ELITE PRÉ-VESTIBULAR

campinas

ELITE RESOLVE

ITA

MATEMÁTICA

2008

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251-1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

Resolução — Alternativa A

Do enunciado podemos deduzir as seguintes probabilidades:

- de ser selecionada uma mulher daltônica:

$$P(M \cap D) = 0,5.0,25\% = 0,125\%;$$

- de ser selecionado um homem daltônico:

$$P(H \cap D) = 0,5.5\% = 2,5\%;$$

- de ser selecionado um daltônico qualquer:

$$P(D) = P(M \cap D) + P(H \cap D) = 0,125\% + 2,5\% = 2,625\%$$

Portanto, a probabilidade de ser mulher, sendo daltônico é

$$\boxed{P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0,125}{2,625} = \frac{1}{21}}.$$

QUESTÃO 02

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) $2i$

Resolução — Alternativa B

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$, então podemos escrever α e β na forma trigonométrica como:

$$\alpha = \cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1$$
$$\beta = \cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2$$

Como $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$, então:

$$|\alpha - \beta| = |\cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1 - (\cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$|(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(sen\theta_1 - sen\theta_2)|^2 = (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 + (sen\theta_1 - sen\theta_2)^2$$

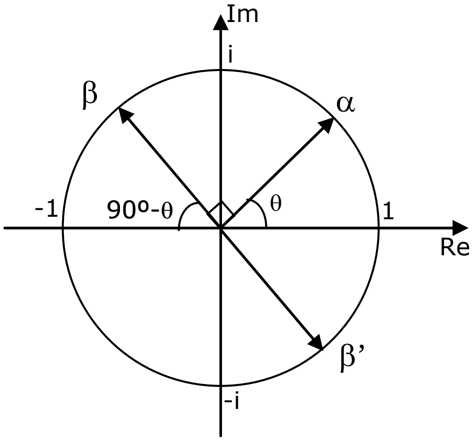
$$= \cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2 - 2 \cdot (\cos\theta_1\cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot (\cos\theta_1\cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) = 2$$

Logo $(\cos\theta_1\cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) = 0$, ou seja, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

Daí segue que $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para determinado α e dois possíveis valores para β (onde β = - β') conforme ilustrado na figura a seguir no plano de Argand-Gauss, temos a seguinte representação:



Da figura, temos:

$\alpha^2 + (\pm\beta)^2 = [\cos\theta + i \cdot sen\theta]^2 + [-\cos(90º-\theta) + i \cdot sen(90º-\theta)]^2$

Como $\cos(90º-\theta) = sen\theta$ e $sen(90º-\theta) = \cos\theta$, então:

$\alpha^2 + \beta^2 = [\cos\theta + i \cdot sen\theta]^2 + [-sen\theta + i \cdot \cos\theta]^2 =$

$(\cos^2\theta + 2i sen\theta\cos\theta - sen^2\theta) + (sen^2\theta - 2i sen\theta\cos\theta - \cos^2\theta) = 0$

QUESTÃO 03

Considere o sistema Ax=b, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T-S é

a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

Resolução — Alternativa A

Calculando o determinante *D* da matriz formada pelos coeficientes das variáveis, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-3) + 12 + 18 - [-3k + 18 - 4(k-3)] = k^2 + 4k$$

Pela Regra de Cramer, o sistema será SPI ou SI se, e somente se, D=0.

Logo, $k^2+4k=0 \Leftrightarrow k=0$ ou $k=-4$.

Se k=0, o sistema fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 6 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (I) \\ x + 3z = 3 & (II) \\ -x + 3y - 3z = 0 & (III) \end{cases}$$

Subtraindo (II) de (I), temos y=1

Substituindo, temos: $\begin{cases} x + 3z = 3 \\ x + 3z = 3 \\ -x - 3z = -3 \end{cases}$

Note que as linhas se equivalem, isto é, para k=0, o sistema é possível e indeterminado.

Para k=-4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 6 \\ -x + 3y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ -x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

Comparando-se a primeira e a segunda equação, verifica-se que o sistema com k=-4 é impossível.

Assim: T=-4 e S=0

Portanto, $\boxed{T-S=-4}$

QUESTÃO 04

Sejam *A* e *C* matrizes *n* x *n* inversíveis tais que $det(I+C^{-1}A)=1/3$ e $detA=5$. Sabendo-se que $B=3(A^{-1}+C^{-1})^t$, então o determinante de *B* é igual a

a) 3^n b) $2.\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) 5.3^{n-1}

Resolução — Alternativa D

Como $B = 3 \cdot (A^{-1} + C^{-1})^t$, temos que, multiplicando por A^t pela esquerda os dois membros:

$$A^t.B = A^t \cdot 3(A^{-1} + C^{-1})^t = 3[(A^{-1} + C^{-1}).A]^t = 3(A^{-1}.A + C^{-1}.A)^t \Rightarrow$$

$$A^t.B = 3(I + C^{-1}A)^t$$

Calculando a determinante dos dois membros, temos:

$$\det[3(I + C^{-1}A)^t] = \det(A^t \cdot B)$$

Pelo teorema de Binet, ainda levando em consideração que as matrizes são n x n temos:

$$\det(A^t) \cdot \det(B) = \det[3 \cdot (I + C^{-1} \cdot A)]^t$$

$$\det(A^t) \cdot \det(B) = 3^n \det[(I + C^{-1} \cdot A)]^t$$

Como $\det M = \det M^t$ temos, substituindo os valores das determinantes do enunciado:

$$\boxed{5 \cdot \det(B) = 3^n \frac{1}{3} \Rightarrow \det(B) = \frac{3^{n-1}}{5}}$$

QUESTÃO 05

Um polinômio *P* é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de *P* é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

Resolução Alternativa B

Como p é o produto de 5 polinômios, escrevemos:

$$p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x).p_4(x).p_5(x)$$

Seja n_k o grau de p_k e n o grau de p. Assim, podemos escrever

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 62.$$

Pelo enunciado, temos que os graus n_k estão em progressão geométrica de primeiro termo $n_1 = 2$. Chamando de q a razão dessa progressão, temos que a soma dos cinco graus pode ser escrita como

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 62 = S_5 = \frac{2(q^5 - 1)}{q - 1} \Rightarrow q^5 - 31q + 30 = 0$$

Observe que a equação anterior implica em $q \neq 1$. Como o grau de um polinômio sempre é um número natural, temos que a razão q deve ser um número natural. Como o polinômio em q tem coeficientes inteiros, segue pelo teorema das raízes racionais que q deve ser um divisor positivo de 30, com $q \neq 1$. Assim q pode ser 2, 3, 5, 6, 10, 15 ou 30. Por inspeção, encontramos q = 2 como solução.

Assim temos a PG: $(2,4,8,16,32)$. Desse modo, o maior grau é $n_5 = 32$.

Solução alternativa:

Os graus n_k estão em progressão geométrica de primeiro termo $n_1 = 2$; e a razão, q, deve ser um número inteiro maior que 1. Assim, testando os possíveis valores teremos que, se $q = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62 \Rightarrow n_5 = 32$.

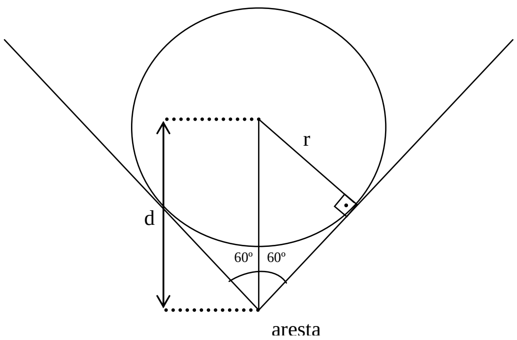
QUESTÃO 06

Um diedro mede 120º. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

Resolução Alternativa E

Fazendo uma seção perpendicular à aresta, temos:



Da trigonometria: $\frac{r}{d} = sen60° \Rightarrow d = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

Pelo volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\sqrt{3}\pi \Rightarrow r^3 = 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

Substituindo na primeira equação, temos: d= $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ =2

QUESTÃO 07

Considere o quadrado *ABCD* com lados de 10 m de comprimento. Seja *M* um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e *N* um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, eqüidistantes de *A*. Por *M* traça-se uma reta *r* paralela ao lado $\overline{AD}$ e por *N* uma reta *s* paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto *O*. Considere os quadrados *AMON* e *OPCQ*, onde *P* é a intersecção de *s* com o lado $\overline{BC}$ e *Q* é a intersecção de *r* com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados *AMON*, *OPCQ* e *ABCD* constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos *A* e *M* é igual, em metros, a

a) $15 + 5\sqrt{5}$

b) $10 + 5\sqrt{5}$

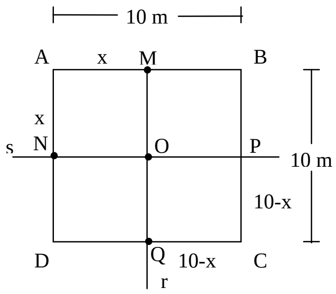
c) $10 - \sqrt{5}$

d) $15 - 5\sqrt{5}$

e) $10 - 3\sqrt{5}$

Resolução Alternativa D

Observe a figura:



I) Área de Δ AMON = x^2

II) Área de Δ OPCQ = $(10\text{-}x)^2$

III) Área de Δ ABCD = 100

IV) Por ser P.G., temos:

$$\frac{(10 - x)^2}{x^2} = \frac{100}{(10 - x)^2} \Rightarrow 100x^2 = (10 - x)^4$$

Como x > 0, então, tirando-se a raiz quadrada dos dois lados da equação acima, obtém-se: $10x = (10 - x)^2$, logo:

$$X^2\text{-}30x\text{+}100\text{=}0 \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{500}}{2} \Rightarrow$$

$$x = 15 \pm 5\sqrt{5}.$$

Como x é tal que: 0<x<10, então $\boxed{x = 15 - 5\sqrt{5}}$

QUESTÃO 08

Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é x = -1. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3 a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com a_4 = ½, então *p(-2)* é igual a:

a) – 25 b) – 27 c) – 36 d) – 39 e) – 40

Resolução Alternativa A

Por hipótese, se x = -1 é raiz, temos:

$p(-1)=0 \Rightarrow -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1=0 \Rightarrow$

$a_4 + a_2 = a_1 + a_3 + a_5$ (I)

Como a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 estão em PA e a_4=1/2, temos:

$a_3 + a_5 = 2a_4 \Rightarrow a_3 + a_5 = 1$(II)

$a_4 = a_2 + 2r \Rightarrow a_2 = a_4 - 2r$ (III)

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_1 = a_4 - 3r$ (IV)

Assim, substituindo (II), (III) e (IV) em (I), temos:

$a_4 + (a_4 - 2r) = 2a_4 + (a_4 - r) \Rightarrow r = a_4 = 1/2$.

Logo, a_1= –1, a_2 = –1/2, a_3 = 0, a_4 = 1/2 e a_5 = 1.

Assim, p(x)= $x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Portanto, $p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 1 \Rightarrow \boxed{p(-2) = -25}$

QUESTÃO 09

Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes *a, b, c* são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e 1/2 – *i*/2 também é sua raiz. Então, o máximo de *a, b, c* é igual a:

a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução Alternativa C

Seja $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, e λ_1 e λ_2 as duas raízes inteiras da equação polinomial p(x) = 0.

Como o polinômio tem coeficientes reais, se $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ é raiz, então $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ também será raiz.

Pelas relações de Girard, o produto das quatro raízes vale:

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

Como essas duas raízes são inteiras, temos:

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

Assim, as quatro raízes do polinômio são 1, –1, $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ e $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$, e sua fatoração correspondente é:

$$p(x)=2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\right)=$$

$$=2\cdot(x^2-1)\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$p(x)=2x^4-2x^3-x^2+2x-1$$

Identificando os coeficientes, temos:

a = -2; b = -1 e c = 2

Assim o valor máximo destes coeficientes é 2.

QUESTÃO 10

É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)\,x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$$

com *a, b, c* reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto *abc* é igual a:

a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

Resolução Alternativa E

Como a equação é recíproca da primeira espécie temos que

$$\begin{cases}(a+c+2)=(a+b+4)\\ (b+3c+1)=(c-a)\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}b=c-2\\ a=1-3c\end{matrix}.$$

Substituindo a, b e o valor da raiz, $x = 1$, na equação:

$$1-3c+c+2+c-2+3c+1+c-1+3c+1-3c+c-2+4=0$$

$$\Rightarrow 4c+4=0\Rightarrow\boxed{c=-1}$$

$$\Rightarrow a=1-3(-1)\Rightarrow\boxed{a=4}$$

$$\Rightarrow b=(-1)-2\Rightarrow\boxed{b=-3}$$

Assim $abc = 12$

Observação: A princípio, nada garante que a equação dada seja de fato do terceiro grau, embora com certeza fosse a solução esperada. Se o coeficiente do termo x^3 for nulo, teríamos uma outra solução, apresentada abaixo.

$$\begin{cases}a+c+2=0\\ b+3c+1=a+b+4\\ 0\cdot1^3+(b+3c+1)\cdot1^2+(c-a)\cdot1+(a+b+4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9/4\\ b=-3\\ c=1/4\end{cases}$$

Nesse caso, teríamos $abc=\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot(-3)\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{16}$, valor que não aparece em nenhuma alternativa.

Por outro lado, se fizermos a hipótese de que os dois primeiros coeficientes são nulos, chegamos a um absurdo:

$$\begin{cases}a+c+2=0\\ b+3c+1=0\\ c-a=a+b+4\\ 0\cdot1^3+0\cdot1^2+(c-a)\cdot1+(a+b+4)=0\end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na última, vem que $c=a$. Na primeira, vem que $c=a=-1$. Voltando na terceira, $b=-3$. Ao substituirmos esses valores na segunda, chegamos à incompatibilidade – 5 = 0.

QUESTÃO 11

Sendo $[-\pi/2,\pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0,\pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de

$$\cos\left(arcsen\frac{3}{5}+\text{arccos}\frac{4}{5}\right).$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Resolução Alternativa B

Seja arcsen $\frac{3}{5}=\alpha\ \Rightarrow\ sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$.

O contradomínio da função arcsen é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Como $sen\alpha=\frac{3}{5}>0$, temos que $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Seja arccos $\frac{4}{5}=\beta$. Temos que o contradomínio da função arccos é $[0,\pi]$.

Como $\cos\beta=\frac{4}{5}>0\Rightarrow\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Os dois ângulos estão no mesmo quadrante e portanto são iguais $(\alpha=\beta)$. Assim:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

QUESTÃO 12

Dada a cônica $\lambda: x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P=(2,\sqrt{3})$?

a) $y=\sqrt{3}(x-1)$

b) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

d) $y=\frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$

e) $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Resolução Alternativa E

Considere a reta que passa pelo ponto $(2,\sqrt{3})$:

$$y-\sqrt{3}=m(x-2)\Rightarrow y=mx-2m+\sqrt{3}\qquad(*)$$

Para que a reta seja tangente à curva no ponto dado, o sistema formado pela curva e pela reta deve ter apenas uma solução. Assim, substituindo a equação (*) na equação da cônica, temos:

$$x^2-\left(xm-2m+\sqrt{3}\right)^2=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1-m^2)x^2+(4m^2-2\sqrt{3}m)x-4m^2+4\sqrt{3}m-4=0$$

Tendo o sistema uma única solução, $\Delta=0$. Logo:

$$\Delta=(4m^2-2\sqrt{3}m)^2-4(1-m^2)(-4m^2+4\sqrt{3}m-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2-16\sqrt{3}m+16=0\Leftrightarrow 3m^2-4\sqrt{3}m+4=0$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para que a reta seja perpendicular, o seu coeficiente angular deve ser

$$m'=-\frac{1}{m}\Rightarrow m'=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$.

Solução Alternativa:
Como a reta deve ser tangente, o coeficiente angular de tal reta é dada pela derivada da curva no ponto de tangência, no caso, $\left(2,\sqrt{3}\right)$.
Derivando ambos os membros da equação da cônica, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2-y^2)=\frac{d}{dx}(1)=0 \Rightarrow 2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

Assim, no ponto $\left(2,\sqrt{3}\right)$, temos $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, e este é justamente o coeficiente angular da reta que passa por $\left(2,\sqrt{3}\right)$. Dessa forma, a reta perpendicular terá coeficiente $\frac{\sqrt{3}}{2}$, e a equação da reta pedida fica:

$$y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4).$$

QUESTÃO 13

O conjunto imagem e o período de $f(x)=2sen^2(3x)+sen(6x)-1$ são, respectivamente,

a) [-3,3] e 2π
b) [-2,2] e $\frac{2\pi}{3}$
c) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$
d) [-1,3] e $\frac{\pi}{3}$
e) [-1,3] e $\frac{2\pi}{3}$

Resolução Alternativa C

Lembrando que $\cos 2\alpha=1-2sen^2\alpha$, temos:

$$f(x)=sen6x-(1-2sen^2 3x)=sen6x-\cos 6x.$$

Assim, podemos reescrever f(x) do seguinte modo:

$$f(x)=\frac{2}{2}(sen6x-\cos 6x)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sen6x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 6x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}sen6x-sen\frac{\pi}{4}\cos 6x\right)=\sqrt{2}sen\left(6x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Usando o fato de que em f(x)=A+Bsen(Cx+D), temos que o período é P=$\frac{2\pi}{|C|}$ e a imagem I é [A – B;A+B], temos:

$$P=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \text{ e a imagem é } \left[0-\sqrt{2};0+\sqrt{2}\right]=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$$

QUESTÃO 14

Para $x\in\mathbb{R}$, o conjunto solução de $\left|5^{3x}-5^{2x+1}+4.5^x\right|=\left|5^x-1\right|$ é

a) $\{0,2\pm\sqrt{5},2\pm\sqrt{3}\}$
b) $\left\{0,1,\log_5\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$
c) $\left\{0,\frac{1}{2}\log_5 2,\frac{1}{2}\log_5 3,\log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$
d) $\left\{0,\log_5\left(2+\sqrt{5}\right),\log_5\left(2+\sqrt{3}\right),\log_5\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}$
e) A única solução é x=0

Resolução Alternativa D

Substituindo $y=5^x$ (portanto y>0) temos que $\left|y^3-5y^2+4y\right|=\left|y-1\right|$. E para que os módulos sejam iguais, temos $y^3-5y^2+4y=y-1$ ou $y^3-5y^2+4y=-(y-1)$.

Primeira possibilidade: $y^3-5y^2+3y+1=0$. Como a soma dos coeficientes é zero, temos que y=1 é raiz e aplicamos Briot-Ruffini

1	1	-5	3	1
	1	-4	-1	0

para encontrarmos as outras duas raízes através do polinômio de segundo grau y^2-4y-1:

$$y=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=2\pm\sqrt{5}.$$

Observação: $y=5^x \Rightarrow$ y>0, então a única solução válida é $y=2+\sqrt{5}$.

Segunda possibilidade: $y^3-5y^2+5y-1=0$.
Novamente, y=1 é raiz e procedemos analogamente:

1	1	-5	5	-1
	1	-4	1	0

. Logo o polinômio de segundo grau é: y^2-4y+1, cujas raízes são:

$$y=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Assim, as raízes válidas encontradas são:

$$\left\{1;\ 2+\sqrt{5};\ 2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}\right\}$$

Como $y=5^x$ temos:

$$5^x=1 \Rightarrow x=0$$
$$5^x=2+\sqrt{5} \Rightarrow x=\log_5\left(2+\sqrt{5}\right)$$
$$5^x=2+\sqrt{3} \Rightarrow x=\log_5\left(2+\sqrt{3}\right)$$
$$5^x=2-\sqrt{3} \Rightarrow x=\log_5\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Assim, $\boxed{S=\left\{0;\ \log_5\left(2+\sqrt{5}\right);\ \log_5\left(2+\sqrt{3}\right);\ \log_5\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}}$

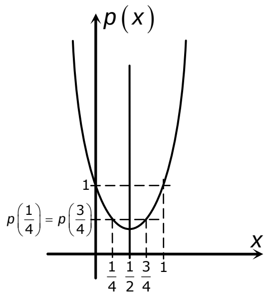
QUESTÃO 15

Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que a função $f\colon\ D\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|\ln(x^2-x+1)|$ é injetora, é dado por

a) $\mathbb{R}$
b) $(-\infty,1]$
c) [0,1/2]
d) (0,1)
e) [1/2, ∞)

Resolução Alternativa C

Gráfico de $p(x)=x^2-x+1$:



Observe que $p\left(\frac{1}{4}\right)=p\left(\frac{3}{4}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)$, e assim, qualquer conjunto que contenha $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, concomitantemente, não pode ser domínio de f. Com isso eliminamos as alternativas A, B e D.

Além disso, observe que existem $x_1\in\left(3/4,1\right)$ e $x_2\in(1,\infty)$, tal que $p(x_1)=4/5$ e $p(x_2)=5/4$, e, conseqüentemente, $f(x_1)=\left|\ln\left(4/5\right)\right|=-\ln\left(4/5\right)=\ln\left(5/4\right)=\left|\ln\left(5/4\right)\right|=f(x_2)$.
Assim, eliminamos a alternativa E.

Agora vejamos por que a alternativa C é correta:
Podemos escrever $f(x)$ como a função composta $g(p(x))$, onde $p(x)=x^2-x+1$ e $g(x)=\left|\ln(x)\right|$.
Para que $f(x)=g(p(x))$ seja injetora precisamos garantir que tanto $p(x)$ quanto $g(x)$ – definida na imagem de $p(x)$ – também o sejam.

a) Como $p(x) = x^2 - x + 1$ é simétrico em relação à reta $x = \frac{1}{2}$, garantimos que $p(x)$ seja injetora tomando um ou outro lado da parábola, em relação a essa reta, ou seja, $\boxed{x \le \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{x \ge \frac{1}{2}}$.

b) Para que $g(x) = |\ln(x)|$ seja injetora, temos que ou $\ln(x) \ge 0 \Rightarrow D(g(x)) \ge 1$ ou $\ln(x) \le 0 \Rightarrow 0 < D(g(x)) \le 1$, onde $D(g(x))$ é o domínio de g e, conseqüentemente, a imagem de $p(x)$. Assim:

(I) $x^2 - x + 1 \ge 1 \Rightarrow x(x-1) \ge 0 \Rightarrow \boxed{x \le 0}$ ou $\boxed{x \ge 1}$ ou

(II) $x^2 - x + 1 \le 1 \Rightarrow x(x-1) \le 0 \Rightarrow \boxed{0 \le x \le 1}$

Fazendo a intersecção das informações obtidas em (a) e (b) encontramos que $f(x)$ é injetora nos intervalos (-∞,0], [0,1/2], [1/2,1] ou [1,+∞). Dentre as alternativas, encontramos somente o intervalo [0,1/2], indicado na alternativa C.

QUESTÃO 16

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$$

que estão no intervalo $0 \le x \le \pi/2$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

Resolução — Alternativa E

Reescrevendo a equação cos3x + 2cos6x + cos9x = 0 como cos3x + cos9x + 2cos6x = 0 e aplicando transformação em produto para a soma cos9x + cos3x, temos:

$$\cos 9x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right) = 2\cos 6x.\cos 3x.$$

Assim, a equação se torna:
2cos6x.cos3x+2cos6x=0 ⇒ 2cos6x(cos3x+1)=0.
Logo, cos6x=0 (i) ou cos3x = – 1 (ii).

(i) Para $\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante, temos:

$$x = \frac{\pi}{12};\ x = \frac{3\pi}{12};\ x = \frac{5\pi}{12};$$

(ii) Para cos3x=-1 $\Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante

$$x = \frac{\pi}{3};$$

Logo, a som pedida é $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$.

QUESTÃO 17

Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \le n \le 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo-se ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$ d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

Resolução — Alternativa A

Seja n(H) o número de elementos do conjunto H e n(C) o número de elementos do conjunto C (o total de elementos B que atendem à propriedade).

De acordo com o enunciado:
H = {{1;2},{1;3},...{1;365},{2;3},{2;4},....,{2;365},...,{364;365}}
O número de elementos deste conjunto é dado por uma combinação de 365 elementos, 2 a 2.

$$n(H) = \binom{365}{2}$$

O conjunto C dos possíveis elementos B, cuja soma deve ser 183 é:
C = {{1;182};{2;181},{3;180},...,{91;92}}
O número de elementos deste conjunto é 91.

Então a probabilidade de B ser um conjunto de dois elementos com soma 183 é:

$$P = \frac{n(C)}{n(H)} = \frac{91}{\binom{365}{2}} = \frac{91}{\frac{365.364}{2}} = \frac{91}{365.182} = \frac{1}{730}$$

QUESTÃO 18

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40º. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15º$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35º$.

Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale:

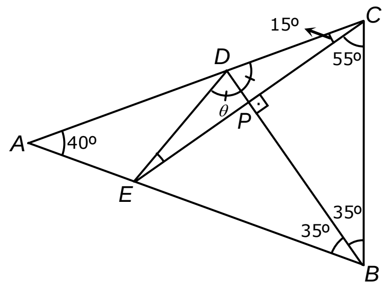
a) 35º
b) 45º
c) 55º
d) 75º
e) 85º

Resolução — Alternativa D

Como o triângulo ABC é isósceles e tem o ângulo $B\hat{A}C = 40º$ como ângulo distinto, temos então que:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \frac{180º - B\hat{A}C}{2} = \frac{180º - 40º}{2} = 70º$$

Observe a figura:



Na figura acima, temos:

$$A\hat{C}E = 15º \Rightarrow E\hat{C}B = A\hat{C}B - A\hat{C}E = 70º - 15º = 55º.$$

Da mesma forma, como $D\hat{B}C = 35º$, segue que:

$$A\hat{B}D = A\hat{B}C - D\hat{B}C = 70º - 35º = 35º.$$

Sendo P a intersecção dos segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{BD}$, temos, no triângulo BPC:

$$B\hat{P}C = 180º - P\hat{B}C - P\hat{C}B = 180º - 35º - 55º = 90º$$

Conseqüentemente, $B\hat{P}E = D\hat{P}E = D\hat{P}C = 90º$.

Como $B\hat{E}P = 180º - P\hat{B}E - B\hat{P}E = 180º - 35º - 90º = 55º$, segue que o triângulo BCE é isósceles com $EB = BC$.

Dessa forma, a altura relativa ao lado EC, dada por BP, coincide com a mediana, ou seja, $PE = PC$, portanto, os triângulos ΔDPE e ΔDPC são congruentes pelo caso LAL, uma vez que PD é comum aos dois triângulos.

Assim, o triângulo DCE também é isósceles e, conseqüentemente, o segmento PD é bissetriz do ângulo $E\hat{D}C$, de modo que:

$$E\hat{D}P = C\hat{D}P = 180º - D\hat{C}P - D\hat{P}C = 180º - 90º - 15º = 75º.$$

QUESTÃO 19

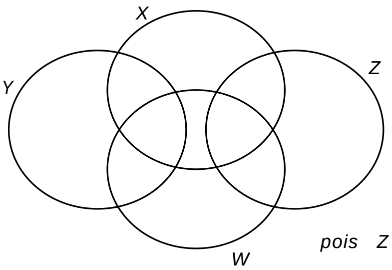
Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X\text{-}Y) \cap Z = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{5,6\}$, $Z \cap Y = \varnothing$, $W \cap (X - Z) = \{7,8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2,4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) {1,2,3,4,5} b) {1,2,3,4,7} c) {1,3,7,8}
d) {1,3} e) {7,8}

Resolução Alternativa C

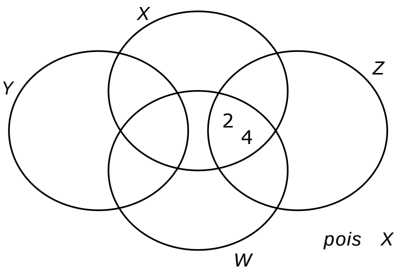
Ilustrando o enunciado no diagrama de Venn, temos:

I.



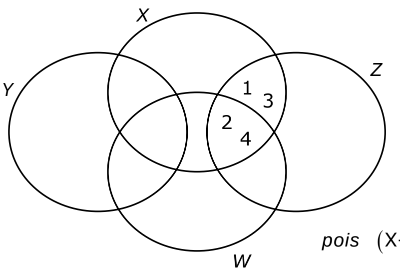
pois $Z \cap Y = \varnothing$

II.



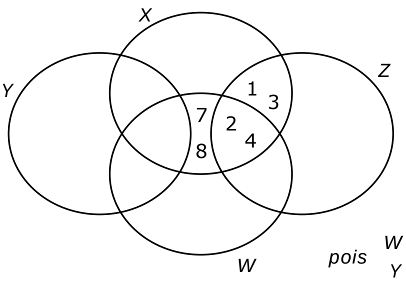
pois $X \cap W \cap Z = \{2,4\}$

III.



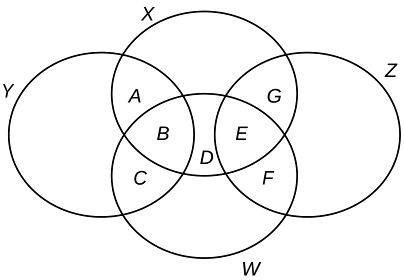
pois $(X\text{-}Y) \cap Z = \{1,2,3,4\}$

IV.



pois $W \cap (X - Z) = \{7,8\}$ e $Y = \{5,6\} \Rightarrow \{7,8\} \not\subset y$

V. Sendo A, B, C, D, E, F, G os subconjuntos disjuntos indicados:



$D = \{7,8\}$
$E = \{2,4\}$
$G = \{1,3\}$

$$[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = [B \cup D \cup E \cup G] - [B \cup C \cup E \cup F]$$
$$[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = D \cup G = \{7,8\} \cup \{1,3\} = \{1,3,7,8\}$$

QUESTÃO 20

Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja *P* um ponto no plano definido por *r* e *s* e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de *r*. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo eqüilátero *PQR* cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, são iguais a

a) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

b) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

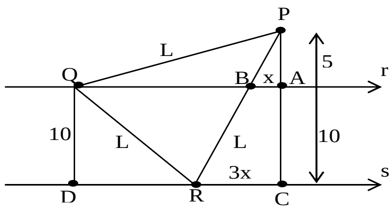
c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

Resolução Alternativa B

A partir do enunciado, podemos montar a seguinte figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APQ:

$$L^2=(AQ)^2+25 \Rightarrow AQ=\sqrt{L^2-25} \qquad \text{(I)}$$

Aplicando Pitágoras no triângulo DQR:

$$L^2=100+(DC-RC)^2$$

Como AQ=DC e RC=3x, temos:

$$L^2=100+(\sqrt{L^2-25}-3x)^2 \Rightarrow 6x\sqrt{L^2-25}=75+9x^2 \qquad \text{(II)}$$

Aplicando Pitágoras no triângulo CPR:

$$L^2=15^2+(3x)^2 \Rightarrow L^2=225+9x^2 \qquad \text{(III).}$$

Elevando (II) ao quadrado:

$$36x^2(L^2-25)=5625+1350x^2+81x^4 \qquad \text{(IV).}$$

Substituindo (III) em (IV):

$$36x^2(225+9x^2-25)=5625+1350x^2+81x^4 \Rightarrow$$
$$243x^4+5850x^2-5625=0 \Rightarrow 27x^4+650x^2-625=0.$$

Resolvendo a equação biquadrada, temos:

$$x^2=\frac{-650 \pm \sqrt{490000}}{54}=\frac{-650 \pm 700}{54}=\frac{25}{27}.$$

Substituindo x^2 em (III):

$$L^2=225+9.\frac{25}{27} \Rightarrow L^2=\frac{700}{3} \Rightarrow L=\frac{10\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{21}}{3}.$$

Assim, o perímetro do triângulo é $3.\dfrac{10\sqrt{21}}{3}=10\sqrt{21}$ e a área é

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\frac{700}{3}\sqrt{3}}{4}=\frac{700\sqrt{3}}{12}=\frac{175\sqrt{3}}{3}.$$

QUESTÃO 21

Dado o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R};\sqrt{3x^2+2x}<x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Resolução

Observe que não existe relação de desigualdade entre números complexos, de modo que podemos assumir:

$$0\leq\sqrt{3x^2+2x}<x^2$$

Como temos uma inequação de números positivos, podemos elevar ambos os membros ao quadrado, e a desigualdade se preserva. Assim:

$$\sqrt{3x^2+2x}<x^2 \Rightarrow 3x^2+2x<x^4 \Rightarrow x^4-3x^2-2x>0$$

Para resolver tal inequação, vamos determinar as raízes do polinômio $P(x)=x^4-3x^2-2x$, ou seja, resolveremos a equação $x^4-3x^2-2x=x(x^3-3x-2)=0$.

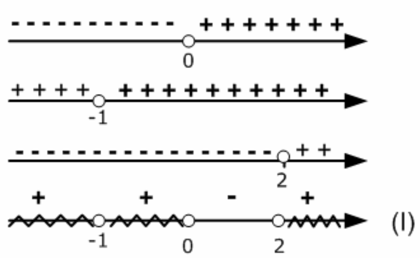
Notando que $x=0$ é raiz, temos que determinar agora as raízes de $x^3-3x-2=0$. Por um simples teste, encontramos $x=-1$ como outra raiz. Logo, aplicando Briot-Ruffini, temos:

-1	1	0	-3	-2
	1	-1	-2	0

Assim, $x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)=0$. Resolvendo a equação do segundo grau, temos que as soluções são da equação cúbica são x=-1, x=-1 ou x=2.

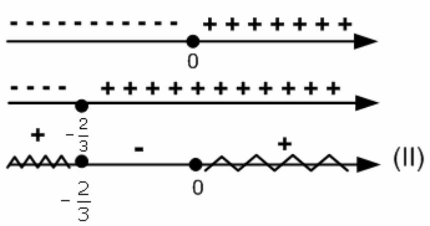
Logo, $x^4-3x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$, x=-1(dupla) ou x=2.

Queremos P(x) >0, ou seja, $x(x+1)^2(x-2)>0$. Assim, segue que:

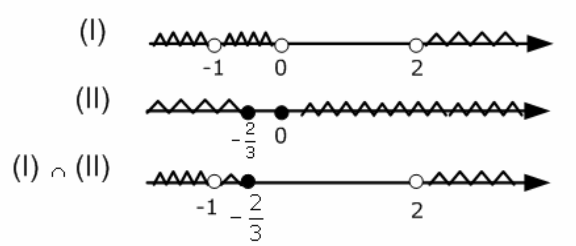


Analisando as condições de existência para a inequação, temos que se $\sqrt{3x^2+2x}$ existe então $3x^2+2x\geq 0$. Como as raízes de $3x^2+2x=0$ são $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$.

Logo, para que $3x^2+2x\geq 0 \Leftrightarrow x(x+\frac{2}{3})\geq 0$. Portanto:



De (I) e (II), vem:



Logo, o conjunto-solução é dado por:

$$]-\infty,-1[\,\cup\,\left]-1,-\frac{2}{3}\right]\cup\,]2,+\infty[$$

QUESTÃO 22

Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6+256=0$, na forma *a+bi*, com $a,b\in\mathbb{R}$, que pertençam a

$$S=\{z\in\mathbb{C};1<|z+2|<3\}.$$

Resolução

Por hipótese, temos que se $4z^6+256=0\Rightarrow z=\sqrt[6]{-64}$.

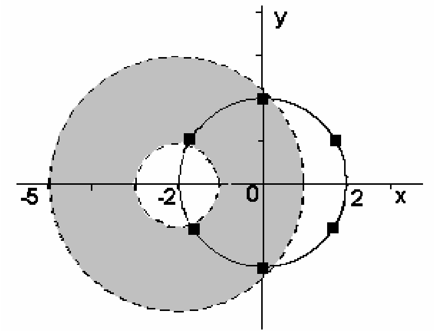
Usando a segunda formula de De Moivre, temos:

$$z=\sqrt[6]{64}\left(\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)=2\left(\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ k=0,1,2,3,4,5.$$

Dessa forma, o conjunto-solução V é:

$$V=\left\{2\text{cis}\frac{\pi}{6};2\text{cis}\frac{\pi}{2};2\text{cis}\frac{5\pi}{6};2\text{cis}\frac{7\pi}{6};2\text{cis}\frac{3\pi}{2};2\text{cis}\frac{11\pi}{6}\right\}.$$

A região limitada pela inequação $1<|z+2|<3$ é a coroa circular (ver figura) de raios 3 e 1 e centro no ponto (-2, 0).



Observe que, como $\sqrt{3}<2$, os pontos $2\text{cis}\frac{5\pi}{6}$ e $2\text{cis}\frac{7\pi}{6}$ pertencem à região da coroa circular. Da mesma forma, como a região circular intercepta o eixo y em pontos cujas ordenadas têm módulo menor que $\sqrt{5}$, temos que os pontos $2\text{cis}\frac{\pi}{2}$ e $2\text{cis}\frac{3\pi}{2}$ também pertencem à região. Assim, as únicas raízes da equação que **não** pertencem à região hachurada são $2\text{cis}\frac{\pi}{6}$ e $2\text{cis}\frac{11\pi}{6}$. Logo:

$$S\cap V=\{\pm 2i;-\sqrt{3}\pm i\}.$$

QUESTÃO 23

Seja $f(x)=\ln(x^2+x+1), x\in\mathbb{R}$. Determine as funções *h*, *g*: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que *f(x)=g(x) + h(x)*, $\forall x\in\mathbb{R}$, sendo *h* uma função par e *g* uma função ímpar.

Resolução

Observe que, dada uma função f(x), ela pode ser decomposta na soma de uma função par com uma função ímpar. Para tanto, note que:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

onde a função $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par e a função $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar.

Assim:

$$h(x)=\frac{\ln(x^2+x+1)+\ln(x^2-x+1)}{2}=\frac{\ln((x^2+1)^2-x^2)}{2}\Rightarrow$$

$$h(x)=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1).$$

$$g(x)=\frac{\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)}{2}\Rightarrow$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right).$$

Logo, $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)$.

QUESTÃO 24

Sejam α, β e $\gamma \in \Re$. Considere o polinômio *p(x)* dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$$

Encontre todos os valores de α, β, γ de modo que x=0 seja uma raiz com multiplicidade 3 de *p(x)*.

Resolução

Como 0 é raiz tripla de p(x), temos que p(x) = x^3.q(x) para algum polinômio q(x) de grau 2 e que não possui x = 0 como raiz. Assim, os coeficientes de x^2, x e o termo independente devem ser nulos e o coeficiente de x^3 deve obrigatoriamente ser diferente de zero.
Logo é necessário e suficiente que

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 & (I) \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 & (II) \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 & (III) \\ \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 & (IV) \end{cases}.$$

Somando as equações (II) e (III) encontramos $3\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$. Substituindo esse valor nas três primeiras equações do sistema, temos:

$$\begin{cases} 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ -\beta - \gamma + 1 = 0 \\ \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \gamma$$

A partir da equação (IV) temos que $2\gamma \neq -\beta$. Como $\beta + \gamma = 1$, temos:

$$\gamma = 1 - \beta \Rightarrow \gamma \neq 1 + 2\gamma \Rightarrow \gamma \neq -1$$

Assim, temos que os valores de α, β e γ que fazem com que p(x) tenha x = 0 como raiz de multiplicidade 3 são dados por $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1-\gamma, \gamma)$, com $\gamma \in \text{IR} \setminus \{-1\}$.

QUESTÃO 25

Uma matriz real quadrada *A* é ortogonal se *A* é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2 x 2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Resolução

Observe que se $A^{-1} = A^t \Rightarrow A^t.A = A.A^t = I$. Como A é simétrica, temos também que $A^t = A$. Combinando as duas condições, segue que $A^2 = I$.
Lembrando que se A é uma matriz simétrica de ordem 2 então ela pode ser escrita na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Como $A^2 = I$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando os termos correspondentes nas matrizes, conseguimos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ ab+bc = 0 \\ b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 & (I) \\ b.(a+c) = 0 & (II) \\ b^2+c^2 = 1 & (III) \end{cases}$$

A partir de (II), temos duas possibilidades:
1) b = 0. Nesse caso, temos, pelas outras equações, que $a = \pm 1$ e $c = \pm 1$.
2) a + c = 0 $\Rightarrow$ a = - c. A partir da equação (I) temos $a^2 = 1 - b^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1-b^2} \Rightarrow c = -a = \mp\sqrt{1-b^2}$. Note que como a matriz é **real** temos, obrigatoriamente, que o número $\sqrt{1-b^2}$ é real $\Rightarrow 1 - b^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$.

Desse modo, a matriz A deve ter o formato, $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ ou

$$A = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \mp\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}, \text{ com } b \in [-1, 1].$$

QUESTÃO 26

Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + tg\,\alpha = 0$$

admita raízes reais simples.

Resolução

Fazendo y = x^2, para que a equação em x tenha apenas raízes reais simples, é necessário e suficiente que a equação em y

$$y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + tg\,\alpha = 0$$

tenha duas raízes reais positivas distintas.

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = (-2\sqrt[4]{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot tg\,\alpha = 4 \cdot (\sqrt{3} - tg\,\alpha)$$

A condição para raízes reais distintas (em y) é

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow tg\,\alpha < \sqrt{3}$$

Além disso, as raízes da equação em y devem ser positivas. As raízes da equação em y são:

$$y = \frac{2\sqrt[4]{3} \pm \sqrt{4 \cdot (\sqrt{3} - tg\,\alpha)}}{2 \cdot 1} = \sqrt[4]{3} \pm \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha}$$

Como $\sqrt[4]{3} + \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha} > 0$ (desde que seja respeitada a condição sobre o discriminante), precisamos apenas garantir que:

$$\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha} > 0$$

Para tanto, temos que $\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha} > 0 \Rightarrow \sqrt[4]{3} > \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha}$
Como ambos os membros dessa desigualdade são positivos, podemos elevá-los simultaneamente ao quadrado, **mantendo o sinal** de maior.

$$\sqrt[4]{3} > \sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha} \Rightarrow (\sqrt[4]{3})^2 > \left(\sqrt{\sqrt{3} - tg\,\alpha}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt{3} - tg\,\alpha \Rightarrow tg\,\alpha > 0$$

Assim, as condições sobre α que devem ser satisfeitas são:

$$\begin{cases} tg\,\alpha < \sqrt{3} \\ tg\,\alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 < \alpha < \frac{\pi}{3}}$$

QUESTÃO 27

Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos *A*, *B* e *C* tais que: *P(A) = P(B) = 1/2*, com *A* e *B* independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C | A \cap B)$ e $P(C | A \cap B^C)$.

Resolução

Como os eventos A e B são independentes, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Assim, a primeira probabilidade condicional pedida é dada por:

$$P(C | A \cap B) = \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \Rightarrow$$

$$P(C | A \cap B) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{P(C | A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

Por outro lado, como $P((A\cap B)\cup(A\cap C))=\frac{3}{10}$, e observando que $P((A\cap B)\cap(A\cap C))=P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{16}$, temos:

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P((A\cap B)\cap(A\cap C))\Rightarrow$$
$$\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+P(A\cap C)-\frac{1}{16}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{9}{80}$$

Como $P(C\mid A\cap B^C)=\frac{P(C\cap A\cap B^C)}{P(A\cap B^C)}$, vamos determinar o numerador e o denominador separadamente.

Para o numerador, observamos que:
$C\cap A=[(C\cap A)\cap B]\cup[(C\cap A)\cap B^C]$, sendo que $(C\cap A)\cap B$ e $(C\cap A)\cap B^C$ são conjuntos disjuntos, de modo que:
$$P(C\cap A)=P((C\cap A)\cap B)+P((C\cap A)\cap B^C)$$
Assim, $\frac{9}{80}=\frac{1}{16}+P((C\cap A)\cap B^C)\Rightarrow P((C\cap A)\cap B^C)=\frac{1}{20}$

Analogamente, para o denominador, fazemos:
$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$, sendo que também os conjuntos $A\cap B$ e $A\cap B^C$ são disjuntos. Assim:
$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+P(A\cap B^C)\Rightarrow P(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$$

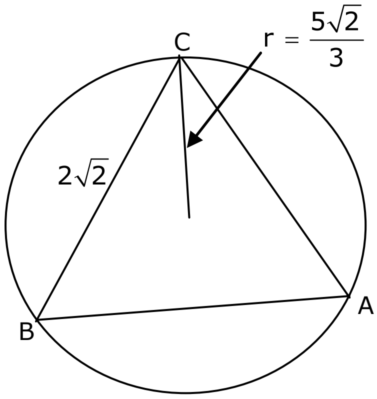
Fazendo a razão, vem que:
$$P(C\mid A\cap B^C)=\frac{P(C\cap A\cap B^C)}{P(A\cap B^C)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}}\Rightarrow\boxed{P(C\mid A\cap B^C)=\frac{1}{5}}$$

QUESTÃO 28

Um triângulo acutângulo de vértices *A*, *B* e *C* está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo *ABC*.

Resolução

A partir do enunciado, podemos montar a seguinte figura:



Assim, usando a lei dos senos duas vezes no triângulo ABC, temos:

$$\frac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\hat{ACB}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\text{sen}\hat{ACB}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\hat{CAB}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\text{sen}\hat{CAB}=\frac{3}{5}.$$

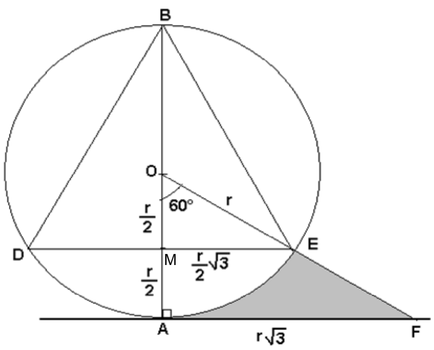
Como o triângulo ABC é acutângulo, temos, a partir da relação fundamental da Trigonometria, que:
$$\cos\hat{ACB}=\frac{\sqrt{10}}{10}\quad\text{e}\quad\cos\hat{CAB}=\frac{4}{5}.$$
Para calcular o seno do ângulo ABC, note que:
$$\text{sen}\hat{ABC}=\text{sen}(180^\circ-(\hat{ACB}+\hat{CAB}))=\text{sen}(\hat{ACB}+\hat{CAB}).$$
Logo:
$$\text{sen}\hat{ABC}=\text{sen}\hat{ACB}\cos\hat{CAB}+\text{sen}\hat{CAB}\cos\hat{ACB}$$
$$\Rightarrow\text{sen}\hat{ABC}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}.\frac{3}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$
Assim, a área do ABC é:
$$A=\frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{BC})\text{sen}\hat{ABC}=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.2\sqrt{2}.\frac{3\sqrt{10}}{10}=6.$$

QUESTÃO 29

Seja *C* uma circunferência de raio *r* e centro *O* e $\overline{AB}$ um diâmetro de *C*. Considere o triângulo eqüilátero *BDE* inscrito em *C*. Traça-se a reta *s* passando pelos pontos *O* e *E* até interceptar em *F* a reta *t* tangente à circunferência *C* no ponto *A*. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\overset{\frown}{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Resolução

A figura em questão é dada pelo esquema abaixo:



A rotação de AEF em torno do eixo AB gera um sólido cujo volume é dado pela retirada de uma calota esférica determinada por AME (altura r/2 e raio da seção $r\frac{\sqrt{3}}{2}$) de um tronco de cone determinado por AMEF (altura r/2 e raios de base $r\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $r\sqrt{3}$). Assim, o volume pedido é:
$$V_S=V_{tronco}-V_{calota}$$

Sejam S_b e S_B as áreas da base menor e da base maior do tronco de cone, respectivamente. Assim, o seu volume é:
$$V_{TRONCO}=\frac{h}{3}\left(S_B+S_b+\sqrt{S_B.S_b}\right)$$
$$V_{TRONCO}=\frac{r}{6}\left(3\pi r^2+\frac{3\pi r^2}{4}+\sqrt{3\pi r^2.\frac{3\pi r^2}{4}}\right)=\frac{21\pi r^3}{24}$$

Calculando agora o volume da calota, temos:
$$V_{CALOTA}=\frac{\pi h}{6}\left(3R^2+h^2\right)=\frac{\pi r}{12}\left[3\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]=\frac{5\pi r^3}{24}$$

Desse modo, o volume do sólido de revolução é dado por:
$$V_S=V_{TRONCO}-V_{CALOTA}=\frac{21\pi r^3}{24}-\frac{5\pi r^3}{24}=\frac{2}{3}\pi r^3.$$

QUESTÃO 30

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2,5), (-1,2) e tal que *a, b, c* formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2,5).

Resolução

Como a, b e c estão em P.A., podemos escrever:

$$a = b - r \quad , \quad c = b + r.$$

Substituindo então esses valores na equação da parábola, encontramos $y = (b-r)x^2 + bx + b + r$.
Como os pontos (2,5) e (-1,2) estão na parábola, temos:

$$\begin{cases} 4(b-r) + 2b + b + r = 5 \\ b - r - b + b + r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b - 3r = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Assim, temos que a = 2 – 3 = -1 e c = 2 + 3 = 5. Desse modo, a parábola é $y = -x^2 + 2x + 5$.
Seja r a reta que tangente à parábola em (2,5). Usando a relação $y - y_o = m(x - x_o)$, temos:

$$r: y = m(x - 2) + 5$$

Igualando as equações da parábola e da reta:

$$m(x - 2) + 5 = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow x^2 + (m-2)x - 2m = 0$$

Como a reta é tangente, existe um único valor de x que deve satisfazer a equação do segundo grau acima, de modo que obrigatoriamente temos que o discriminante dessa equação deve ser zero. Assim:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4.4}}{2} \Rightarrow m = -2$$

Logo, a reta tangente é y+2x-9=0.
O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-2}{-2}, -\frac{2^2 - 4.(-1).5}{-4}\right) = (1,6).$$

Aplicando finalmente a fórmula da distância de ponto à reta, encontramos:

$$\text{distância} = \left|\frac{6 + 2.1 - 9}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

O ELITE é um curso com compromisso real com o seu sucesso. Por isso, afirmamos com segurança que o ELITE é um curso realmente sério, dedicado e tem os melhores alunos. Veja por que:

SÉRIO

Somente um curso realmente sério se preocupa com seus alunos em cada detalhe. Um exemplo disso são as **turmas 100% direcionadas** do ELITE: **se é tão óbvio que é melhor, por que ninguém fez isso antes?**

DEDICADO

Que outro curso tem **simulados semanais**, até **46 aulas por semana**, plantões de dúvidas de todas as disciplinas todas as semanas, orientação e acompanhamento dos estudos individualizados, grupos de estudos orientados...?

TEM OS MELHORES ALUNOS

Somente os melhores alunos, realmente preocupados em aprender e desenvolver-se, enfrentam o desafio de ter mais aulas, aulas mais aprofundadas, mais simulados e mais atividades em geral, que acontecem no ELITE...

O resultado não poderia ser outro:

Turma ITA/IME/AFA:

- **88%** de aprovados, **todos em públicas**
- **67%** dos aprovados de Campinas **no IME**
- O **único a aprovar no ITA** da região

Turma Engenharia:

- **79%** de aprovados
- **30% entre os 10 primeiros** da carreira

A MAIOR GARANTIA DE APROVAÇÃO DO PAÍS: A MAIORIA ABSOLUTA DE NOSSOS ALUNOS SÃO APROVADOS!