ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

Resolve

ITA 2009 MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$
$\mathbb{R}$: conjunto de números reais
$\mathbb{C}$: conjunto de números complexos
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$
$(a,+\infty) =]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$
A^C : complementar do conjunto A
i : unidade imaginária $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re z : parte real do número $z \in \mathbb{C}$
Im z : parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$M_{mxn}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais m x n
A^t transposta da matriz A
det A : determinante da matriz A
$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
trA : soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 01

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f,g,h\}$, $B^C \cap A = \{a,b\}$ e $A^C \setminus B = \{d,e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

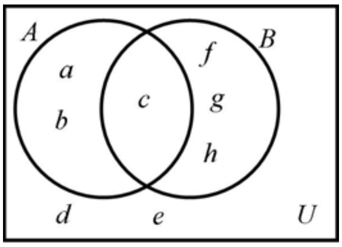
a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

Resolução — Alternativa C

Usando as leis de De Morgan:
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, temos que:

$$(B^C \cup A)^C = (B^C)^C \cap A^C = B \cap A^C = \{f,g,h\}.$$

Com isso e usando as igualdades do enunciado, podemos montar o seguinte diagrama de Euler-Venn:



Portanto, $A \cap B = \{c\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$.

Dessa forma, o conjunto das partes $P(A \cap B) = \{\{c\}, \varnothing\}$

O que implica que $n(P(A \cap B)) = 2^1 = 2$

QUESTÃO 02

Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustiveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

a) 246 b) 252 c) 260 d) 268 e) 284

Resolução — Alternativa B

Denominando:

G : número de carros originalmente com motor a gasolina

F : número de carros originalmente com motor "flex"

Como 36% dos carros com motor a gasolina passaram a funcionar com gás GNV, temos:

$0,36 \cdot G$ são os carros a gasolina e a GNV (*bicombustíveis*)

$0,64 \cdot G$ são os carros que continuaram apenas a gasolina

Como 36% dos carros com motor "flex" passaram a funcionar também com gás GNV, temos:

$0,36 \cdot F$ são os carros a álcool, gasolina e a GNV (*tricombustíveis*)

$0,64 \cdot F$ são os carros que continuaram a funcionar apenas a álcool e a gasolina (*bicombustíveis*).

Sabendo que 556 carros são bicombustíveis e que no total temos 1000 carros, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,36 \cdot G + 0,64 \cdot F = 556 \\ G + F = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,36 \cdot G + 0,64 \cdot F = 556 \\ 0,36 \cdot G + 0,36 \cdot F = 360 \end{cases} \Rightarrow 0,28 \cdot F = 196$$

Portanto $\boxed{F = 700}$ e $\boxed{G = 300}$

Desta forma, o **número de carros tricombustíveis** (álcool, gasolina e GNV) é $0,36 \cdot F = 0,36 \cdot 700 = \boxed{252}$

QUESTÃO 03

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$f(x+y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e

$f(x) \ne 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.
II $f(0) = 1$.
III. f é injetiva.
IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

a) I e III.
b) II e III.
c) I e IV.
d) IV.
e) I.

Resolução — Alternativa E

I. Falsa. Se a função f fosse ímpar, teríamos: $f(-x) = -f(x)$, para $\forall x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $x = 0$, vem que:

$$f(-0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Porém, sendo o contradomínio de f o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nenhuma imagem pode ser nula. Em particular, $f(0) \ne 0$.

II. Verdadeira. Fazendo $x = y = 0$ na identidade $f(x+y) = f(x)f(y)$, temos $f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow (f(0))^2 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Como $f(0) \ne 0$, temos necessariamente $f(0) = 1$.

III. Verdadeira. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b)$. Então, temos:

$$f(b) = f(a + (b-a)) = f(a) \cdot f(b-a) \Rightarrow f(a) = f(a) \cdot f(b-a)$$

Como $f(a) \ne 0$, segue que $f(b-a) = 1$.

Porém, como $\begin{cases} f(x) \ne 1, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$, isto é, como somente o 0 tem imagem igual a 1, vem que $b - a = 0 \Rightarrow a = b$.

Assim, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, isto é, f é injetora.

IV. Verdadeira. Fazendo $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$.

Como $\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Além disso, como as imagens não podem ser nulas, já que o contradomínio é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, segue que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fazendo com que a função não seja sobrejetora.

QUESTÃO 04

Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

a) $a + bi$.
b) $-a + bi$.
c) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1+b^2)i$.
d) $a - bi$.
e) $(1 - 4a^2b^2) + 2ab(1-b^2)i$

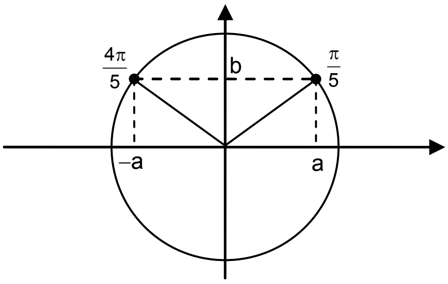
Resolução **Alternativa B**

Aplicando a formula de Moivre para potenciação de números complexos, temos:

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}=\cos\frac{54\pi}{5}+i\cdot \text{sen}\frac{54\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}+i\cdot \text{sen}\frac{4\pi}{5}$$

Como os arcos $\frac{4\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{5}$ são suplementares, segue que:

$$\begin{cases}\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}=-a\\ \text{sen}\frac{4\pi}{5}=\text{sen}\frac{\pi}{5}=b\end{cases}$$



Assim: $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}=\cos\frac{4\pi}{5}+i\cdot \text{sen}\frac{4\pi}{5}=\boxed{-a+b\cdot i}$

QUESTÃO 05

O polinômio de grau 4

(a+2b+c)x⁴+(a+b+c)x³-(a-b)x²+(2a-b+c)x+2(a+c),

Com *a,b,c* $\in\mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

a) $3+\sqrt{3}$ b) $2+3\sqrt{3}$ c) $2+\sqrt{2}$ d) $1+2\sqrt{2}$ e) $2+2\sqrt{2}$

Resolução **Alternativa E**

Considere o polinômio

$$p(x) = (a+2b+c)x^4+(a+b+c)x^3-(a-b)x^2+(2a-b+c)x+2(a+c)$$

Sendo o polinômio uma função par temos p(x) = p(-x) para qualquer valor de x, de modo que os coeficientes de seus monômios de grau ímpar devem ser nulos, ou seja:

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ 2a-b+c=0\end{cases}$$

Esse sistema é possível indeterminado, de modo que podemos utilizá-lo para reescrever os outros coeficientes do polinômio como função de a, b ou c:

$a+2b+c=(a+b+c)+b=0+b=b$

$a-b=(a-2b)+b=(2a-b+c)-(a+b+c)+b=0-0+b=b$

$2(a+c)=2(a+b+c-b)=2(0-b)=-2b$

Substituindo esses valores no polinômio, encontramos $p(x)=bx^4-bx^2-2b$. Pelo enunciado esse polinômio tem grau 4, de modo que $b\neq 0$. Assim:

$$p(x)=0\Leftrightarrow b(x^4-x^2-2)=0\Leftrightarrow x^4-x^2-2=0$$

Fazendo y = x², temos $y^2-y-2=0\Leftrightarrow y=2$ ou $y=-1$. Desse modo, temos $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ ou $x^2=-1\Leftrightarrow x=\pm i$. Somando os módulos das raízes, temos $|i|+|-i|+|\sqrt{2}|+|-\sqrt{2}|=1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}=\boxed{2+2\sqrt{2}}$.

QUESTÃO 06

Considere as funções *f (x) = x⁴ + 2x³ - 2x – 1* e *g (x) = x² – 2x + 1.* A multiplicidade das raízes não reais da função composta *f o g* é igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução **Alternativa C**

Fatorando f(x), temos:

$f(x) = x^4 + 2x^3 – 2x – 1 = x^4 – 1 + 2x^3 – 2x = (x^2 – 1)(x^2 + 1)+2x(x^2 – 1) = (x^2 – 1)(x^2 + 2x + 1) = (x – 1)(x + 1)(x + 1)^2 = (x – 1)(x + 1)^3$

Assim, $fog(x)=f(g(x))=(x^2 – 2x)(x^2 – 2x + 2)^3$.

Logo, as raízes de fog(x) são as raízes de:

$$(x^2 – 2x)(x^2 – 2x + 2)^3=0$$

Sendo as raízes de $(x^2 – 2x)$ de multiplicidade 1 e as raízes de $(x^2 – 2x + 2)$ de multiplicidade 3. Mas:

$x^2 – 2x = 0 \Rightarrow x=0$ ou $x=2$ (raízes reais)

$x^2 – 2x + 2 = 0 \Rightarrow x= 1\pm i$ (raízes não reais)

Portanto, **a multiplicidade das raízes não reais é 3**.

QUESTÃO 07

Suponha que os coeficientes reais *a* e *b* da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real *r* com $|r|\neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II. As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.
é (são) verdadeira (s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas II e III. e) nenhuma.

Resolução **Alternativa A**

Analisando os coeficientes da equação, temos que tal equação é uma equação recíproca de grau 4. Tal equação, por ser recíproca, admite α e $\frac{1}{\alpha}$ como raízes ($\alpha\neq 0$). Do enunciado, temos que r não real é raiz.

Assim, podemos afirmar que:

a) Se r não real é raiz, então $\bar{r}$, o conjugado de r, também é raiz. (teorema das raízes complexas);

b) Se r é raiz, $\frac{1}{r}$ também é raiz, pois a equação é recíproca.

Como $|r|\neq 1$ e r é não real, considere $r=\rho(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$, com $\rho=|r|\neq 1$

Usando potenciação de números complexos, temos que:

$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}(\cos(-\theta)+i\,\text{sen}(-\theta))$.

Supondo $\frac{1}{r}=r$, teríamos $\frac{1}{\rho}=\rho\Rightarrow\rho^2=1\Rightarrow\rho=1$. Por hipótese, como $|r|\neq 1$, temos que $\rho\neq 1$ e com isso, concluímos que: $\frac{1}{r}\neq r$.

Logo, as raízes da equação são: $\frac{1}{r}$, r, $\bar{r}$ e $\frac{1}{\bar{r}}$, que são as 4 raízes não reais da equação. Assim, a equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.

Logo, podemos concluir que:

I. Verdadeira

II. Falsa, pois as raízes possuem multiplicidade 1, uma vez que o polinômio tem grau 4 e são 4 raízes distintas.

III. Falsa, pois, conforme visto, as 4 raízes são não reais.

QUESTÃO 08

Se as soluções da equação algébrica $2x^3-ax^2+bx+54=0$, com coeficientes *a, b* $\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a

a) -3. b) $-\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{3}$. d) 1. e) 3.

Resolução **Alternativa B**

Se as três raízes da equação dada estão em progressão geométrica de razão *q*, vamos denotá-las por λ, $\lambda\cdot q$ e $\lambda\cdot q^2$. Pelas relações de Girard, o produto dessas raízes é dado por:

$$\lambda\cdot(\lambda\cdot q)\cdot(\lambda\cdot q^2)=-\frac{54}{2}\Rightarrow(\lambda\cdot q)^3=-27\Rightarrow\lambda\cdot q=-3$$

Isto é, uma das raízes da equação é -3. Assim:

$$2\cdot(-3)^3-a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+54=0\Rightarrow\boxed{\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}}$$

QUESTÃO 09

Dados $A\in M_{3x2}(\mathbb{R})$ e $b\in M_{3x1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0\in M_{2x1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX=b$ quando $\sqrt{(AX_0-b)^t(AX_0-b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

a) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Resolução **Alternativa E**

O sistema dado representa $AX = b$ para $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim, temos que $AX = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ x \end{bmatrix}$.

Com isso, concluímos que:

$$AX - b = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-1 \\ y-1 \\ x-1 \end{bmatrix} \Rightarrow (AX-b)^t = \begin{bmatrix} -x-1 & y-1 & x-1 \end{bmatrix}$$

Logo: $\sqrt{(AX-b)^t \cdot (AX-b)} = \sqrt{\begin{bmatrix} -x-1 & y-1 & x-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x-1 \\ y-1 \\ x-1 \end{bmatrix}} =$

$$= \sqrt{\left[(-x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2\right]} = \sqrt{\left[2x^2 + (y-1)^2 + 2\right]}$$

Fica aqui uma **ressalva**: conceitualmente, um número real λ e uma matriz $[\lambda]_{1x1}$, cuja única entrada é esse número λ, são objetos matemáticos distintos. A questão pede a extração da raiz quadrada da matriz 1x1 indicada, o que foge totalmente do conteúdo abordado no Ensino Médio. Entendendo que o enunciado se refere à raiz quadrada da única entrada dessa matriz, que é a expressão $2x^2 + (y-1)^2 + 2$, podemos prosseguir com a resolução da questão.

Tal expressão assume valor mínimo quando $2x^2$ e $(y-1)^2$ assumem seus valores mínimos, que no caso é 0 para ambas, pois sendo quadrados de números reais, não podem ser negativos. Assim, tal expressão assume valor mínimo para $x = 0$ e $y = 1$, de modo que a melhor aproximação quadrática do sistema é a matriz:

$$\boxed{X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

QUESTÃO 10

O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

Com $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

a) determinado.
b) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
c) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
d) impossível.
e) indeterminado.

Resolução **Alternativa D**

Multiplicando a primeira equação do sistema por c_1 e a segunda equação por c_2, temos:

$$\begin{cases} a_1c_1 \cdot x + b_1c_1 \cdot y = c_1^2 \\ a_2c_2 \cdot x + b_2c_2 \cdot y = c_2^2 \end{cases}$$

Somando ambas as equações membro a membro, temos:

$$(a_1c_1 + a_2c_2) \cdot x + (b_1c_1 + b_2c_2) \cdot y = c_1^2 + c_2^2$$

Equação esta que, por ser uma combinação linear das demais, também deve ser satisfeita para as soluções do problema.

Mas, de acordo com o enunciado, temos: $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$

Isso nos leva a $0x + 0y = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 = 0$. Como $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, teríamos $c_1 = c_2 = 0$, o que é **impossível** de acordo com a condição $(c_1, c_2) \neq (0,0)$.

QUESTÃO 11

Seja $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $tr\ A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2x1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

a) $\frac{101}{25}$. b) $\frac{121}{25}$. c) 5. d) $\frac{49}{9}$. e) $\frac{25}{4}$.

Resolução **Alternativa A**

Como a matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ é simétrica e os elementos a_{11}, a_{12} e a_{22} formam uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, temos que essa matriz pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 \end{bmatrix}$$

Pelo enunciado temos tr (A) = $5.a_{11}$, de modo que $a_{11} + a_{11}q^2 = 5.a_{11}$.

Como $a_{11} \neq 0$ (matriz não nula) segue que $1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4$.

Resolvendo o sistema AX = X, temos AX – X = 0, resultando no sistema matricial homogêneo (A – I)X = 0, onde I representa a matriz identidade. Assim:

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como esse sistema admite solução não nula, segue que ele é possível indeterminado, implicando em:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desta forma:

$$(a_{11} - 1) \cdot (a_{11} \cdot q^2 - 1) - a_{11}^2 \cdot q^2 = 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{11} \cdot q^2 = 1$$

Fazendo $q^2 = 4$ temos $a_{11} = \frac{1}{5}$, de modo que $a_{11}^2 + q^2 = \frac{1}{25} + 4 = \frac{101}{25}$.

QUESTÃO 12

Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

a) 73%.
b) 70%.
c) 68%.
d) 65%.
e) 64%.

Resolução **Alternativa B**

Pelo enunciado, temos que 18% dos estrangeiros são proficientes em inglês, de modo que 82% são não proficientes. Assim:

1) Proficientes classificados como proficientes: 75%×18% = 13,50%

2) Não proficientes classificados como proficientes: 7%×82% = 5,74%

O total de elementos do espaço amostral é dado por todos os que foram classificados como proficientes em inglês, correspondendo, portanto, a 13,50% + 5,74% = 19,24% do total de estrangeiros.

O total de estrangeiros efetivamente proficientes em inglês que foram classificados como proficientes correspondem a 13,50% do total (situação 1). Assim, a probabilidade de um estrangeiro classificado como proficiente ser efetivamente proficiente em inglês é dada por:

$$\text{Probabilidade} = \frac{13{,}50\%}{19{,}24\%} \approx 70\%$$

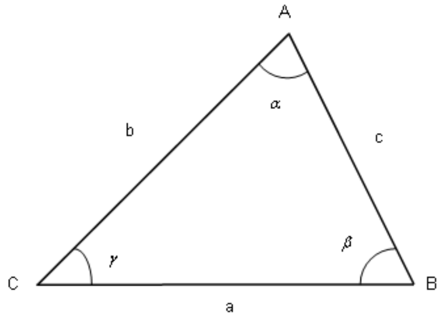
QUESTÃO 13

Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

a) $\alpha = 90°$
b) $\beta = 60°$
c) $\gamma = 90°$
d) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45°$
e) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Resolução **Alternativa E**

Observe a figura:



O produto das raízes da equação do 2º grau $a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$ é dado por $P = \dfrac{a_0}{a_2}$. Sabendo que c é raiz dupla, temos:

$$x^2 - 2b\cos\alpha.x + b^2 - a^2 = 0$$

$$P = \frac{b^2 - a^2}{1} = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2$$

Portanto, o triângulo *ABC* é retângulo em *B* e *b* é a hipotenusa.

Nota: É bom ressaltar que não utilizamos o coeficiente a_1 nesta resolução. Precisamos verificar que o fato de *c* ser raiz dupla condiz com este coeficiente.

A equação pode ser reescrita como:

$$(x - c)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 = 0$$

Então, comparando com a formulação original da equação:

$$x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$

Desenvolve-se duas equações:

(1) $c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow c^2 + a^2 = b^2$

(2) $2c = 2b.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{c}{b}$

Usando a Lei dos Cossenos no mesmo triângulo, e utilizando o encontrado na equação (2) temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\frac{c}{b} \Rightarrow a^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2$$

Dessa forma, o resultado encontrado na equação (2) aplicado no triângulo considerado é compatível com nossos resultados (triângulo retângulo em $A\hat{B}C$), e que a comparação de a_1 seria uma abordagem alternativa na resolução da questão pelo candidato.

QUESTÃO 14

No plano, considere *S* o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta *t : x = 1* e ao ponto *A* = (3,2) é igual a 4. Então, *S* é

a) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro (2,1).
b) uma circunferência de raio 1 e centro (1,2).
c) uma hipérbole.
d) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
e) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Resolução **Alternativa D**

Seja $P(x,y)$ um ponto que pertence ao lugar geométrico *S*. Temos:

$$(d_{P,t})^2 + (d_{PA})^2 = 4$$

Mas $(d_{P,t})^2 = (x-1)^2$ e $(d_{PA})^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$, logo, o lugar geométrico *S* é dado por:

$$(x-1)^2 + \left((x-3)^2 - (y-2)^2\right) = 4$$

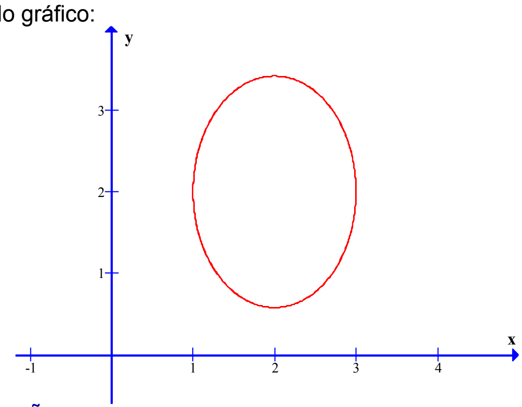
$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 = 0$$

$$2.(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \qquad (dividindo\ por\ 2)$$

$$(x-2)^2 + \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

Esta equação é a equação reduzida de uma elipse com centro $C(2,2)$, eixo maior igual a $2\sqrt{2}$ e eixo menor igual a 2. Veja um esboço do gráfico:



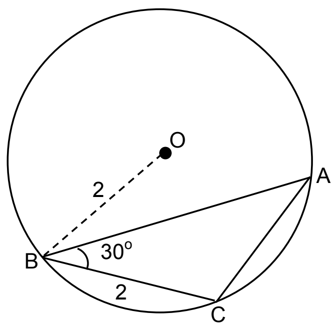
QUESTÃO 15

Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2cm$, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede $2cm$ e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede 30°. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em *cm*, igual a

a) $2-\sqrt{3}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) $2\sqrt{3}-3$ e) $\dfrac{1}{2}$

Resolução **Alternativa D**

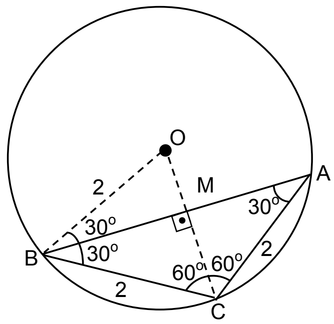
Observe a figura abaixo:



Usando a Lei dos Senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{2}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2.2 \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^\circ$$

Portanto o triângulo ABC é isósceles de base AB. Veja a figura abaixo:



Seja M o ponto de intersecção dos segmentos AB e OC. Nos triângulos AMC ou BMC, temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{BM}{2} \Rightarrow AM = BM = \sqrt{3}$$

A área do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{AC \cdot BC \cdot \text{sen}\ 120^\circ}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$$

Esta área também pode ser calculada como $S = p \cdot r$, onde *p* é o semi-perímetro do triângulo ABC e r é o raio da circunferência inscrita. Desta forma:

$$S = p \cdot r \Rightarrow \sqrt{3} = \left(\frac{2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}\right) \cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{r = 2\sqrt{3} - 3}$$

QUESTÃO 16

A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

Resolução **Alternativa E**

Vamos reescrever a equação da parábola acima:

$$2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 4y - 3 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 4y - 3 + 2 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 4y - 1 \Rightarrow y - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.(x-1)^2$$

A equação acima representa uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice no ponto $V\left(1, \frac{1}{4}\right)$. A distância entre o vértice e o foco da parábola é exatamente o valor do parâmetro dividido por 2. Então:

$$p = \left|\frac{1}{2a}\right| = \left|\frac{1}{2.\frac{1}{2}}\right| = 1 \text{ e } \boxed{d_{FV} = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}}.$$

QUESTÃO 17

A expressão $\dfrac{2\left[sen\left(x + \frac{11}{2}\pi\right) + \cot g^2 x\right] tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$ é equivalente a

a) $\left[\cos x - sen^2 x\right]\cot gx$ b) $\left[senx + \cos x\right]tgx$

c) $\left[\cos^2 x - senx\right]\cot g^2 x$ d) $\left[1 - \cot g^2 x\right]senx$

e) $\left[1 + \cot g^2 x\right]\left[senx + \cos x\right]$

Resolução **Alternativa A**

Lembrando que:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2.\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{2.\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow 2.\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{tg } x.\left(1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

E que: $\frac{11\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$

Temos:

$$\frac{2\left[\text{sen}\left(x + \frac{11}{2}\pi\right) + \text{cotg}^2 x\right].\text{tg}\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\left[\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \text{cotg}^2 x\right]}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}.\text{tg } x.\left(1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \left[-\cos x + \text{cotg}^2 x\right].\text{tg } x.\frac{\left(1 - \frac{\text{sen}^2\left(x/2\right)}{\cos^2\left(x/2\right)}\right)}{\left(1 + \frac{\text{sen}^2\left(x/2\right)}{\cos^2\left(x/2\right)}\right)} =$$

$$= \left[-\cos x + \text{cotg}^2 x\right].\text{tg } x.\frac{\left(\cos^2\left(x/2\right) - \text{sen}^2\left(x/2\right)\right)}{\left(\cos^2\left(x/2\right) + \text{sen}^2\left(x/2\right)\right)} =$$

$$= \left[-\cos x + \text{cotg}^2 x\right].\text{tg } x.\cos x = \left[\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \cos x\right].\text{sen } x =$$

$$= \left[\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x.\cos x}{\text{sen}^2 x}\right].\text{sen } x = \left[\cos^2 x - \text{sen}^2 x.\cos x\right].\frac{1}{\text{sen } x} =$$

$$= \left[\cos x - \text{sen}^2 x\right].\frac{\cos x}{\text{sen } x} = \left[\cos x - \text{sen}^2 x\right].\text{cotg } x$$

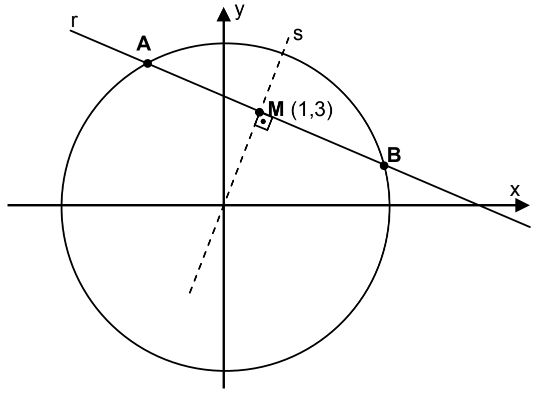
QUESTÃO 18

Sejam C uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0,0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo que $(1,3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

a) $y + 3x - 6 = 0$
b) $3y + x - 10 = 0$
c) $2y + x - 7 = 0$
d) $y + x - 4 = 0$
e) $2y + 3x - 9 = 0$

Resolução **Alternativa B**

Observe o seguinte esquema:



O ponto M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$. Logo a reta que passa por M e pelo centro da circunferência (origem), aqui denominada *s,* é perpendicular à reta que contém a corda $\overline{AB}$, a qual chamaremos de *r*. Desta forma, determina-se o coeficiente angular de *r*:

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow \left(\frac{3-0}{1-0}\right) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{3}$$

Além disso, temos que o ponto M (1,3) pertence à reta *r*. Logo a equação de *r* é dada por:

$$y - y_0 = m_r(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow -3y + 9 = x - 1$$

$$\boxed{r:\ 3y + x - 10 = 0}$$

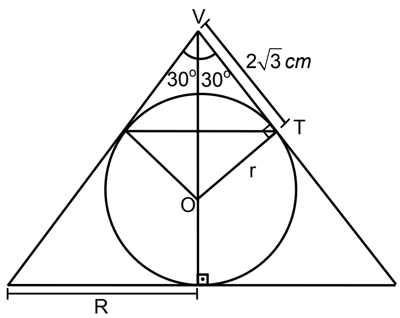
QUESTÃO 19

Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}cm$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

a) $\frac{416}{9}\pi$ b) $\frac{480}{9}\pi$ c) $\frac{500}{9}\pi$ d) $\frac{512}{9}\pi$ e) $\frac{542}{9}\pi$

Resolução **Alternativa A**

Fazendo um corte vertical através da seção meridiana do cone, temos a seguinte figura:



Interpretando como ângulo do vértice como sendo o ângulo planificado e indicado na figura, temos que o triângulo é eqüilátero, pois a geratriz do cone indica que tal triângulo é isósceles com o ângulo desigual valendo 60º. Sendo O o centro da esfera de raio r e observando o triângulo TVO, temos:

$$\text{tg}30^\circ = \frac{r}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{2\sqrt{3}} \Rightarrow r = 2cm .$$

Considerando que a altura do cone é 8 cm e sendo R o raio de sua base, temos: $tg30^\circ = \frac{R}{8} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3} cm$.

Portanto, o volume pedido é: $V_{cone} - V_{esfera} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h_{cone} - \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2.8 - \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{512\pi}{9} - \frac{32\pi}{3} = \frac{512\pi}{9} - \frac{96\pi}{9} = \boxed{\frac{416\pi}{9} cm^3}$$

QUESTÃO 20

Os pontos $A = (3,4)$ e $B = (4,3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

a) $\sqrt{8}$ b) 3 c) $\sqrt{12}$ d) 4 e) $\sqrt{18}$

Resolução **Sem resposta**

Um cubo é uma figura tridimensional, de modo que apresentar seus vértices utilizando apenas um sistema com duas coordenadas torna o enunciado incompleto. Assim, sendo **a** a medida da aresta do cubo e assumindo que a coordenada não informada é z, temos:

$$a = \sqrt{(3-4)^2 + (4-3)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Assim, **sem a informação da terceira coordenada dos pontos dados, fica impossível resolver a questão**.

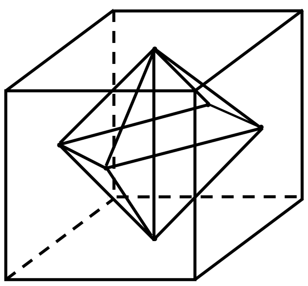
Além disso, a noção de ponto médio é associada a um segmento de reta, de modo que ao invés de "ponto médio da face" seria mais apropriado usar o termo "centro da face".

NOTA:

Assumindo que a coordenada não informada seria igual nos dois pontos, teríamos:

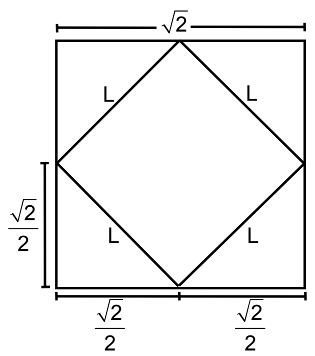
$$a = \sqrt{(3-4)^2 + (4-3)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (4-3)^2 + 0} = \sqrt{2}$$

Deste modo, considere a figura abaixo, que representa um octaedro inscrito num cubo:



Observe que esse octaedro é simétrico em relação às faces, de modo que cada uma das suas faces laterais é um triângulo eqüilátero.

Traçando um plano paralelo às bases do cubo e que passa pelo seu centro, temos:



Note que, na figura, L representa a aresta lateral do octaedro. Desse modo, temos $L = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Assim, a área da superfície lateral desse octaedro é dada pela área de oito triângulos eqüiláteros de lado 1, ou seja:

$$\text{área} = 8.\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 8.\frac{1^2.\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{12}}$$

Note que se $z_A \neq z_B$, teríamos a área do octaedro superior a $\sqrt{12}$.

QUESTÃO 21

Seja S o conjunto solução da inequação $(x-9)\left|\log_{x+4}(x^3 - 26x)\right| \leq 0$.

Determine o conjunto S^C.

Resolução

Como $\left|\log_{x+4}(x^3-26x)\right| \geq 0$ para qualquer x no qual o logaritmo esteja definido, o conjunto S pode ser obtido pela interseção dos quatro seguintes conjuntos:

1) $x^3 - 26x > 0 \Rightarrow -\sqrt{26} < x < 0$ ou $x > \sqrt{26}$
2) $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$
3) $x + 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$
4) $x - 9 \leq 0 \Rightarrow x \leq 9$

Ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0 \text{ e } x \neq -3\} \cup \{\sqrt{26} < x \leq 9\}$. (i)

Os únicos valores possíveis para *x* em S fora do intervalo definido em (i) seriam aqueles onde:

$$x - 9 > 0 \text{ e } \log_{(x+4)} x^3 - 26x = 0 \Rightarrow x^3 - 26x = 1.$$

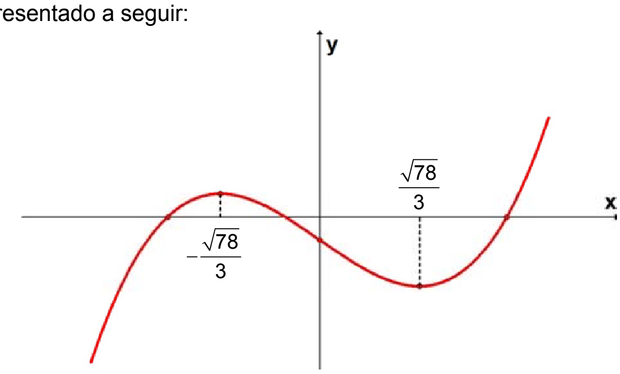
Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 26x - 1$. Derivando esse polinômio e igualando a zero, temos:

$$p(x) = x^3 - 26x - 1 \Rightarrow p'(x) = 3x^2 - 26.$$

Igualando a derivada a zero, temos:

$$3x^2 - 26 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{78}}{3}$$

Assim, os pontos críticos desse polinômio são $x = \pm\frac{\sqrt{78}}{3}$. Aplicando o teorema de Bolzano, temos que o gráfico de p(x) é crescente nos intervalos $x < -\frac{\sqrt{78}}{3}$ e $x > \frac{\sqrt{78}}{3}$. O gráfico da função p(x) está representado a seguir:



Assim, como $9 > \frac{\sqrt{78}}{3}$, temos que se x > 9 então p(x) > p(9), ou seja, p(x) > 494. Desse modo, p(x) não possui raízes para x > 9, de modo que é impossível que tenhamos ao mesmo tempo x > 9 e $x^3 - 26x = 1$.

Sendo assim, $\log_{(x+4)} x^3 - 26x = 0$ só ocorre para valores de x menores do que 9, já computados em *(i)*, o que nos leva a:

$$\boxed{S^C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } 0 \leq x \leq \sqrt{26} \text{ ou } x > 9\}}$$

QUESTÃO 22

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in C$$

Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \text{Re } w \leq -13 \text{ e } \text{Im } w \leq 4\}.$$

Resolução

O número complexo *w* pode ser reescrito como:

$$w = x^2 + 3x^2 i + 4y^2 - y^2 i - 2x - 6xi - 16y + 4yi$$

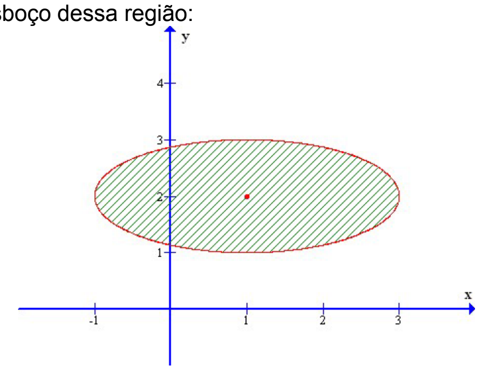
$$w = \underbrace{x^2 + 4y^2 - 2x - 16y}_{\text{Re}(w)} + \underbrace{(3x^2 - y^2 - 6x + 4y)}_{\text{Im}(w)} i$$

Temos: $\text{Re}(w) \leq -13 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 2x - 16y \leq -13 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 16y + 16 \leq -13 + 1 + 16 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + 4.(y-2)^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 \leq 1$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma elipse com centro $C(1,2)$, eixo maior igual a 4 e eixo menor igual a 2.
Veja um esboço dessa região:



Ainda:

$$\text{Im}(w) \le 4 \Rightarrow \; 3x^2 - y^2 - 6x + 4y \le 4 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 6x + 3 - \left(y^2 - 4y + 4\right) \le 4 + 3 - 4 \Rightarrow \; 3.\left(x-1\right)^2 - \left(y-2\right)^2 \le 3 \Rightarrow$$

$$\left(x-1\right)^2 - \frac{\left(y-2\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \le 1$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma hipérbole com centro $C(1,2)$ e eixo real igual a 2. Vamos determinar as equações das assíntotas da hipérbole. Elas são dadas por:

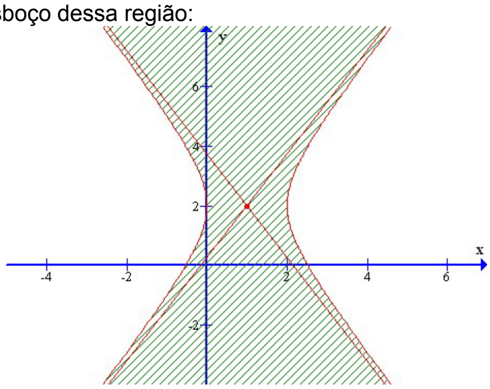
$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}.\left(x - x_0\right),$$

onde $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$.
Então:

$$y - 2 = \pm\sqrt{3}.\left(x-1\right)$$

$$y = \sqrt{3}.x - \sqrt{3} + 2 \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{3}.x + \sqrt{3} + 2$$

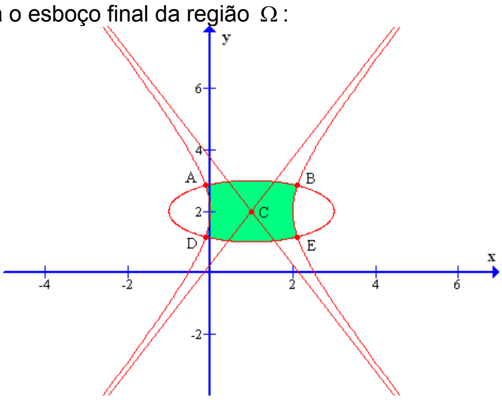
Veja um esboço dessa região:



Os pontos de intersecção da elipse com a hipérbole podem ser calculados resolvendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x-1\right)^2}{2^2} + \left(y-2\right)^2 = 1 \\ \left(x-1\right)^2 - \dfrac{\left(y-2\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pm 4\sqrt{13}+13}{13} \quad \text{e} \quad y = \frac{\pm 3\sqrt{13}+26}{13}$$

Veja agora o esboço final da região Ω:



Onde:

$A\left(\dfrac{-4\sqrt{13}+13}{13}, \dfrac{3\sqrt{13}+26}{13}\right)$, $B\left(\dfrac{4\sqrt{13}+13}{13}, \dfrac{3\sqrt{13}+26}{13}\right)$, $C(1,2)$, $D\left(\dfrac{-4\sqrt{13}+13}{13}, \dfrac{-3\sqrt{13}+26}{13}\right)$ e $E\left(\dfrac{4\sqrt{13}+13}{13}, \dfrac{-3\sqrt{13}+26}{13}\right)$.

QUESTÃO 23

Seja $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

a) Mostre que f é injetora.
b) Determine $D = \left\{f(x); x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$ e $f^{-1} : D \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Resolução

a) Reescrevendo a função *f*, para $x \ne -1$, temos:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2\cdot(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Para mostrar que a função é injetora, sejam $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tais que $f(a) = f(b)$. Temos:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2 + \frac{1}{a+1} = 2 + \frac{1}{b+1} \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{b+1} \Rightarrow a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$$

Assim, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, o que demonstra que a função *f* é injetora.

b) O conjunto $D = \left\{f(x); x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$ é o conjunto imagem da função *f*, isto é, o subconjunto formado pelos elementos $y \in \mathbb{R}$ que efetivamente são atingidos por algum elemento $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Em outras palavras, $y \in D \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tal que $f(x) = y$. Assim:

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{2x+3}{x+1} = y \Rightarrow 2x + 3 = y\cdot x + y \Rightarrow (y-2)\cdot x = 3 - y$$

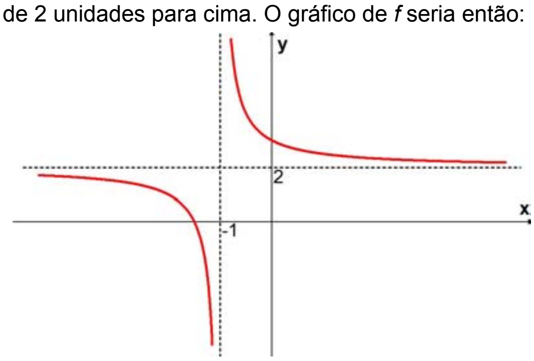
Observe que na equação acima, se $y = 2$, temos $0\cdot x = -1$, equação incompatível. Já para $y \ne 2$, podemos escrever $x = \dfrac{3-y}{y-2}$. Isto é, se $y \ne 2$, então $f\left(\dfrac{3-y}{y-2}\right) = y$. Logo, o conjunto imagem da função *f* é:

$$\boxed{D = \mathbb{R}\setminus\{2\}}$$

Restringindo então a função *f* a esse contradomínio *D*, temos uma função simultaneamente injetora e sobrejetora, portanto bijetora, que admite uma função inversa $f^{-1} : D \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. E essa função inversa satisfaz: $f \circ f^{-1}(x) = x$, para cada $x \in D$. Assim, temos:

$$f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow 2 + \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = x \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}}$$

RESOLUÇÃO ALTERNATIVA: Partindo da função $h(x) = \dfrac{1}{x}$, cujo gráfico é uma hipérbole, inicialmente fazemos a composta $h(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$, que corresponde a deslocar o gráfico de h de 1 unidade para a esquerda. Posteriormente, fazemos $h(x+1) + 2 = \dfrac{1}{x+1} + 2$, que corresponde a deslocar o gráfico de $h(x+1)$ de 2 unidades para cima. O gráfico de *f* seria então:



Pelo gráfico, fica claro que não existe nenhum valor de *y* atingido mais do que uma vez, isto é, sendo imagem simultânea de dois valores distintos de *x*, o que é equivalente a dizer que a função *f* é injetora.

Além disso, o único ponto que não será atingido no eixo das ordenadas (eixo y) é o 2. Conseqüentemente, o conjunto imagem da função *f* é $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Finalmente, fazendo a restrição do contradomínio ao conjunto *D*, a função *f* passa a ser uma função bijetora e, portanto, admite inversa. Vamos aplicar o procedimento prático para obter a tal inversa, fazendo $f(x)=y$, trocando as letras *x* e *y* de lugar, e isolando *y*:

$$f(x)=y\Rightarrow\frac{2x+3}{x+1}=y\Rightarrow\frac{2y+3}{y+1}=x\Rightarrow 2y+3=y\cdot x+x\Rightarrow$$

$$(x-2)\cdot y=3-x\Rightarrow y=\frac{3-x}{x-2}\quad(x\neq 2)\Rightarrow\boxed{f^{-1}(x)=\frac{3-x}{x-2}}$$

QUESTÃO 24

Suponha que a equação algébrica

$$x^{11}+\sum_{n=1}^{10}a_nx^n+a_0=0$$

tenha coeficientes reais $a_0,a_1,...,a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta+i\gamma_n$, em que β, $\gamma_n\in\mathbb{R}$ e os γ_n, $n=1,2,...,11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma\neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta=0$, então $a_0=0$.

II. Se $a_{10}=0$, então $\beta=0$.

III. Se $\beta=0$, então $a_1=0$.

Resolução

Como (γ_n) é uma progressão aritmética de razão $\gamma\neq 0$ com onze termos e os números $\beta+i.\gamma_n$ são raízes de um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais, temos como conseqüências:

1) os números $\beta+i.\gamma_n$ formam uma progressão aritmética de razão $\gamma\neq 0$

2) aplicando o teorema das raízes conjugadas temos que uma das raízes é um número real, de modo que existe algum valor de n, $1\leq n\leq 11$, para o qual $\gamma_n=0$. Além disso, se o número $\beta+i.\gamma_n$ é raiz então $\beta-i.\gamma_n$ também é raiz.

Desse modo as raízes desse polinômio são dadas pela seguinte seqüência:

$(\beta-5\gamma i;\beta-4\gamma i;\beta-3\gamma i;\beta-2\gamma i;\beta-\gamma i;\beta;\beta+\gamma i;\beta+2\gamma i;\beta+3\gamma i;\beta+4\gamma i;\beta+5\gamma i)$

Analisando agora cada uma das afirmações:

Afirmação I: VERDADEIRA

Se $\beta=0$ então uma das raízes é nula (o sexto termo da PA), de modo que o produto das raízes também é nulo. Assim, aplicando as relações de Girard:

$$\text{produto}=-\frac{a_0}{1}=0\Rightarrow a_0=0$$

Afirmação II: VERDADEIRA

Se $a_{10}=0$ temos, aplicando as relações de Girard, que a soma das raízes é nula. Como a soma das raízes é dada pela soma dos termos da PA, temos:

$$\text{soma}=\frac{(\beta-5\gamma i+\beta+5\gamma i).11}{2}=0\Leftrightarrow 11.\beta=0\Leftrightarrow\beta=0$$

Afirmação III: FALSA

Se $\beta=0$ uma das raízes é nula. Assim, suponha que $a_1=0$. Nesse caso, aplicando a relação de Girard para a soma dos produtos das raízes tomadas dez a dez, temos que esse produto é justamente o produto das dez raízes restantes:

$$P_{10\text{ a }10}=\frac{a_1}{1}=0\Leftrightarrow(-5\gamma)(-4\gamma)(-3\gamma)(-2\gamma)(-\gamma)(\gamma)(2\gamma)(3\gamma)(4\gamma)(5\gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow\gamma=0$$

Como $\gamma\neq 0$, temos um absurdo. Desse modo, $a_1\neq 0$.

QUESTÃO 25

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Resolução

Se no mínimo 4 deles dentre 6 conseguem a nota mínima, temos três possibilidades:

1) 4 conseguem e 2 não

2) 5 conseguem e 1 não

3) 6 conseguem

Aplicando a lei binomial das probabilidades, temos que a probabilidade pedida é dada por:

$$p=C_{6,4}.(20\%)^4.(80\%)^2+C_{6,5}.(20\%)^5.80\%+C_{6,6}.(20\%)^6.(80\%)^0$$

$$p=\frac{15360+1534+64}{1000000}\Leftrightarrow p=\frac{53}{3125}$$

QUESTÃO 26

Sejam $A,B\in M_{3x3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X\in M_{3x1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A=\det B=0$

Resolução

a) Considere as matrizes $A\in M_{3x3}(\mathbb{R})$ e $X\in M_{3x1}(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\text{ e }X=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}$$

Se AX é a matriz coluna nula:

$$A.X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Desse modo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases}a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}=0\\a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}=0\\a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31}=0\end{cases}$$

A matriz A é fixa e o resultado acima é válido para qualquer matriz X escolhida. Tomando como possíveis valores de X as matrizes:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ e }\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{, temos:}$$

$$1)\ X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+a_{12}.0+a_{13}.0=0\\a_{21}+a_{22}.0+a_{23}.0=0\\a_{31}+a_{32}.0+a_{33}.0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}=0\\a_{21}=0\\a_{31}=0\end{cases}$$

$$2)\ X=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}.0+a_{12}+a_{13}.0=0\\a_{21}.0+a_{22}+a_{23}.0=0\\a_{31}.0+a_{32}+a_{33}.0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{12}=0\\a_{22}=0\\a_{32}=0\end{cases}$$

$$3)\ X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}.0+a_{12}.0+a_{13}=0\\a_{21}.0+a_{22}.0+a_{23}=0\\a_{31}.0+a_{32}.0+a_{33}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{13}=0\\a_{23}=0\\a_{33}=0\end{cases}$$

Desse modo, temos $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

b) Do enunciado temos que A e B são matrizes não-nulas com AB = 0. Por absurdo, vamos supor que $\det A\neq 0$. Nesse caso, a matriz A é inversível, e podemos multiplicar pela esquerda ambos os membros da equação acima pela matriz inversa de A. Assim:

$$A.B=0\Rightarrow A^{-1}.A.B=A^{-1}.0\Leftrightarrow B=0$$

Como $B\neq 0$ temos um absurdo, de modo que $\boxed{\det A=0}$.

Aplicando o mesmo raciocínio para a matriz B, encontramos que $\boxed{\det B=0}$.

QUESTÃO 27

Sabendo que $tg^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$, para algum $x\in\left[0,\frac{1}{2}\pi\right]$, determine $sen\ x$.

Resolução

Usando $tg^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$, temos que $\text{tg}\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Note que $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$

Analisando tais valores e usando o fato de que a função tangente é crescente nos intervalos $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ temos:

1) Para $\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow tg\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)>tg\frac{\pi}{6}\Rightarrow x+\frac{1}{6}\pi>\frac{\pi}{6}.$$

2) Para $\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, temos:

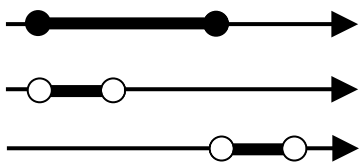
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}>-\sqrt{3}\Rightarrow tg\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)>tg\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x+\frac{1}{6}\pi>\frac{2\pi}{3}$$

Desta forma:

$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$

1) $\frac{\pi}{6}<x+\frac{1}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$

2) $\frac{2\pi}{3}<x+\frac{1}{6}\pi<\pi$



Com isso, $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim,

$$\frac{\text{sen}\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)}=+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right).$$

Usando a relação fundamental e sabendo que $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$ temos que:

$$sen\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-sen^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)}\Rightarrow sen^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{3}$$

Desta forma

$$\text{sen}\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ e }\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Logo, podemos calcular sen x por:

$$sen\,x=sen\left[\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)-\frac{1}{6}\pi\right]$$

$$sen\,x=sen\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)-sen\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$sen\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$

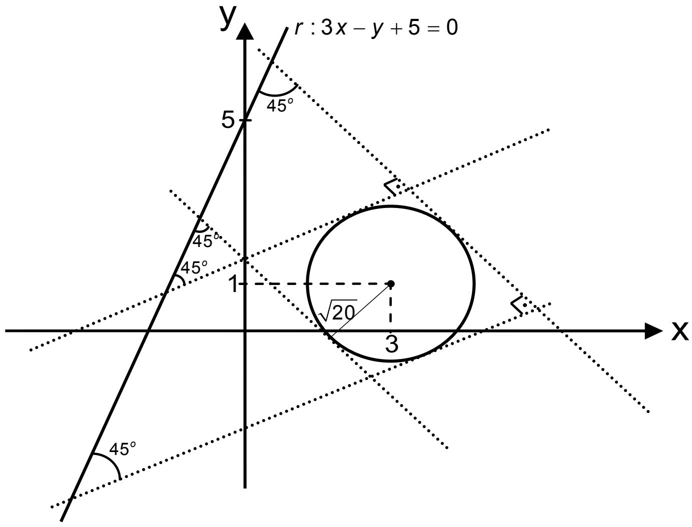
$$\boxed{sen\,x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

QUESTÃO 28

Dada a circunferência $C:(x-3)^2+(y-1)^2=20$ e a reta $r:3x-y+5=0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

Resolução

A partir do enunciado, esboçaremos a circunferência C, a reta r e as possíveis retas t:



Da equação de (r) y = 3x + 5, temos que seu coeficiente angular é 3.

Como $\text{tg}\theta=\left|\frac{m_r-m_t}{1+m_r.m_t}\right|$, onde θ é o ângulo formado entre as retas, m_r e m_t são os coeficientes angulares de tais retas, temos:

$$tg45^o=\left|\frac{m_r-m_t}{1+m_r.m_t}\right|\Rightarrow 1=\left|\frac{m_r-m_t}{1+m_r.m_t}\right|\Rightarrow|1+3m_t|=|3-m_t|\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}1+3m_t=3-m_t\\ \quad ou\\ 1+3m_t=-(3-m_t)\end{array}\right.\Rightarrow m_t=\frac{1}{2}\ ou\ m_t=-2.$$

Assim:

1) Se $m_t=\frac{1}{2}$, podemos construir o feixe de retas com tal coeficiente: $y=\frac{1}{2}x+n\Rightarrow -x+2y+k=0$;

2) Se $m_t=-2$, podemos construir o feixe de retas com tal coeficiente: $y=-2x+n\Rightarrow 2x+y+k=0$.

Por hipótese, a distância de tais retas à origem do sistema é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Logo,

$$\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}\Rightarrow|k|=3\Rightarrow k=3\ ou\ k=-3$$

Com isso, as equações são:
(I) – x +2y + 3 = 0
(II) – x +2y – 3 = 0
(III) 2x + y + 3 = 0
(IV) 2x + y – 3 = 0.

Como a reta deve ser tangente à circunferência, a distância entre a reta e o centro da circunferência é o raio dessa circunferência.

Em C, o raio é $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ e o centro é (3,1).

Assim, temos que as distâncias de cada uma das possíveis retas ao centro da circunferência são dadas por:

(I) $\frac{|-3+2+3|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ne2\sqrt{5}$

(II) $\frac{|-3+2-3|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\ne2\sqrt{5}$

(III) $\frac{|6+1+3|}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

(IV) $\frac{|6+1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\ne2\sqrt{5}$

Portanto, a reta que satisfaz as condições do enunciado é da forma:

$\boxed{2x+y+3=0}$

QUESTÃO 29

Considere as n retas

$$r_i : y = m_i x + 10\ ,\ i = 1,2,\dots,n; n \geq 5\ ,$$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Resolução

Pelo enunciado temos que os coeficientes m_i formam uma progressão aritmética de razão q > 0, de modo que, aplicando a fórmula do termo geral:

$$m_5 = m_0 + (5-1)\cdot q = 0 + 4\cdot q = 4q$$

Assim, a equação da reta r_5 é dada por é $y = 4q\cdot x + 10$.

Como essa reta tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ temos, substituindo a equação da reta na circunferência:

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + (4qx + 10)^2 = 25 \Leftrightarrow (1 + 16q^2)x + 80qx + 75 = 0$$

Como a reta r_5 é tangente, segue que o discriminante da última equação é nulo. Desse modo:

$$\Delta = (80q)^2 - 4.(1 + 16q^2).75 = 0 \Leftrightarrow 1600q^2 - 300 = 0$$

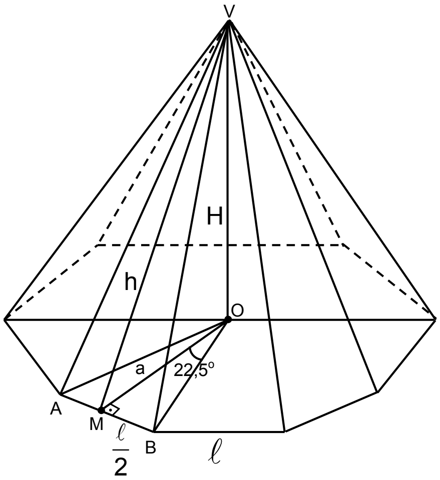
Assim, temos $q^2 = \dfrac{300}{1600} \Leftrightarrow q = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Como q > 0, segue $q = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

QUESTÃO 30

A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida *a* do apótema da base.

Resolução

Vamos usar a seguinte pirâmide octogonal regular como referência:



O volume solicitado é $V_{PIRÂMIDE} = \dfrac{1}{3}.A_B.H$, onde A_B é a área do octógono que forma a base da pirâmide e H a altura da pirâmide.

Por hipótese, $\dfrac{A_L}{A_B} = \sqrt{5} \Rightarrow A_L = \sqrt{5}A_B$ **(I)**;

A área lateral é 8 vezes a área do triângulo que forma a face lateral.

Assim, $A_L = 8\cdot\dfrac{1}{2}.\ell.h = 4.\ell.h$, onde ℓ é o lado do octógono da base e h é a altura desse triângulo.

A área da base é a área do octógono, que é 8 vezes a área do triângulo ABO, da figura.

Assim, $A_B = 8.\dfrac{1}{2}.\ell.a = 4a.\ell$ **(II)**;

Portanto, $4\cdot\ell\cdot h = \sqrt{5}\cdot 4\cdot a\cdot\ell \Rightarrow h = \sqrt{5}\cdot a$ **(III)**;

Usando Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$h^2 = H^2 + a^2 \Rightarrow H^2 = h^2 - a^2$. Substituindo **(III)** no resultado encontrado, vem**:**

$$H^2 = 4a^2 \Rightarrow H = 2a\ \textbf{(IV)};$$

Para calcular a área da base, note que o ângulo $M\hat{O}B$ é dado por:

$$M\hat{O}B = \frac{360^\circ/8}{2} = 22{,}5^\circ$$

No triângulo MOB, temos: $tg22{,}5^\circ = \dfrac{\ell}{2a}$.

Sabendo que $tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, temos que:

$$tg22{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}}.$$

Logo, $tg22{,}5^\circ = \sqrt{\dfrac{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}\right)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2(\sqrt{2}-1)^2}{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Com isso, temos:

$$\ell = 2a.\ (\sqrt{2} - 1)\ \textbf{(V)}.$$

Portanto:

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}.4.a.2a.\left(\sqrt{2}-1\right)2a = \frac{16}{3}a^3\left(\sqrt{2}-1\right).$$