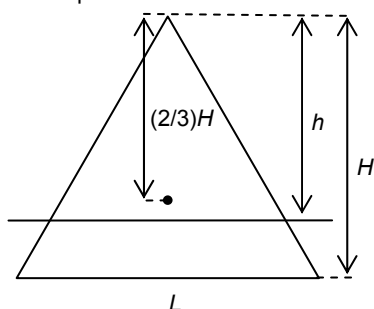
Para determinarmos o tipo de estabilidade de uma dada situação de equilíbrio proposta (equilíbrio estável, instável ou indiferente) devemos provocar uma pequena perturbação no sistema proposto e verificar se há uma tendência de restituição para a posição inicial (equilíbrio estável), se há uma tendência de o sistema se afastar da posição de equilíbrio inicial (equilíbrio instável) ou se é indiferente à perturbação (equilíbrio indiferente).

Observando uma seção transversal do prisma (triângulo equilátero), podemos utilizar o seguinte procedimento de análise de estabilidade: giraremos o prisma triangular em torno de um eixo fixo que passa pelo centro geométrico  $G$  (baricentro) e analisaremos se haverá um aumento ou decréscimo do volume submerso.

1) Caso o volume submerso aumente, haverá um empuxo maior tendendo a elevar o bloco. Isso significa que há necessidade de fornecer energia ao sistema para que ele saia do equilíbrio, ou seja, ele se encontra em equilíbrio estável.

2) Caso o volume submerso diminua, o módulo da força peso será maior que o do empuxo, e o bloco tenderá a descer, ou seja, ele diminuirá sua energia potencial, indicando que ele se encontra em equilíbrio instável.

Antes de prosseguir, vamos calcular uma relação entre o baricentro e a altura da parte submersa.



Como a densidade do prisma é igual à metade da densidade do fluido (água), conclui-se que metade de seu volume deve estar submerso. Logo, pela figura, podemos demonstrar que  $h > (2/3)H$ ,

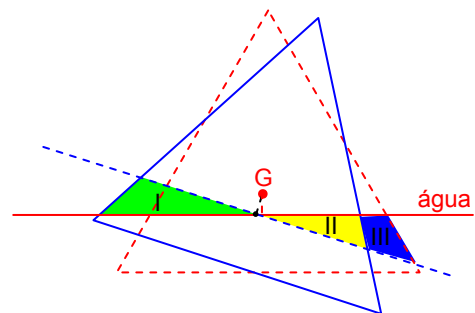
pois a área do triângulo emerso e do trapézio submerso são iguais, ou

$$\begin{cases} A_H = 2 \cdot A_h; \\ A_H : \text{área do triângulo maior} \\ A_h : \text{área do triângulo menor} \end{cases}$$

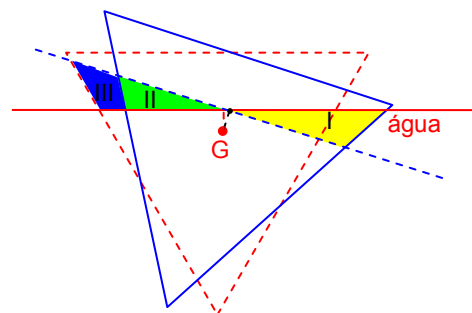
$$\frac{A_H}{A_h} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{2A_h}{A_h} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{H\sqrt{2}}{2}, \text{ logo } h > (2/3)H.$$

Como consequência, o baricentro ficará fora da água na situação do item (a) e dentro da água na situação do item (b).

Analisando as figuras a seguir, podemos ver que na situação do item (a), ao girarmos o prisma em torno do baricentro, o volume submerso irá diminuir (pois o volume que sairá da água, região I, é maior que o que submergirá, região II), assim será preciso que o bloco desça para restabelecer o empuxo e o volume submerso (a diferença entre as áreas é a região III), indicando que nesta situação o equilíbrio é instável.



Para o item (b), temos um problema parecido, pois o volume submerso é metade do volume do prisma. Considerando as mesmas cores como no item (a), observamos que o volume submerso aumentará, fazendo com que o empuxo aumente, isto é, seria necessária energia para girar o bloco, pois ele tenderá a aumentar a energia potencial o que indica que ele se encontra em equilíbrio estável.



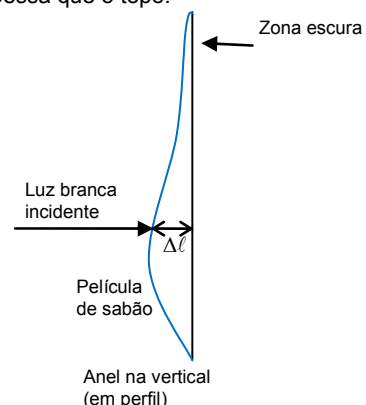
Logo, a posição (b) é a mais estável.

**QUESTÃO 25**

Um filme fino de sabão é sustentado verticalmente no ar por uma argola. A parte superior do filme aparece escura quando é observada por meio de luz branca refletida. Abaixo da parte escura aparecem bandas coloridas. A primeira banda tem cor vermelha ou azul? Justifique sua resposta.

**Resolução**

Podemos fazer um desenho do filme fino em questão (pendurado verticalmente). Observe que, devido à gravidade, a parte de baixo do filme é mais espessa que o topo.



A luz branca incidente irá refratar para dentro do filme, refletir na parede interna do filme (onde não ocorre inversão de fase) e refratar para fora novamente. É justamente ao "sair" do filme que esta se encontra com os raios de luz refletidos diretamente na superfície externa do filme, e então ocorre interferência.

Para que uma certa cor seja vista, não deve haver interferência destrutiva entre a luz desta cor que passou por dentro do filme e retornou e a luz desta mesma cor refletida na superfície da película (cuja reflexão ocorre com inversão de fase).

Como ocorre inversão de fase na luz refletida na superfície externa da película, basta que a distância  $2 \cdot \Delta l$  percorrida dentro do filme seja igual a  $n \frac{\lambda}{2}; n = 1, 3, 5, \dots$  para que haja concordância de fase entre a luz refletida e a luz refratada.

A zona escura ocorre porque a espessura ( $\Delta l$ ) do filme na região superior é tal que  $\Delta l \ll \lambda_{cor}$  para todas as cores, de modo que a diferença de caminhos  $2 \cdot \Delta l$  é desprezível, fazendo com que todo o espectro de cores sofra interferência destrutiva.

Conforme saímos da zona escura e vamos descendo, o  $\Delta l$  vai aumentando até que ocorra a igualdade  $2 \cdot \Delta l = \frac{\lambda_{corx}}{2}$ , quando a cor  $x$  será vista. Note que neste caso estamos assumindo  $n = 1$ , uma vez que a espessura do filme é pequena, aumentando gradativamente a partir de  $\Delta l \ll \lambda_{cor}$  para todas as cores. Como  $\lambda_{azul} < \lambda_{vermelho}$ , a primeira cor a ser vista, dentre as duas citadas, de cima para baixo será o azul.

**QUESTÃO 26**

O tubo mais curto de um órgão típico de tubos tem um comprimento de aproximadamente 7 cm. Qual é o harmônico mais alto na faixa audível, considerada como estando entre 20 Hz e 20.000 Hz, de um tubo deste comprimento aberto nas duas extremidades?

**Resolução**

Em tubos com ambas as extremidades abertas, os possíveis harmônicos são relacionados ao comprimento do tubo pela fórmula

$$L = \frac{n \cdot \lambda}{2}, \text{ com } n \text{ inteiro positivo.}$$

Substituindo  $v = \lambda \cdot f$  na fórmula acima, vem que:

$$L = \frac{n \cdot v}{2 \cdot f} \Leftrightarrow f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot L}$$

Como queremos a maior frequência possível, desde que esta seja menor que 20.000 Hz, então:

$$f = \frac{n \cdot v_{som}}{2 \cdot L} \leq 20 \cdot 10^3 \Leftrightarrow \frac{n \cdot 340}{2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})} \leq 20 \cdot 10^3 \Rightarrow n \leq 8,24$$

Desta forma, o maior valor de  $n$  inteiro positivo é  $n = 8$  e o harmônico em questão (oitavo harmônico) possui frequência aproximadamente igual a 19.428 Hz.

**QUESTÃO 27**

Uma bolha de gás metano com volume de  $10 \text{ cm}^3$  é formada a 30 m de profundidade num lago. Suponha que o metano comporta-se como um gás ideal de calor específico molar  $C_V = 3R$  e considere a pressão atmosférica igual a  $10^5 \text{ N/m}^2$ . Supondo que a bolha não troque calor com a água ao seu redor, determine seu volume quando ela atinge a superfície.

**Resolução**

Pela relação de Mayer, temos que:

$$C_p - C_V = R \Leftrightarrow C_p - 3R = R \Leftrightarrow C_p = 4R$$

Assim, o expoente de Poisson  $\gamma$  será dado por:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{4R}{3R} = \frac{4}{3}$$

Por outro lado, a pressão no fundo do lago ( $p_f$ ) é dada pelo princípio de Stevin:

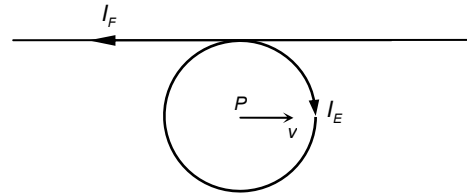
$$p_f = p_s + \rho \cdot g \cdot h = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 30 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Como o gás sofre uma transformação adiabática (sem troca de calor com o meio) durante a subida da bolha, temos ainda:

$$p_i \cdot V_i^\gamma = p_s \cdot V_s^\gamma \Leftrightarrow 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 = 10^5 \cdot V_s^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow V_s = 10^4 \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow V_s = 20\sqrt{2} \text{ cm}^3 \approx 28,3 \text{ cm}^3$$

**QUESTÃO 28**

Um corrente  $I_E$  percorre uma espira circular de raio  $R$  enquanto uma corrente  $I_F$  percorre um fio muito longo, que tangencia a espira, estando ambos no mesmo plano, como mostra a figura. Determine a razão entre as correntes  $I_E/I_F$  para que uma carga  $Q$  com velocidade  $v$  paralela ao fio no momento que passa pelo centro  $P$  da espira não sofra aceleração nesse instante.

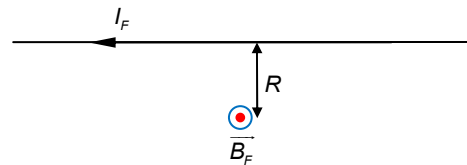


**Resolução**

(I) O campo magnético criado pelo fio muito longo no ponto  $P$  é dado pela lei de Biot-Savart:

$$|\vec{B}_F| = \frac{\mu \cdot I_F}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

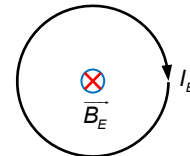
A direção é perpendicular ao plano da página e o sentido é para fora dela.



(II) O campo magnético criado no centro da espira é dado por:

$$|\vec{B}_E| = \frac{\mu \cdot I_E}{2 \cdot R}$$

A direção é perpendicular ao plano da página e o sentido é para dentro dela.

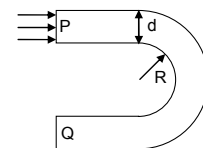


Desprezando a atuação da força peso, para que uma partícula com carga não seja acelerada ao passar pelo centro da espira, deve ser nulo o campo magnético nesse ponto, ou seja, os campos criados pelo fio e pela espira devem se cancelar. Logo:

$$|\vec{B}_F| = |\vec{B}_E| \Leftrightarrow \frac{\mu \cdot I_F}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{\mu \cdot I_E}{2 \cdot R} \Leftrightarrow \frac{I_E}{I_F} = \frac{1}{\pi}$$

**QUESTÃO 29**

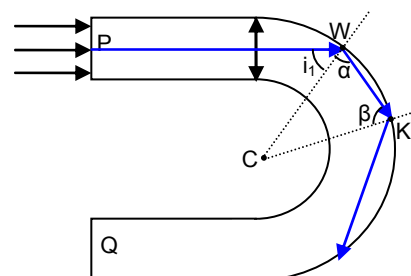
Um tarugo de vidro de índice de refração  $n = 3/2$  e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana  $P$ . Determine o valor mínimo da razão  $R/d$  para o qual toda luz que penetra pela superfície  $P$  emerge do vidro pela superfície  $Q$ .



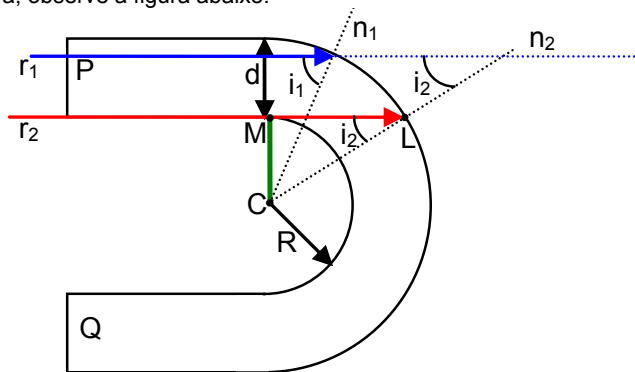
**Resolução**

Vamos antes mostrar que os ângulos das sucessivas reflexões dos raios incidentes na superfície de separação vidro/ar são iguais.

Na figura abaixo temos que  $i_1 = \alpha$  (ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). Temos ainda que o triângulo CWK é isósceles e assim  $\beta = \alpha$ .



Agora, observe a figura abaixo:



Pode-se ver que  $i_1$  e  $i_2$  são ângulos de incidência dos raios  $r_1$  e  $r_2$  do feixe com a superfície de separação externa do vidro com o ar, respectivamente.

Pela figura temos que  $i_1 > i_2$ . Para haver reflexão total temos que:

$$\text{sen } i_1 \geq \text{sen } L = \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{vidro}}} \quad (1)$$

$$\text{sen } i_2 \geq \text{sen } L = \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{vidro}}} \quad (2)$$

Como  $i_1 > i_2$  basta que a condição (2) seja satisfeita, logo:

$$\text{sen } i_2 \geq \text{sen } L = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

No triângulo CLM temos:

$$\text{sen } i_2 = \frac{R}{R+d} \quad (4)$$

Juntando as equações (3) e (4) temos:

$$\frac{R}{R+d} \geq \frac{2}{3}$$

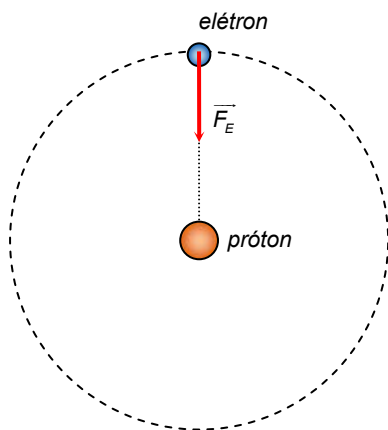
Logo o valor mínimo da razão entre R e d é  $\frac{R}{d} = 2$ .

### QUESTÃO 30

Obtenha uma expressão para as energias das órbitas do modelo de Bohr do átomo de Hidrogênio usando a condição de que o comprimento da circunferência de uma órbita do elétron ao redor do próton seja igual um número inteiro de comprimentos de onda de *de Broglie* do elétron.

### Resolução

No modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio, o elétron descreve uma trajetória circular em torno do próton, sendo que a atração elétrica entre essas partículas (de cargas opostas) atuará como força resultante de natureza centrípeta.



Sendo  $m$  a massa do elétron, e a carga elétrica fundamental do próton (de modo que a carga do elétron será  $-e$ ) e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo, temos:

$$\vec{F}_E = \vec{F}_{cp} \Leftrightarrow \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{|e| \cdot |-e|}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot m \cdot \epsilon_0 \cdot r}}$$

Assim, a energia cinética  $E_C$  do elétron será dada por:

$$E_C = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot m \cdot \epsilon_0 \cdot r} \right) = \frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Por outro lado, a energia potencial elétrica  $E_P$  do sistema vale:

$$E_P = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Assim, a energia total  $E$  em função do raio  $r$  da trajetória é:

$$E = E_C + E_P = \frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

De acordo com a hipótese do comprimento da circunferência ser um número inteiro  $n$  de comprimentos de onda  $\lambda$  do elétron:

$$2 \cdot \pi \cdot r = n \cdot \lambda \Leftrightarrow r = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}$$

Além disso, pela hipótese de *de Broglie*, sendo  $h$  a constante de Planck e  $p$  o momento linear do elétron, temos:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot m \cdot \epsilon_0 \cdot r}}} = h \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}{m \cdot e^2}}$$

Assim, o raio da  $n$ -ésima órbita é dado por:

$$r = \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot h \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}{m \cdot e^2}} \Rightarrow r^2 = \frac{n^2 \cdot h^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}{m \cdot e^2} \Leftrightarrow r = \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m \cdot e^2}$$

Portanto, a energia total  $E_n$  da  $n$ -ésima órbita vale:

$$E_n = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \left( \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m \cdot e^2} \right)} \Leftrightarrow E_n = -\left( \frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

## Equipe desta resolução

### Física

Cleuton Luís Ferreira da Fonseca  
Danilo José de Lima  
Vinício Merçon Poltronieri

### Revisão

Eliel Barbosa da Silva  
Fabiano Gonçalves Lopes  
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani  
Vagner Figueira de Faria

## Digitação, Diagramação e Publicação

Carolina Marcondes Garcia Ferreira  
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha