ENUNCIADOS – ITA 2008

TESTES

01. Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{5}{4}$

02. Sejam $\alpha\ \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a:

a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

03. Considere o sistema Ax = b, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T – S é:

a) – 4 b) – 3 c) 0 d) 1 e) 4

04. Sejam A e C matrizes n x n inversíveis que det $(I + C^{-1}a) = 1/3$ e det A = 5. Sabendo-se que $B = 3\ (A^{-3} + C^{-1})$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2.\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5\ .\ 3^{n-1}$

05. Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de um menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 63, então o de maior grau tem grau igual a:

a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

06. Um diedro mede 120º. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\ \pi$ cm^3 que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a:

a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

07. Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, eqüidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica , então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a) $15 + 5\sqrt{5}$ b) $10 + 5\sqrt{5}$ c) $10 - \sqrt{5}$ d) $15 - 5\sqrt{5}$ e) $10 - 3\sqrt{5}$

08. Considere o polinômio $p(x)\ a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é x = -1. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3 a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = ½$, então *p(-2)* é igual a:

a) – 25 b) – 27 c) – 36 d) – 39 e) – 40

09. Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e ½-*i*/2 também é sua raiz. Então, o Maximo de *a, b, c* é igual a:

a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10. É dada a equação polinomial

$(a + c + 2)\ x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$

Com *a, b, c* reais, sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto *abc* é igual a:

a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

ENUNCIADOS – ITA 2008

11. Sendo [-π/2, π/2] o contradomínio da função arcoseno e [0,π] o contradomínio da função arcosseno, assinale o valor de:
$\cos\left(\text{arsen}\frac{3}{5}+\text{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

12. Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular a λ no ponto P = $(2,\sqrt{3})$?

a) y = $\sqrt{3}$ (x-1) b) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ c) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

d) y = $\frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$ e) y = $\frac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

13. O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\ \text{sen}^2(3x) + \text{sem}(6x) - 1$ são,
Respectivamente,

a) [-3,3] e 2π b) [-2,2] e $\frac{2\pi}{3}$ c) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) [-1,3] e $\frac{\pi}{3}$ e) [-1,3] e $\frac{2\pi}{3}$

14. Para X ∈ ℝ, o conjunto solução $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é:

a) $\{0, 2\pm\sqrt{5}, 2\pm\sqrt{3}\}$ b) $\{0, 1, \log_5(2+\sqrt{5})\}$

c) $\left\{0, \frac{1}{2}\log_2 2, \frac{1}{2}\log_2 3, \log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ d) $\{0, \log_5(2+\sqrt{5}), \log_5(2+\sqrt{3}), \log_5(2-\sqrt{3})\}$

e) A única solução é x = 0.

15. Um subconjunto D de ℝ tal que a função *f : D R,* definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

a) ℝ b) (- ∞, 1] c) [0,1/2] d) (0,1) e) [1/2, ∞)

16. A soma de todas as soluções distintas da equação
Cos 3x + 2 xos6x + cos 9x = 0,

Que estão no intervalo 0 ≤ x ≤ π/2, é igual a:

a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$ c) $\frac{9}{6}\pi$ d) $\frac{7}{6}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

17. Considere o conjunto D = {n ∈ N; 1 ≤ n ≤ 365} e H ⊂ P (D) formado por todos os subconjunto de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento B ∈ H, a probabilidade de a soma de sues elementos ser 183 é igual a

a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$ d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

18. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, BÂC, mede 40º. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que A $A\hat{C}E = 15º$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35º$ Então, o ângulo $E\hat{D}C$ vale:

a) 35º b) 45º c) 55º d) 75º e) 85º

19. Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de N tais que (x – Y) ∩ Z = {1, 2, 3, 4}, Y = {5, 6}, Z ∩ Y = ∅, W ∩ W ∩ Z = {2, 4}. Então o conjunto [X ∩ (Z ∪ W)] – [W ∩ (Y ∪ Z)] é igual a:

A) {1, 2, 3, 4, 5} b) {1, 2, 3, 4, 7} c) {1, 3, 7, 8}

d) {1, 3} e) {7, 8}

ENUNCIADOS – ITA 2008

20. Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja *P* um ponto no plano definido por *r* e *s* e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de *r.* As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo eqüilátero *PQR* cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, são iguais a:

a) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$
b) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$
c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$
d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$
e) 700 e $10\sqrt{21}$

DISSERTATIVAS

21. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2+2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

22. Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma *a+bi*, com $a,b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z+2| < 3\}.$$

23. Seja $f(x) = \ln(x^2+x+1), x \in \mathbb{R}$. Determine as funções *h, g :* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que *f(x)=g(x) + h(x),* $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo *h* uma função par e *g* uma função impar.

24. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio *p(x)* dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$$

Encontre todos os valores de α, β, γ de modo que x=o seja uma raiz com multiplicidade 3 de *p(x).*

25. Uma matriz real quadrada *A* é ortogonal se *A* é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2 x 2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

26. Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[3]{4}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

admita raízes reais simples.

27. Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos *A,B* e *C* tais que: *P(A)=P(B)=1/2*, com *A* e *B* independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^C)$.

28. Um triângulo acutângulo de vértices *A, B* e *C* está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo *ABC.*

29. Seja *C* uma circunferência de raio *r* e centro *O* e $\overline{AB}$ um diâmetro de *C.* Considere o triângulo eqüilátero *BDE* inscrito em *C*. Traça-se a reta *s* passando pelos pontos *O* e *E* até interceptar em *F* a reta *t* tangente à circunferência *C* no ponto *A*. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\widehat{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

30. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2,5), (-1,2) e tal que *a,b,c* formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2,5).