ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve

ITA 2010
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

VEJA AS NOTAÇÕES ADOTADAS AO FINAL DA PROVA.

QUESTÃO 01

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.
II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
III. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

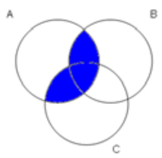
Destas, é (são) falsa(s)
a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e III. e) nenhuma.

Resolução — Alternativa E

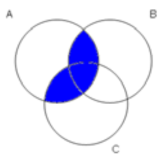
Analisando cada uma das afirmações:
I) **Verdadeira**. De fato, negar a afirmação $x \in (A \cap B)$ significa afirmar que $x \notin (A \cap B)$, o que ocorre se e somente se $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II) **Verdadeira**. De fato, construindo os diagramas de Venn correspondentes a cada um dos conjuntos temos:

$A \cap (B \cup C)$:



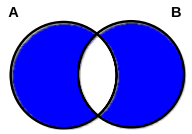
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$:



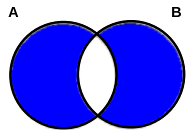
Como os diagramas são iguais, segue que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III) **Verdadeira**. Procedendo da mesma maneira que na afirmação anterior, os diagramas são:

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:



$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$:



Novamente, os diagramas são iguais, de modo que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Assim, todas as afirmações são verdadeiras.

QUESTÃO 02

Considere conjuntos $A, B \subset IR$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

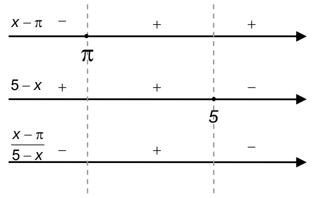
a) $C =]\sqrt{\pi}, 5[$. b) $C = [2, \pi]$. c) $C = [2, 5[$.
d) $C = [\pi, 4]$. e) C não é intervalo.

Resolução — Alternativa C

Admitindo-se que os domínios das funções reais do enunciado são os maiores possíveis, temos:
Como $C \subset (A \cup B)$, temos que $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Assim, para determinarmos C basta determinarmos os domínios de $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$, respectivamente.

A função $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ só está definida se $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$. Assim, $A \cap C = [2; 4]$.

Considere a razão $\frac{x-\pi}{5-x}$. Estudando o sinal dessa função, temos:



A função $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$ só está definida se $\frac{x-\pi}{5-x} \geq 0$, ou seja, quando x está no intervalo $[\pi; 5[$. Assim, $B \cap C = [\pi; 5[$. Desse modo, temos então $C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [2; 4] \cup [\pi; 5[\Rightarrow \boxed{C = [2; 5[}$

Apenas como verificação, note que a função $\ln(x - \sqrt{\pi})$ só está definida se $x - \sqrt{\pi} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{\pi}$. Assim, $A \cup B = [\sqrt{\pi}; +\infty[$. Observe que o intervalo $C = [2; 5[$ está contido no intervalo $[\sqrt{\pi}; +\infty[$, de modo que o exercício não apresenta inconsistência.

QUESTÃO 03

Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2} + i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que
a) $i(z - \bar{z}) < 0$. b) $i(z - \bar{z}) > 0$. c) $|z| \in [5, 6]$.
d) $|z| \in [6, 7]$. e) $\left|z + \frac{1}{z}\right| > 8$.

Resolução — Alternativa E

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade, temos:

$$-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12} = -\left[\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}+1}{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)\right]^{12} =$$

$$= -[1 - i]^{12} = -(-2i)^6 = 64.$$

Assim, a equação fica $z - \bar{z} + |z|^2 = 64$.
Chamando $z = a + bi$, temos:

$$z - \bar{z} + |z|^2 = 64 \Leftrightarrow a + bi - (a - bi) + a^2 + b^2 = 64 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2bi = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 64 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0 \text{ e } a = \pm 8.$$

Logo, $z = \pm 8$. Assim, $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|8 + \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{65}{8}\right| = 8{,}125 > 8$.

QUESTÃO 04

Os argumentos das soluções da equação em z

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0,$$

pertencem a

a) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. b) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$. c) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.
d) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$. e) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

Resolução — Alternativa C

Fazendo $z = x + i.y$, com x e y reais, temos:

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i \cdot (x + i \cdot y) + 3 \cdot (x - i \cdot y) + (x + i \cdot y + x - i \cdot y)^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot i - y + 3x - 3y \cdot i + (2x)^2 - i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x^2 + 3x - y) + i \cdot (x - 3y - 1) = 0$$

Como o número complexo do lado esquerdo deve ser nulo, temos então que sua parte real e sua parte imaginária são nulas. Assim:

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x^2 + 3x - y = 0 \end{cases}$$

Fazendo $y=4x^2+3x$ e substituindo na primeira equação do sistema, temos:

$$x-3\cdot(4x^2+3x)-1=0\Rightarrow 12x^2+8x+1=0$$

Assim, temos $x=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{24}=\frac{-8\pm4}{24}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{6}$.

1) Se $x=-\frac{1}{2}$, temos $y=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$.

Assim, a primeira solução é $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, cujo argumento principal é igual a $\frac{5\pi}{4}$. Em particular observe que esse complexo pertence ao terceiro quadrante.

2) Se $x=-\frac{1}{6}$, temos $y=4.\left(-\frac{1}{6}\right)^2+3.\left(-\frac{1}{6}\right)\Rightarrow y=-\frac{7}{18}$.

Assim, a segunda solução é $z=-\frac{1}{6}-\frac{7}{18}\cdot i=\frac{\sqrt{58}}{18}cis\,\theta_2$. Observe que esse ponto também pertence ao terceiro quadrante, pois $\text{sen}\,\theta_2=\frac{-7/18}{\sqrt{58}/18}<0$ e $\cos\theta_2=\frac{-1/6}{\sqrt{58}/18}<0$.

Além disso, a tangente do ângulo θ_2 é maior que a do ângulo $\frac{5\pi}{4}$.

Isso fica evidente pois: $\text{tg}\,\theta_2=\frac{-7/18}{-1/6}=\frac{7}{3}>1=tg\frac{5\pi}{4}$

Assim, os argumentos das duas soluções da equação pertencem ao intervalo $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$.

QUESTÃO 05

Considere a progressão aritmética $(a_1,a_2,...,a_{50})$ de razão d. Se $\sum_{n=1}^{10}a_n=10+25d$ e $\sum_{n=1}^{50}a_n=4550$, então $d-a_1$ é igual a

a) 3. b) 6. c) 9. d) 11. e) 14.

Resolução **Alternativa D**

A soma dos k primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{n=1}^{k}a_n=\frac{(a_1+a_k)\cdot k}{2}$$

Para $k=10$, temos:

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}\Leftrightarrow 10+25\cdot d=5\cdot(a_1+(a_1+9\cdot d))\Leftrightarrow a_1+2\cdot d=1$$

Para $k=50$, temos:

$$\sum_{n=1}^{50}a_n=\frac{(a_1+a_{50})\cdot 50}{2}\Leftrightarrow 4550=25\cdot(a_1+(a_1+49\cdot d))\Leftrightarrow$$

$$2\cdot a_1+49\cdot d=182$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}a_1+2\cdot d=1\\2\cdot a_1+49\cdot d=182\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=-7\\d=4\end{cases}$$

Assim: $d-a_1=4-(-7)\Leftrightarrow\boxed{d-a_1=11}$

QUESTÃO 06

Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f\cdot g$ é ímpar,

II. $f\circ g$ é par,

III. $g\circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeiras

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e II. e) todas.

Resolução **Alternativa D**

Como *f* é par, temos $f(-x)=f(x)$, para $\forall x\in\mathbb{R}$.
Como *g* é ímpar, temos $g(-x)=-g(x)$, para $\forall x\in\mathbb{R}$.
Assim, julgando cada afirmação:

(I) **Verdadeira.** Para $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-(f\cdot g)(x)$$

(II) **Verdadeira.** Para $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=f\circ g(x)$$

(III) **Falsa.** Tomemos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$, de modo que *f* é par, e também $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x$, de modo que *g* é ímpar.
Temos $g\circ f(x)=g(x^2)=x^2$, que é uma função par, mas não ímpar.

Por exemplo: $\begin{cases}g\circ f(-1)=(-1)^2=1\\-g\circ f(1)=-1^2=-1\end{cases}\Rightarrow g\circ f(-1)\neq -g\circ f(1)$

QUESTÃO 07

A equação em x

$$arctg(e^x+2)-arc\cot g\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)=\frac{\pi}{4},x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.
b) admite uma única solução, e esta é positiva.
c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right[$.
d) admite apenas soluções negativas.
e) não admite solução.

Resolução **Alternativa B**

Seja $\begin{cases}\alpha=\text{arctg}\left(e^x+2\right)\Rightarrow\text{tg}(\alpha)=e^x+2\\ \beta=\text{arc cotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)\Rightarrow\text{tg}(\beta)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\end{cases}$

Reescrevendo a equação inicial utilizando as substituições acima, temos: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

Aplicando tangente em ambos os lados:

$$\text{tg}(\alpha-\beta)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\frac{\text{tg}(\alpha)-\text{tg}(\beta)}{1+\text{tg}(\alpha)\cdot\text{tg}(\beta)}=1 \qquad \textbf{(I)}$$

Substituindo os valores de $\text{tg}(\alpha)$ e $\text{tg}(\beta)$ em **(I)**:

$$\frac{\left(e^x+2\right)-\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)}{1+(e^x+2)\cdot\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)}=1\Rightarrow e^{3x}+2\cdot e^{2x}-2\cdot e^x-3=0 \qquad \textbf{(II)}$$

Fazendo a substituição de variável $y=e^x$ e substituindo em **(II)**:
$y^3+2\cdot y^2-2\cdot y-3=0$

Por inspeção $y=-1$ é uma raiz da equação acima, aplicando Briot-Ruffini:

-1	1	2	-2	-3
	1	1	-3	0

A equação resultante é: $y^2+y-3=0$

Resolvendo por Bhaskara: $y=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ ou $y=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

Desta forma, as soluções da equação polinomial em y são

$$-1,\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$$

No entanto, como $y=e^x$, temos que $y>0$, e, portanto, a única solução para o problema do enunciado é:

$$y=e^x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow\boxed{x=\ln\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)>0}, \text{ pois } \frac{-1+\sqrt{13}}{2}>1.$$

Como só existe uma solução e ela é positiva, a alternativa correta é a **B**.

QUESTÃO 08

Sabe-se que o polinômio $p(x)=x^5-ax^3+ax^2-1$, $a\in IR$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:
I. Quatro raízes são imaginárias puras
II. Uma das raízes tem multiplicidade dois
III. Apenas uma das raízes é real.
Destas, é (são) verdadeira (s) apenas

a) I b) II c) III d) I e III e) II e III

Resolução **Alternativa C**

Do enunciado temos que $-i$ é raiz do polinômio p(x). Como todos os seus coeficientes de p(x) são reais, temos pelo teorema das raízes complexas que i também é uma raiz do polinômio. Assim:

$$p(i)=0\Leftrightarrow i^5-a\cdot i^3+a\cdot i^2-1=0\Leftrightarrow -(a+1)+(a+1)\cdot i=0\Leftrightarrow a=-1$$

Desse modo, temos $p(x)=x^5+x^3-x^2-1$. Fatorando p(x):

$$p(x)=x^5+x^3-x^2-1=x^3\cdot(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)\Rightarrow p(x)=(x^2+1).(x^3-1)$$

Observe que p(x) = 0 $p(x)=0\Leftrightarrow x^2+1=0$ ou $x^3-1=0$.

As raízes de $x^2+1=0$ são justamente i e $-i$, que já foram determinadas. Para resolver a equação $x^3-1=0$, podemos utilizar a fatoração $a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$ para a = x e b = 1:

$$x^3-1=0\Leftrightarrow(x-1).(x^2+x+1)=0$$

Assim, $x-1=0$ ou $x^2+x+1=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Analisando agora cada uma das afirmações temos:
I) Falsa. Apenas i e $-i$ são imaginárias puras.
II) Falsa. Todas as raízes têm multiplicidade 1.
III) Verdadeira. Apenas x = 1 é uma raiz real.

QUESTÃO 09

Um polinômio real $p(x)=\sum_{n=0}^{5}a_nx^n$, com $a_5=4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases}a+2b+5c=0\\a+4b+2c=6\\2a+2b+2c=5\end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

a) –4. b) –2. c) 2. d) 4. e) 6.

Resolução **Alternativa A**

Resolvendo o sistema nas variáveis a, b e c, temos:

$$\begin{cases}a+2b+5c=0\\a+4b+2c=6\\2a+2b+2c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=\frac{3}{2}\\c=-1\end{cases}$$

Assim, a maior raiz é $a=2$, que será a raiz simples, enquanto $b=\frac{3}{2}$ e $c=-1$ serão ambas raízes de multiplicidade 2. Pela fatoração do polinômio de grau 5 em termos de suas raízes, temos:

$$p(x)=a_5\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^2=4\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot(x-(-1))^2$$

Portanto: $p(1)=4\cdot(1-2)\cdot\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot(1+1)^2\Leftrightarrow\boxed{p(1)=-4}$

QUESTÃO 10

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15}a_nx^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+ia_{n-1}$, $n=1,2,...,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin IR$,
II. $|p(x)|\le 4(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}),\forall x\in[-1,1]$,
III. $a_8=a_4$,
é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução **Alternativa E**

A partir da relação de recorrência que define os coeficientes do polinômio, temos:

$$a_0=-1$$
$$a_1=1+i\cdot a_0=1-i$$
$$a_2=1+i\cdot a_1=1+i\cdot(1-i)=2+i$$
$$a_3=1+i\cdot a_2=1+i\cdot(2+i)=2\cdot i$$
$$a_4=1+i\cdot a_3=1+i\cdot(2i)=-1=a_0$$

Assim, a partir desse coeficiente temos uma repetição que nos leva a:
$a_0=a_4=a_8=a_{12}$; $a_1=a_5=a_9=a_{13}$; $a_2=a_6=a_{10}=a_{14}$; $a_3=a_7=a_9=a_{15}$
Assim,

$$p(x)=a_0\cdot(1+x^4+x^8+x^{12})+a_1\cdot(x+x^5+x^9+x^{13})+$$
$$+a_2\cdot(x^2+x^6+x^{10}+x^{14})+a_3\cdot(x^3+x^7+x^{11}+x^{15})$$

Logo, temos:

I) FALSA:

$$p(-1)=a_0\cdot(4)+a_1\cdot(-4)+a_2\cdot(4)+a_3\cdot(-4)=$$
$$=4\cdot[(-1)+(-1+i)+(2+i)+(-2i)]=0$$

que é um número real.

II) VERDADEIRA:

$$p(x)=a_0\cdot(1+x^4+x^8+x^{12})+a_1\cdot(x+x^5+x^9+x^{13})+$$
$$+a_2\cdot(x^2+x^6+x^{10}+x^{14})+a_3\cdot(x^3+x^7+x^{11}+x^{15})$$

$$|p(x)|=|a_0\cdot(1+x^4+x^8+x^{12})+a_1\cdot(x+x^5+x^9+x^{13})+$$
$$+a_2\cdot(x^2+x^6+x^{10}+x^{14})+a_3\cdot(x^3+x^7+x^{11}+x^{15})|$$

$$|p(x)|\le|a_0\cdot(1+x^4+x^8+x^{12})|+|a_1\cdot(x+x^5+x^9+x^{13})|+$$
$$+|a_2\cdot(x^2+x^6+x^{10}+x^{14})|+|a_3\cdot(x^3+x^7+x^{11}+x^{15})|$$

Como x está entre – 1 e 1, cada soma de expoentes é menor ou igual do que 4.

$$\begin{cases}|1+x^4+x^8+x^{12}|\le4\\|x+x^5+x^9+x^{13}|\le4\\|x^2+x^6+x^{10}+x^{14}|\le4\\|x^3+x^7+x^{11}+x^{15}|\le4\end{cases}\Rightarrow|p(x)|\le4.(|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|)$$ Sabendo que:

Como $|a_0|=1$, $|a_1|=\sqrt{2}$, $|a_2|=\sqrt{5}$ e $|a_3|=2$, temos:

$$|p(x)|\le4\cdot(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2)=4(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})$$

III) VERDADEIRA: Pela repetição da relação de recorrência, temos que $a_4=a_8$.

QUESTÃO 11

A expressão $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5-(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$. b) $2690\sqrt{5}$. c) $2712\sqrt{5}$.
d) $1584\sqrt{15}$. e) $1604\sqrt{15}$.

Resolução **Alternativa B**

Temos que:

$$\begin{cases}(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(2\sqrt{3})^{5-k}(\sqrt{5})^k\\(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(2\sqrt{3})^{5-k}(-\sqrt{5})^k\end{cases}$$

Observe que ao subtrairmos a primeira identidade da segunda, membro a membro, os termos em $k=0$, $k=2$ e $k=4$, sendo iguais nas duas, vão se cancelar, sobrando os termos em $k=1$, $k=3$ e $k=5$, que tendo sinais opostos, aparecerão em dobro:

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5-(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5=$$
$$2\cdot\left[\binom{5}{1}(2\sqrt{3})^{5-1}(\sqrt{5})^1+\binom{5}{3}(2\sqrt{3})^{5-3}(\sqrt{5})^3+\binom{5}{5}(2\sqrt{3})^{5-5}(\sqrt{5})^5\right]=$$
$$2\cdot\left[5\cdot144\cdot\sqrt{5}+10\cdot12\cdot5\sqrt{5}+1\cdot1\cdot25\sqrt{5}\right]=\boxed{2690\sqrt{5}}$$

QUESTÃO 12

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

a) $\frac{16}{27}$. b) $\frac{49}{81}$. c) $\frac{151}{243}$. d) $\frac{479}{729}$. e) $\frac{2^4}{3^4}+\frac{2^5}{3^5}$.

Resolução — Alternativa A

Se a probabilidade de um refletor estar aceso é $\frac{2}{3}$, a probabilidade de um refletor estar apagado é dada por $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Temos dois casos para analisar: ou apenas 4 refletores serão acesos ou apenas 5 refletores serão acesos.

Se apenas 4 refletores forem acesos, temos então que escolher 4 dentre os 6 refletores para acender. Assim, aplicando a lei binomial da probabilidade, temos:

$$\text{p(4 refletores)}=\binom{6}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^4}_{\text{refletores acesos}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4}}_{\text{refletores apagados}}\Rightarrow \text{p(4 refletores)}=15\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \text{p(4 refletores)}=\frac{80}{243}$$

Se apenas 5 refletores forem acesos, temos então que escolher 5 dentre os 6 refletores para acender. Assim, aplicando novamente a lei binomial da probabilidade, temos:

$$\text{p(5 refletores)}=\binom{6}{5}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^5}_{\text{refletores acesos}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{6-1}}_{\text{refletores apagados}}\Rightarrow \text{p(5 refletores)}=6\cdot\frac{32}{243}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{p(5 refletores)}=\frac{64}{243}$$

Como os casos "4 refletores" ou "5 refletores" são mutuamente exclusivos, temos que a probabilidade de termos apenas 4 ou apenas 5 refletores acesos é dada por $\frac{80}{243}+\frac{64}{243}=\frac{144}{243}=\boxed{\frac{16}{27}}$.

QUESTÃO 13

Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}\in M_{3x3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4=10$, $\det A=-1000$ e a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d>0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

a) -4. b) -3. c) -2. d) -1. e) 1.

Resolução — Alternativa D

Sendo $a_4=10$, pelo termo geral da progressão aritmética, temos:

$$\begin{cases} a_4=a_1+3\cdot d \\ a_6=a_4+2\cdot d \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1=10-3\cdot d \\ a_6=10+2\cdot d \end{cases}$$

Sendo A uma matriz triangular superior, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det A=a_1\cdot a_4\cdot a_6\Rightarrow -1000=(10-3\cdot d)\cdot 10\cdot(10+2\cdot d)\Leftrightarrow$$

$$3d^2+5d-100=0\Leftrightarrow d=5 \text{ ou } d=-\frac{20}{3}$$

Como $d>0$, ficamos com $d=5$.

Portanto: $a_1=10-3\cdot d=10-3\cdot 5=-5$

Assim:

$$\frac{a_1}{d}=\frac{-5}{5}\Leftrightarrow\boxed{\frac{a_1}{d}=-1}$$

QUESTÃO 14

Sobre os elementos da matriz

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in M_{4x4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 225, respectivamente. Então $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12.

b) $-\frac{1}{72}$ e -12.

c) $-\frac{1}{72}$ e 12.

d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

Resolução — Alternativa C

Trabalhando com as duas progressões geométricas, e sabendo que a soma de uma PG de razão q e n termos é $S_n=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$:

i) (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma PG de razão 3 e soma 80. Logo:

$$80=\frac{x_1\cdot(3^4-1)}{3-1}=x_1\cdot 40\Leftrightarrow x_1=2$$

Assim, a PG é: (2, 6, 18, 54).

ii) (y_1, y_2, y_3, y_4) é uma PG de razão 4 e soma 255. Logo:

$$255=\frac{y_1\cdot(4^4-1)}{4-1}=y_1\cdot 85\Leftrightarrow y_1=3$$

Assim, a PG é: (3, 12, 48, 192).

Portanto, a matriz A é:

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante de A por Laplace na 4ª linha, temos:

$$\det(A)=1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-72.$$

Portanto, $\boxed{\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}=-\frac{1}{72}}$.

Podemos obter um elemento qualquer da inversa de A, sabendo que a esta é dada por $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A_{adj}$, onde A_{adj} é a matriz adjunta de A (transposta da matriz cofatora). Logo, $(A^{-1})_{23}=\frac{C_{32}}{\det A}$, onde C_{32} é o cofator da linha 3 e coluna 2 da matriz A. Assim, temos:

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(3456-2592)=-864$$

E, finalmente:

$$(A^{-1})_{23}=\frac{C_{32}}{\det A}=\frac{-864}{-72}\Rightarrow\boxed{(A^{-1})_{23}=12}$$

QUESTÃO 15

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6}\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\alpha\right]$.
b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right)-\text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.
c) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.
d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.
e) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\alpha$.

Resolução — Alternativa A

Lembrando a transformação de soma em produto:

$$\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,y=\frac{1}{2}\cdot[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

Fazendo $x=\frac{2\alpha}{3^n}$ e $y=\frac{\alpha}{3^n}$, vem que:

$$\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[-\cos\left(\frac{2\alpha}{3^n}+\frac{\alpha}{3^n}\right)+\cos\left(\frac{2\alpha}{3^n}-\frac{\alpha}{3^n}\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)\right]$$

Assim, temos:

$$\sum_{n=1}^{6}\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{2}\cdot\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)\right]$$

Observe que se trata de uma soma telescópica, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{6}\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{1-1}}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right)\right]\Leftrightarrow$$
$$\boxed{\sum_{n=1}^{6}\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\alpha\right]}$$

QUESTÃO 16

Se os números reais α e β, com $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$, $0\le\alpha\le\beta$, maximizam a soma $\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. b) $\frac{2\pi}{3}$. c) $\frac{3\pi}{5}$. d) $\frac{5\pi}{8}$. e) $\frac{7\pi}{12}$.

Resolução — Alternativa B

Aplicando a transformação da soma em produto, temos:

$$\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta=2\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$2\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Para que tenhamos soma máxima, devemos impor que o cosseno seja máximo, ou seja, fazemos:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1\Rightarrow\alpha-\beta=2\cdot k\cdot\pi,\text{ com }k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}\\ \alpha-\beta=2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2\pi}{3}-k\cdot\pi\\ \beta=\frac{2\pi}{3}+k\cdot\pi\end{cases}$$

Como $0\le\alpha\le\beta$, temos $0\le\frac{2\pi}{3}-k\cdot\pi\le\frac{2\pi}{3}+k\cdot\pi\Rightarrow\begin{cases}k\ge 0\\ k\le\frac{2}{3}\end{cases}$ e assim,

sabendo que $k\in\mathbb{Z}$ chega-se a $k=0$ e $\boxed{\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}}$

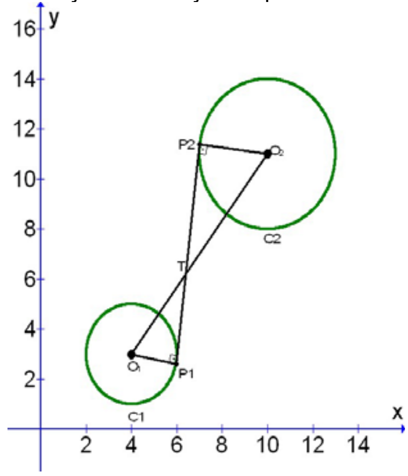
QUESTÃO 17

Considere as circunferências $C_1:(x-4)^2+(y-3)^2=4$ e $C_2:(x-10)^2+(y-11)^2=9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

a) $5\sqrt{3}$. b) $4\sqrt{5}$. c) $3\sqrt{6}$. d) $\frac{25}{3}$. e) 9.

Resolução — Alternativa A

Observe a representação da situação no plano cartesiano:



Calculando a distância dos centros das circunferências (4,3) e (10,11), temos:

$$O_1O_2=\sqrt{(10-4)^2+(11-3)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

Considerando a figura acima, temos que ΔO_1P_1T é semelhante à ΔO_2P_2T. Como o raio das circunferências C_1 e C_2 são, respectivamente, 2 e 3, temos:

$$\frac{O_1P_1}{O_1T}=\frac{O_2P_2}{O_2T}\Rightarrow\frac{2}{O_1T}=\frac{3}{10-O_1T}\Rightarrow O_1T=4$$

Consequentemente, $O_2T=10-4=6$

Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔO_1P_1T, temos:

$$O_1T^2=P_1T^2+O_1P_1^2\Rightarrow P_1T^2=16-4\Rightarrow P_1T=2\sqrt{3}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔO_2P_2T, temos:

$$O_2T^2=P_2T^2+O_2P_2^2\Rightarrow P_2T^2=36-9\Rightarrow P_2T=3\sqrt{3}$$

A distância desejada é: $P_1T+P_2T=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=\boxed{5\sqrt{3}}$

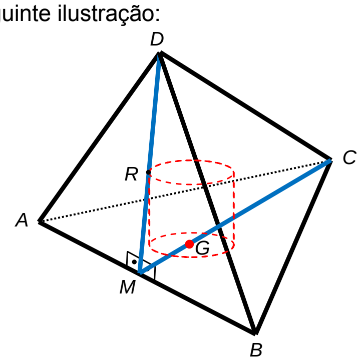
QUESTÃO 18

Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$. d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. e) $\frac{\pi}{3}$.

Resolução — Alternativa D

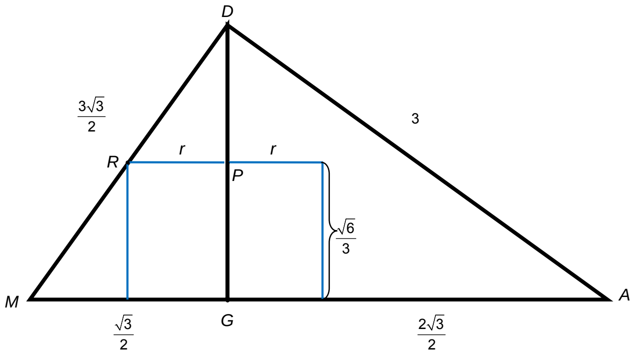
Considere a seguinte ilustração:



Seja H a altura do tetraedro e r o raio do cilindro. Dado que suas arestas medem 3 cm, temos que sua altura é dada por:

$$H=\frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}\Rightarrow H=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{3}\Rightarrow H=\sqrt{6}\text{ cm}$$

Como o cilindro está inscrito no tetraedro, a altura de cada face lateral do tetraedro é tangente à base superior do cilindro. Fazendo então um corte transversal no tetraedro contendo a altura da base e um desses pontos de tangência, podemos montar a seguinte figura, onde G é o baricentro da face inferior do tetraedro:



Observe que o raio da base do cilindro $PR=r$ e a altura do tetraedro é $DG=\sqrt{6}$. Além disso, o ponto G é o baricentro da base, de modo que:

$$MG=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MG=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$$

Pela figura, temos:

$$DP=DG-PG=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow DP=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{ cm}$$

Os triângulos DGM e DPR são semelhantes. Assim:

$$\frac{DG}{DP}=\frac{GM}{PR}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{r}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

Assim, o volume do cilindro é dado por

$$V=\pi\cdot r^2\cdot h\Rightarrow V=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow V=\frac{\pi\sqrt{6}}{9}\text{cm}^3$$

QUESTÃO 19

Um triangulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo $B=(2,1)$ e $C=(5,5)$. Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{2}$,

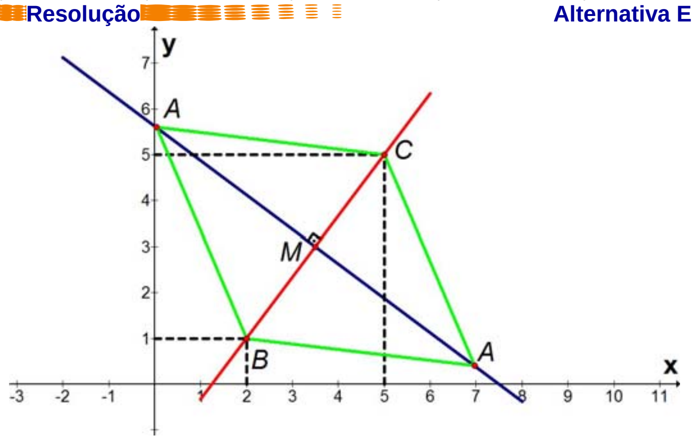
II. A está na intersecção da reta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2+(y-1)^2=25$,

III. A pertence às circunferências $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ e $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução **Alternativa E**



Observe a ilustração acima. Por ela podemos ver que há duas possibilidades onde o ponto A pode estar situado, para que o triângulo *ABC* seja equilátero. No triângulo *ABC*, sabemos que a reta suporte da altura relativa à base $\overline{BC}$, passa pelo ponto médio de $\overline{BC}$ (ponto *M* na figura) já que o triângulo é equilátero, e é perpendicular a este mesmo segmento. Sendo assim, calculemos a equação desta reta, $\overleftrightarrow{AM}$.

Sendo o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{BC}$ $m_{\overline{BC}}=\frac{5-1}{5-2}=\frac{4}{3}$, o valor do coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AM}$ é $m_{\overline{AM}}=-\frac{1}{m_{\overline{BC}}}=-\frac{3}{4}$.

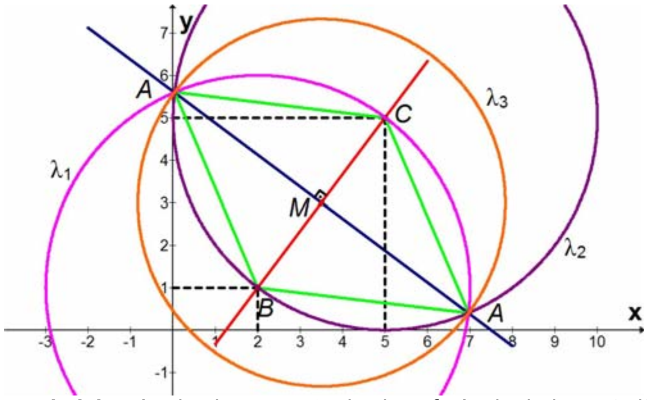
Como ponto médio de $\overline{BC}$, *M* é dado por $M=\left(\frac{5+2}{2},\frac{5+1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},3\right)$, de modo que a equação da reta $\overleftrightarrow{AM}$ é dada por:

$$y-y_M=m_{\overline{AM}}(x-x_M)\Leftrightarrow y-3=-\frac{3}{4}(x-\frac{7}{2})\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$$

Agora analisemos as afirmações dadas.

(I) **Falsa.** As duas possibilidades para o ponto *A* se encontram sobre a reta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$, como demonstramos acima.

(II) **Verdadeira.** A equação da circunferência dada (λ_1 na figura abaixo) se refere a uma circunferência que tem centro em $B=(2,1)$ e raio igual a 5. Como os lados do triângulo equilátero *ABC* são iguais a $BC=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$, podemos dizer que o ponto A está situado sobre essa circunferência. Além disso, como já demonstrado acima, ele também pertence à reta de equação $y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$.



(III) **Verdadeira.** A primeira equação de circunferência dada neste item (λ_2 na figura) se refere a uma circunferência que tem centro em $C=(5,5)$ e raio 5. Como já vimos que o lado do triângulo mede 5, podemos afirmar que o ponto *A* está situado sobre esta circunferência. A segunda equação de circunferência dada (λ_3 na figura) se refere a uma circunferência que tem centro em $M=\left(\frac{7}{2},3\right)$ e raio $\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, que é exatamente a medida da altura do triângulo eqüilátero ABC. Sendo assim o ponto A pertence a essa circunferência também.

QUESTÃO 20

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo *MND*, em cm², é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

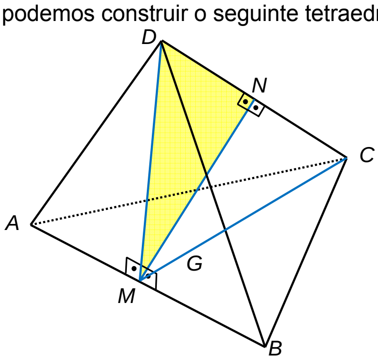
c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

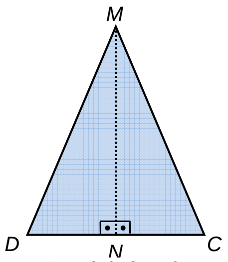
Resolução **Alternativa B**

Pelo enunciado, podemos construir o seguinte tetraedro:



O segmento $\overline{MN}$ é perpendicular ao segmento $\overline{CD}$. De fato, considere o triângulo *MCD*. Como o segmento $\overline{DM}$ é altura do triângulo equilátero *ABD* e o segmento $\overline{CM}$ é altura do triângulo equilátero *ABC*, esses segmentos terão a mesma medida, uma vez que os triângulos *ABC* e *ABD* são congruentes com lados de comprimento 1 cm. Assim:

$$DM = \frac{1.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow DM = CM = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$



Desse modo, o triângulo *MCD* é isósceles, com base *CD*. Assim, o segmento $\overline{MN}$ é tanto uma altura quanto uma mediana do triângulo *MDC*, sendo, portanto, perpendicular ao segmento $\overline{CD}$. Além disso, como o triângulo *MND* é retângulo, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$MD^2 = DN^2 + MN^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + MN^2 \Leftrightarrow MN^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Assim, a área do triângulo retângulo *MND* é dada por:

$$S_{MND} = \frac{MN \times DN}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \boxed{S_{MND} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2}$$

QUESTÃO 21

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n(\mathcal{P}(B \setminus C))$.

Resolução

a) Como $C \subset B$, temos que $B \cap C = C \Rightarrow n(B \cap C) = n(C)$.

Além disso, temos que $n(B \setminus C) = 3 \cdot n(B \cap C) = 3 \cdot n(C)$

Assim, sabendo que $n(B \setminus C) = n(B) - n(C)$, já que $C \subset B$ temos:

$$n(B) - n(C) = 3 \cdot n(C) \Leftrightarrow n(B) = 4n(C)$$

Também, como $(n(C), n(A), n(B))$ estão em PG, podemos dizer que:

$$[n(A)]^2 = n(C) \cdot n(B) = 4 \cdot [n(C)]^2 \Leftrightarrow n(A) = 2 \cdot n(C)$$

(pois $n(A)$ e $n(C)$ são ambos positivos)

Também temos:

$$3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow n(C) = 2n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$$

E, como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22$, chegamos em:

$$2n(C) + 4n(C) - \frac{n(C)}{2} = 22 \Leftrightarrow \boxed{n(C) = 4}$$

b) Do item anterior, $n(B \setminus C) = 3n(C) = 12$.

Assim, temos que $n(\mathcal{P}(B \setminus C)) = 2^{n(B \setminus C)} = 2^{12} \Leftrightarrow \boxed{n(\mathcal{P}(B \setminus C)) = 4096}$

QUESTÃO 22

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$.

Resolução

Sendo $\frac{a_6}{a_1} = \frac{a_{10}}{a_5} = r^5$, observe que as progressões geométricas $(a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$ e $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$ têm ambas razão $q = r^5$.

Por outro lado, o limite da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica de razão *q*, quando *n* tende para infinito, para $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Assim, para a PG $(a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$, fazemos:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow 8 = \frac{a_1}{1-r^5} \Leftrightarrow a_1 = 8 \cdot (1 - r^5)$$

Já para a PG $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$, fazemos:

$$S_2 = \frac{a_5}{1-q} \Leftrightarrow 2 = \frac{a_5}{1-r^5} \Leftrightarrow a_5 = 2 \cdot (1 - r^5)$$

Sendo $a_5 = a_1 \cdot r^4$, temos:

$$2 \cdot (1 - r^5) = 8 \cdot (1 - r^5) \cdot r^4 \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pois } r < 0$$

Portanto:

$$a_1 = 8 \cdot (1 - r^5) = 8 \cdot \left(1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right) = 8 + \sqrt{2}$$

Assim, para a PG $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{8+\sqrt{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2 \cdot (8 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} \cdot \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = 14 - 6\sqrt{2}}$$

QUESTÃO 23

Analise se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1}.

Resolução

Uma função *f*(x) é bijetora se, e somente se, é sobrejetora e injetora simultaneamente. Assim, vamos verificar essas propriedades para $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$.

Inicialmente, vamos verificar se a função *f* é injetora. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b)$. Devemos mostrar que $a = b$.

Para tanto:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow \frac{3^a - 3^{-a}}{2} = \frac{3^b - 3^{-b}}{2} \Leftrightarrow 3^a - \frac{1}{3^a} = 3^b - \frac{1}{3^b}$$

Fazendo $3^a = \alpha$ e $3^b = \beta$, temos:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \beta - \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha - \beta = -\frac{(\alpha - \beta)}{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \cdot \beta = -1$$

Caso $\alpha \cdot \beta = -1$, teríamos $3^a \cdot 3^b = -1 \Leftrightarrow 3^{a+b} = -1$, o que é impossível, uma vez que a função exponencial $y = 3^x$ sempre é positiva. Assim, resta apenas o caso $\alpha = \beta \Leftrightarrow 3^a = 3^b \Leftrightarrow a = b$, que é o que queríamos demonstrar. Assim, *f* é **injetora**.

Vamos verificar se a função *f* é sobrejetora. Seja $y \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Para tanto, fazendo $3^x = z$:

$$y=f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(z-\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow 2y=\frac{z^2-1}{z}\Leftrightarrow z^2-2\cdot y\cdot z-1=0$$

Tratando a variável y como um número conhecido, temos que o discriminante dessa equação é $\Delta=(-2y)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=4\cdot(y^2+1)$. Assim

$$z=\frac{2y\pm\sqrt{4\cdot(y^2+1)}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow z=y\pm\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow 3^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

Como $y-\sqrt{y^2+1}<0$, para $\forall y\in\mathbb{R}$, descartamos essa possibilidade, já que $3^x>0$, para $\forall x\in\mathbb{R}$. Por outro lado, como $y+\sqrt{y^2+1}>0$, para $\forall y\in\mathbb{R}$, fazemos:

$$3^x=y+\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow x=\log_3\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

Ou seja, para cada $y\in\mathbb{R}$, existe pelo menos um $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$, o que mostra que a função *f* é **sobrejetora**.

Sendo injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ***f* é bijetora**, admitindo assim uma inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que, para cada $x\in\mathbb{R}$, tem-se $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Observe que pelo desenvolvimento acima, utilizado para mostrar que *f* é sobrejetora, temos que:

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}\Leftrightarrow x=\log_3\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\Leftrightarrow\boxed{f^{-1}(y)=\log_3\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}$$

QUESTÃO 24

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ também é ímpar.

Resolução

Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijetora, ela admite uma inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}\circ f(x)=x$, para $\forall x\in\mathbb{R}$.

Além disso, sendo *f* também ímpar, temos ainda, para $\forall x\in\mathbb{R}$, que $f(-x)=-f(x)$.

Queremos mostrar que, para $\forall y\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$.

Para tanto, lembramos que se *f* é bijetora, para cada $y\in\mathbb{R}$, existe um e somente um $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$, ou ainda, $x=f^{-1}(y)$. Assim:

$$f^{-1}(-y)=f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(-x))=-x=-f^{-1}(y)$$

Ou seja, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ também é ímpar.

QUESTÃO 25

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{6}a_nx^n$, com coeficientes reais sendo $a_0\neq 0$ e $a_6=1$. Sabe-se que se r é raiz de p, -r também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações.

I. Se r_1 e r_2, $|r_1|\neq|r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0<0$.

Resolução

Por hipótese, o conjunto solução da equação p(x) = 0 é:

$$S=\{r_1,-r_1,r_2,-r_2,r_3,-r_3\}.$$

Analisando cada afirmação, temos:

I. VERDADEIRA: Se r_1 e r_2 são raízes reais, então $-r_1$ e $-r_2$ também são raízes reais e a soma dessas quatro raízes é nula. Como r_3 é uma raiz não real de p, r_3 = a + bi, com b ≠ 0. Pelo teorema das raízes complexas, como os coeficientes são reais, $\overline{r_3}=a-bi$ também é raiz. Como, por hipótese, $-r_3$ = – a – bi é a sexta raiz, temos que:

$$-r_3=\overline{r_3}\Leftrightarrow -a-bi=a-bi\Leftrightarrow 2a=0\Leftrightarrow a=0$$

Portanto, r_3 é da forma b.i, que é um imaginário puro.

II. FALSA: Como um contra-exemplo, observe que poderíamos ter o conjunto solução {2 + i, 2 + i, 2 – i, 2 – i, -2 + i, -2 – i}, formado por números complexos que não são nem reais nem imaginários puros. Note que as condições *r* e *–r* como raízes continuam válidas, além da validade do teorema das raízes complexas. Observe que o exercício não afirma que *r* e *–r* devem ter a mesma multiplicidade.

III) FALSA: Seja S o conjunto solução de p: $\{r_1,-r_1,r_2,-r_2,r_3,-r_3\}$.

Por Girard, $(r_1)(-r_1)(r_2)(-r_2)(r_3)(-r_3)=a_o\Leftrightarrow a_o=-(r_1r_2r_3)^2$.

Como as raízes são complexas, tome por exemplo, $r_1=i$, $r_2=-i$ e $r_3=1$, e assim, temos: $a_o=-(r_1r_2r_3)^2=-(i.-i.1)^2=1$, que é positivo.

QUESTÃO 26

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser múltiplo de 6.

Resolução

a) Sendo n o número de bolas com número múltiplo de 5 ou 6 e P a probabilidade desejada, temos que $P=\frac{n}{90}$. Sendo n_5 o número de múltiplos de 5 entre 1 e 90, n_6 o número de múltiplos de 6 entre 1 e 90 e n_{30} o número de múltiplos de 30 entre 1 e 90, podemos dizer que

$$n=n_5+n_6-n_{30}$$

Para calcularmos n_5, basta vermos que ele é igual ao número de termos da PA (5, 10, 15, ..., 90). Como a_1 = 5, a_n = 90 e r = 5, temos que

$$a_n=a_1+(n_5-1)\cdot r\Leftrightarrow 90=5+(n_5-1)\cdot 5\Leftrightarrow n_5=18.$$

De maneira análoga podemos ver que n_6 é igual ao número de termos da PA (6, 12, 18, ..., 90). Nesse caso, a_1 = 6, a_n = 90 e r = 6 e, portanto,

$$a_n=a_1+(n_6-1)\cdot r\Leftrightarrow 90=6+(n_6-1)\cdot 6\Leftrightarrow n_6=15.$$

O valor de n_{30} é igual ao número de termos da PA (30, 60, 90) que é 3. Portanto, a probabilidade pedida é

$$P=\frac{n}{90}=\frac{n_5+n_6-n_{30}}{90}=\frac{18+15-3}{90}=\frac{30}{90}\Rightarrow\boxed{P=\frac{1}{3}}$$

b) Sendo P_1 a probabilidade de se retirar uma bola com número múltiplo de 6 e, sem repô-la, depois retirar-se uma bola de número não múltiplo de 6 e P_2 a probabilidade de se retirar uma bola com número não múltiplo de 6 e, sem repô-la, depois retirar-se uma bola de número não múltiplo de 6 novamente, temos que a probabilidade, P, pedida é igual à soma de P_1 com P_2. Sendo assim,

$$P=P_1+P_2=\frac{15}{90}\cdot\frac{75}{89}+\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}=\frac{75\cdot(15+74)}{90\cdot 89}=\frac{75}{90}\Rightarrow\boxed{P=\frac{5}{6}}$$

QUESTÃO 27

Considere as matrizes A e $A\in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e X, $B\in M_{4x1}(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{bmatrix}a&1&b&1\\b&1&a&0\\0&2&0&0\\-a&2&b&1\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\ \text{e}\ B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores de a e b tais que a equação matricial $AX=B$ tenha solução única.

b) Se $a^2-b^2=0$, $a\neq 0$ e $B=\begin{bmatrix}1&1&2&4\end{bmatrix}^t$, encontre X tal que $AX=B$.

Resolução

Para que $AX=B$ tenha solução única, $\det A\neq 0$

Por Laplace na linha 3, temos:

$$\begin{vmatrix}a&1&b&1\\b&1&a&0\\0&2&0&0\\-a&2&b&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}a&b&1\\b&a&0\\-a&b&1\end{vmatrix}=-2\cdot\left(a^2+b^2+a^2-b^2\right)=-4a^2$$

Assim, $AX=B$ tem solução única se e somente se:

$$-4a^2\neq 0\Leftrightarrow\boxed{a\neq 0}$$

b) O sistema em questão é:

$$\begin{cases}ax+y+bz+w&=1\\bx+y+az&=1\\2y&=2\\-ax+2y+bz+w&=4\end{cases}$$

Se $a^2-b^2=0\Rightarrow a=\pm b$, e lembrando que $a\neq 0\Rightarrow b\neq 0$.

Caso 1: $a=b$

$$\begin{cases} ax+y+az+w=1\\ ax+y+az=1\\ 2y=2\\ -ax+2y+az+w=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \begin{cases} ax+az+w=0\\ ax+az=0\\ -ax+az+w=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{w=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+az=0\\ -ax+az=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=\dfrac{1}{a}}\\ \boxed{x=-\dfrac{1}{a}}\end{cases}$$

Caso 2: $a=-b$

$$\begin{cases} ax+y-az+w=1\\ -ax+y+az=1\\ 2y=2\\ -ax+2y-az+w=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \begin{cases} ax-az+w=0\\ -ax+az=0\\ -ax-az+w=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{w=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax-az=0\\ -ax-az=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=-\dfrac{1}{a}}\\ \boxed{x=-\dfrac{1}{a}}\end{cases}$$

Assim, temos:

Caso $a=b$, $X=\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}^t$, com $a\in\Re\setminus\{0\}$.

Caso $a=-b$, $X=\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & -\frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}^t$, com $a\in\Re\setminus\{0\}$.

QUESTÃO 28

Considere a equação $(3-2\cos^2 x)\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)-6\,\text{tg}\frac{x}{2}=0$.

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0,\pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $\text{cotg}\,x$.

Resolução

a) Partindo da igualdade do enunciado, sendo $1+\text{tg}^2\frac{x}{2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(3-2\cos^2 x)\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)-6\,\text{tg}^2\frac{x}{2}=0 \Rightarrow (3-2\cos^2 x)=3\cdot\frac{2\,\text{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)}$$

Mas, temos que $\text{sen}\,x=\dfrac{2\cdot\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$ $(*)$

Logo:

$$(3-2\cos^2 x)=3\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow 1-2\,\text{sen}^2 x=3\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow 2\,\text{sen}^2 x-3\,\text{sen}\,x+1=0$$

Resolvendo a equação, no intervalo $[0,\pi[$:

$$\begin{cases} \text{sen}\,x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\\ \text{sen}\,x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x=\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$$

Assim, o conjunto verdade da equação é:

$$\boxed{V=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}}$$

b) Calculando a cotangente para cada uma das soluções obtidas no item (a), chega-se a:

$$\boxed{\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ \text{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3};\ \text{cotg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}}$$

Observação (demonstração da identidade $(*)$):

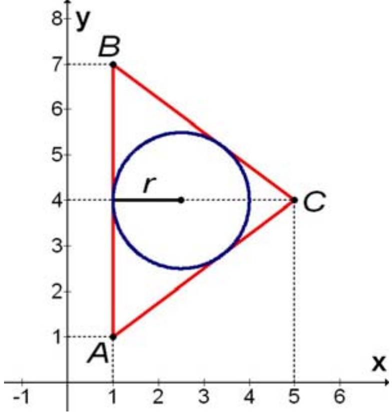
$$(*)\ \text{sen}\,x=2\cdot\text{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\cdot\text{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\cdot\text{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$

QUESTÃO 29

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vétices são A= (1,1), B = (1,7) e C= (5,4) no plano xOy.

Resolução

Considere a seguinte figura, que representa a situação:



Podemos ver facilmente que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$, já que a altura relativa a esse segmento passa pelo ponto médio dele.

Além disso, temos que $AC=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5=BC$ e que $AB=7-1=6$.

Para calcularmos o raio da circunferência inscrita a esse triângulo, lembremos que a área de um triângulo pode ser dada por $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo *a, b* e *c* os lados do triângulo e *p* o seu semi-perímetro, e também por $A=p\cdot r$, sendo *r* o raio da circunferência inscrita.

Sendo assim, observando que no triângulo ABC temos $p=\dfrac{5+5+6}{2}=8$, podemos fazer:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=p\cdot r$$

$$\sqrt{8\cdot(8-5)(8-5)(8-6)}=8\cdot r \Leftrightarrow 12=8r \Leftrightarrow \boxed{r=\frac{3}{2}}$$

Pela simetria do triângulo isósceles, podemos ver que o centro da circunferência se encontra sobre a reta suporte da altura relativa a $\overline{AB}$, ou seja, $y=4$. Além disso, podemos ver que a distância entre o segmento $\overline{AB}$ e o centro da circunferência é igual a r, ou seja, a abscissa do centro vale $1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Logo, sobre a circunferência inscrita, podemos afirmar que o seu centro é o ponto $\left(\dfrac{5}{2},4\right)$ e seu raio mede $\dfrac{3}{2}$ e sua equação é:

$$\boxed{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-4)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

QUESTÃO 30

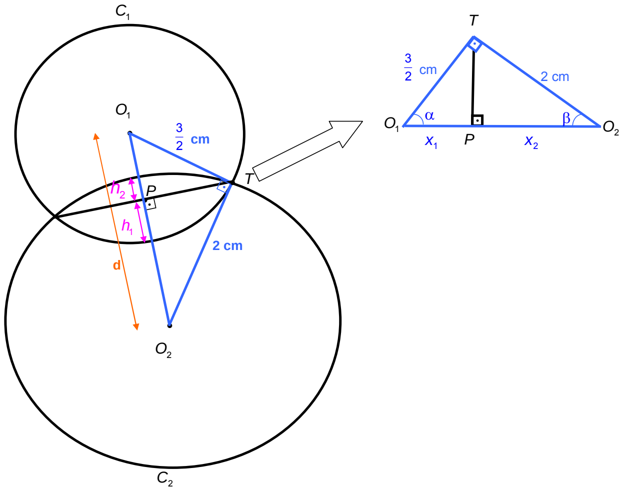
As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\dfrac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Resolução

Podemos visualizar o seguinte esquema:



a) Para o cálculo de d temos: $d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow \boxed{d = \frac{5}{2}}$

b) A área desejada é a soma de duas calotas esféricas cujas alturas estão indicadas por h_1 e h_2.

Do triângulo acima, temos que: $(x_1 + x_2) = d$.

Utilizando as relações de triângulo retângulo, temos:

$$x_1 = \frac{r_1^2}{d} \Rightarrow x_1 = \frac{\left(3/2\right)^2}{5/2} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{10} \text{ e } x_2 = \frac{r_2^2}{d} \Rightarrow x_2 = \frac{2^2}{5/2} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{5}.$$

Assim:

$$h_1 = r_1 - x_1 \Rightarrow h_1 = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{3}{5}};\ h_2 = r_2 - x_2 \Rightarrow h_2 = 2 - \frac{8}{5} \Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{2}{5}}$$

Uma vez que a área da superfície de uma calota é dada por $A = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$. Onde r é o raio da esfera e h a altura da calota, a área desejada é: $A = 2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2 = A = 2\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{2}{5}\right) = \boxed{\frac{17\pi}{5}}$

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ ,\ k \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \ ,\ k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: modulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

A^{-1} : inversa da matriz inversível A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\operatorname{Arg} z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi[$

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$f \cdot g$: produto das funções f e g

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.