ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

ELITE RESOLVE
ITA 2007

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251 1012

MATEMÁTICA

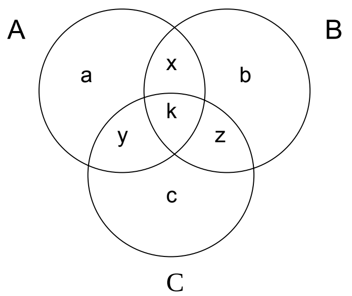
QUESTÃO 1

Se A,B,C forem conjuntos tais que
$n(A \cup B) = 23$, $n(B–A)=12$, $n(C-A)=10$,
$n(B \cap C)=6$ e $n(A \cap B \cap C)=4$,

então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,
a) formam uma progressão aritmética de razão 6.
b) formam uma progressão aritmética de razão 2
c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
e) não formam uma progressão aritmética.

Resolução — Alternativa D

O diagrama de Venn dos conjuntos citados é:



Pelo enunciado, $k = n(A \cap B \cap C) = 4$

Como $n(B \cap C) = k + z = 6 \Rightarrow z = 2$

Como $n(C - A) = c + z = 10 \Rightarrow c = 8$

Como $n(B - A) = b + z = 12 \Rightarrow b = 10$

Como $n(A \cup B) = a + y + b + x + k + z = 23 \Rightarrow a + y + x = 7$

Logo, temos:

1) $n(A) = a + y + x + k = 7 + 4 = 11$

2) $n(A \cup C) = a + y + x + k + c + z = 11 + 8 + 2 = 21$

3) $n(A \cup B \cup C) = a + y + x + k + c + z + b = 21 + 10 = 31$

Assim, $n(A)$, $n(A \cup C)$ e $n(A \cup B \cup C)$ estão em progressão aritmética de razão 10, sendo o último termo 31.

QUESTÃO 2

Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de suconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é
a) $2^8 – 9$ b) $2^8 – 1$ c) $2^8 – 2^6$ d) $2^{14} – 2^8$ e) 2^8

Resolução — Alternativa A

Para que um suconjunto C de A seja disjunto de B, isto é, $C \cap B = \varnothing$, nenhum elemento de C pode ser elemento de B. Como C é suconjunto de A, então os elementos de C devem ser escolhidos dentre os 8 elementos de A que não estão em B (14 – 6).
C pode ter de zero a 6 elementos, assim a quantidade de possibilidades para conjuntos C diferentes entre si vale:

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6$$

Pelo teorema das linhas do triângulo de Pascal, sabemos que esta soma vale $2^8 - C_8^7 - C_8^8 = 2^8 – 8 – 1 = 2^8 – 9$

QUESTÃO 3

Considere a equação:

$$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é
a) 3. b) 6. c) 9. d) 12. e) 15.

Resolução — Alternativa B

Vamos começar desenvolvendo o 2º membro desta equação:

$$\left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left[\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^4 =$$

$$= \left[\frac{(1+2i+i^2) - (1-2i+i^2)}{1^2 - i^2}\right]^4 = \left(\frac{4i}{2}\right)^4 = (2i)^4 = 16$$

Assim, a equação fica:

$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = 16 \Rightarrow (1-ix)^3 = (1+ix)^3$, com $x \neq i$.

Então:

$$1 - 3(ix) + 3(ix)^2 - (ix)^3 = 1 + 3(ix) + 3(ix)^2 + (ix)^3 \Rightarrow 2(ix)^3 + 6(ix) = 0 \Rightarrow$$

$$3ix - ix^3 = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0 \Rightarrow x\left(3 - x^2\right) = 0$$

Portanto, temos que $x = 0$ *ou* $x = \pm\sqrt{3}$

Assim, a soma pedida é:

$$0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$$

QUESTÃO 4

Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i \cdot \cot g(x)}, \quad x \neq k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

a) $|\cos(x)|$ b) $(1 + \text{sen}(x))/2$ c) $\cos^2(x)$
d) $|\text{cos sec}(x)|$ e) $|\text{sen}(x)|$

Resolução — Alternativa E

Temos que:

$$\left|\frac{1}{1+i.\cot g(x)}\right| = \frac{1}{|1+i.\cot g(x)|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \cot g^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{sen^2 x}}} = \sqrt{sen^2 x} = |sen(x)|$$

QUESTÃO 5

Considere um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o circuito inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio
a) $\pi^3x^3+\pi^2x^2+\pi x-2=0$ b) $\pi^2x^3+\pi^3x^2+x+1=0$
c) $\pi^3x^3-\pi^2x^2+\pi x+2=0$ d) $\pi x^3-\pi^2x^2+2\pi x-1=0$
e) $x^3-2\pi^2x^2+\pi x-1=0$

Resolução — Alternativa D

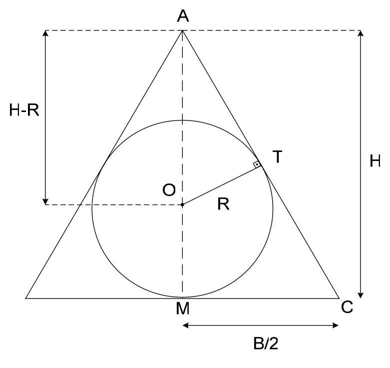
Área do retângulo: $A_1 = BH$; Área do triângulo: $A_2 = \frac{BH}{2}$

Área do círculo: $A_3 = \pi R^2$

Estando em PG, temos:

$$A_2^{\,2} = A_1 A_3 \Rightarrow \left(\frac{BH}{2}\right)^2 = (BH)(\pi R^2) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{BH}{4\pi}}$$

Vamos encontrar o raio do círculo em função de B e H (Note que, como o triângulo é isósceles, a circunferência tangencia a base no seu ponto médio):



Da semelhança dos triângulos, vem que:

$$\frac{AO}{OT}=\frac{AC}{MC}\Rightarrow\frac{H-R}{R}=\frac{\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+H^2}}{\left(\frac{B}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{\frac{B^2}{4}+H^2}}{B}=\frac{\sqrt{B^2+4H^2}}{B}$$

$$\frac{H-R}{R}=\sqrt{1+4\left(\frac{H}{B}\right)^2}\Rightarrow\frac{H-\sqrt{\frac{BH}{4\pi}}}{\sqrt{\frac{BH}{4\pi}}}=\sqrt{1+4\left(\frac{H}{B}\right)^2}\Rightarrow$$

$$H\sqrt{\frac{4\pi}{BH}}-1=\sqrt{1+4\left(\frac{H}{B}\right)^2}\Rightarrow\sqrt{4\pi\left(\frac{H}{B}\right)}-1=\sqrt{1+4\left(\frac{H}{B}\right)^2}$$

Chamando $\frac{B}{H}=x\Rightarrow\frac{H}{B}=\frac{1}{x}$, temos $\sqrt{\frac{4\pi}{x}}-1=\sqrt{1+4\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

Elevando os dois membros ao quadrado, vem que:

$$\frac{4\pi}{x}-2\sqrt{\frac{4\pi}{x}}+1=1+\frac{4}{x^2}\Rightarrow\frac{\pi}{x}-\frac{1}{x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado:

$$\frac{\pi^2}{x^2}-\frac{2\pi}{x^3}+\frac{1}{x^4}=\frac{\pi}{x}\Rightarrow\pi^2x^2-2\pi x+1=\pi x^3\Rightarrow\pi x^3-\pi^2x^2+2\pi x-1=0$$

Assim, o valor de $\frac{B}{H}=x$ é uma das raízes do polinômio acima.

QUESTÃO 6

Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo

a) $(0,(1+\sqrt{2})/2)$

b) $\left((1+\sqrt{2})/2,\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right)$

c) $\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})/2},(1+\sqrt{5})/2\right)$

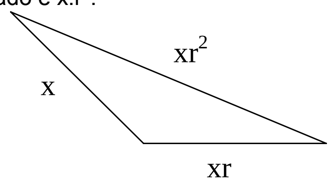
d) $\left((1+\sqrt{5})/2,\sqrt{2+\sqrt{2}/2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}/2},(2+\sqrt{3})/2\right)$

Resolução Sem resposta

1) Descarta-se a possibilidade de r=1 pois não existe triângulo obtusângulo e eqüilátero.

2) Supondo a PG crescente **(r>1)** têm-se os lados do triângulo: x, x.r e x.r^2 onde o maior lado é x.r^2.



a) Pela condição de existência do triângulo:

$$xr^2<x+xr\Rightarrow r^2-r-1<0\Rightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Pela condição de r > 0, tem-se $0<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(i)**

b) Como o triângulo é obtusângulo, temos que o lado maior apresenta medida superior à medida da hipotenusa de um triângulo com os demais lados de mesma medida:

$\left(x.r^2\right)^2>x^2+\left(x.r\right)^2\Rightarrow r^4-r^2-1>0\Rightarrow$ inequação biquadrada: $m=r^2\Rightarrow m^2-m-1>0\Rightarrow m<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *ou* $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

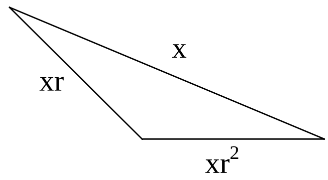
Pela condição de m,r >0 tem-se:

$$r^2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r>\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\quad\textbf{(ii)}$$

Fazendo a intersecção das condições **(i)** e **(ii)** com a desigualdade r>1 (limitante inferior do caso estudado):

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

3) Supondo a PG decrescente **(0<r<1)** têm-se os lados do triângulo: r, x.r e x.r^2 onde o maior lado é x. Assim tem-se que



Analogamente à resolução para o caso 2, teremos:

a) $x<xr+xr^2\Rightarrow r^2+r-1>0\Rightarrow r<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $r>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Pela condição de m > 0, tem-se $r>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **(i)**

b) $x^2>\left(x.r\right)^2+\left(x.r\right)^2\Rightarrow r^4+r^2-1<0\Rightarrow$inequação biquadrada:

$m=r^2\Rightarrow r^2+r-1<0\Rightarrow\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Pela condição de m,r > 0 tem-se:

$$0<r^2<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 0<r<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Fazendo a intersecção das condições **(i)** e **(ii)** com a desigualdade r<1 (limitante superior do caso estudado):

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

Assim, os intervalos possíveis para a razão r é a união dos intervalos estudados:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\quad\text{ou}\quad\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como não existe alternativa que contempla o intervalo, esta questão é passível de anulação.

NOTA: Se (a,b,c) é uma PG de razão q crescente então (c,b,a) é uma PG de razão 1/r decrescente.

Certamente, Uma vez encontrado o intervalo para uma PG crescente, basta inverter a razão e escrever os termos em sentido oposto e você terá uma PG decrescente com os mesmos valores numéricos.

Vejamos:

Se $0<\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}>\frac{1}{r}>\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\Rightarrow$ tomando $\frac{1}{r}=r'$ por racionalização que: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r'<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ que é exatamente a resposta encontrada (e que falta nas alternativas do enunciado).

Assim, a simples definição do tipo de PG pelo enunciado levaria a dirimir quaisquer dúvidas, visto que sempre o triângulo com os valores dos lados em uma PG crescente também apresenta os mesmos valores de acordo com uma PG decrescente.

QUESTÃO 7

Sejam *x*, *y* e *z* números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base *k* são números primos satisfazendo

$\log_k(xy) = 49$,

$\log_k(x/Z) = 44$.

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

a) 52 b) 61 c) 67 d) 80 e) 97

Resolução Alternativa A

Usando as propriedades dos logaritmos do produto e do quociente, temos:

$$\begin{cases}\log_k(xy)=\log_k x+\log_k y=49\\ \log_k\left(\frac{x}{z}\right)=\log_k x-\log_k z=44\end{cases}$$

Como $\log_k x+\log_k y=49$ e 49 é ímpar, devemos ter um das parcelas par e outra ímpar. Mas como o único número primo par é o 2, temos que:

$$\log_k x=2\ \text{ou}\ \log_k y=2.$$

Não podemos ter $\log_k x = 2$, pois substituindo na segunda equação, ganharíamos $2 - \log_k z = 44 \Rightarrow \log_k z = -42$, que não é primo.

Assim, devemos ter $\log_k y = 2$, portanto $\log_k x = 47$ e finalmente $47 - \log_k z = 44 \Rightarrow \log_k z = 3$

O logaritmo pedido vale:

$$\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 47 + 2 + 3 = 52$$

QUESTÃO 8

Sejam *x* e *y* dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma x+y é igual a

a) 0 b) 1 c) 2 $\log_5 3$ d) $\log_5 2$ e) $3\log_e 2$

Resolução Alternativa E

Racionalizando a fração dada:

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}} = \frac{(e^x - 2\sqrt{5})}{(4 - e^y\sqrt{5})} \cdot \frac{(4 + e^y\sqrt{5})}{(4 + e^y\sqrt{5})} = \frac{(4e^x - 10e^y) + (e^{x+y} - 8)\sqrt{5}}{16 - 5(e^y)^2}$$

Como e^y é racional, seu quadrado também é e, portanto, o denominador é racional. Para que a fração seja racional, devemos ter então o numerador também racional.

Como e^x e e^y são racionais, a primeira parcela $(4e^x - 10e^y)$ também é racional.

$e^{x+y} = e^x e^y$, sendo produto de racionais, é racional, e assim, $e^{x+y} - 8$ é racional. Dito isto, a única possibilidade do produto $(e^{x+y} - 8)\sqrt{5}$ ser racional é o fator entre parêntesis ser zero, caso contrário seria um múltiplo de $\sqrt{5}$, portanto irracional.

Então, fazendo $e^{x+y} - 8 = 0 \Rightarrow e^{x+y} = 8 = 2^3 \Rightarrow$

$$x + y = \log_e 2^3 = 3\log_e 2$$

QUESTÃO 9

Seja Q(z) um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de Q(z), Q(0) = 2 e Q(1) = 8, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de Q(z) é igual a

a) 9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

Resolução Alternativa B

Como o grau de Q(z) é 5, então:

$$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1).(az^2 + bz + c)$$

Como Q(0) = 2, o termo independente de Q deve ser 2, logo c=2.

Como o coeficiente de z^5 é igual a 1, então a=1, logo:

$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1).(z^2 + bz + 2)$

$Q(1) = 8 \Rightarrow 4.(1+b+2) = 8 \Rightarrow b = -1$ e assim

$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1).(z^2 + -z + 2)$

As raízes de Q são as raízes de seus dois fatores.

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{z^4 - 1}{z - 1} = 0 \Rightarrow z_1 = -1$; $z_2 = i$; $z_3 = -i$ (são as raízes quartas da unidade, exceto 1) $\Rightarrow |z_1| = !z_2| = |z_3| = 1$.

Para o segundo fator, temos:

$z^2 - z + 2 = 0 \Rightarrow z_{4,5} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ e $|z_4| = !z_5| = \sqrt{2}$

Desta maneira $|z_1|^2 + !z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + !z_5|^2 = 7$

QUESTÃO 10

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3$$

Neste caso, $\left|a + |b| - c\right|$ é igual a

a) 104 b) 114 c) 124 d) 134 e) 144

Resolução Alternativa B

Temos que: $\begin{cases} (x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \\ (x+b)^3 = x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 \end{cases}$

Igualando a subtração dos dois cubos com o polinômio, temos:

$$9x^2 - 63x + c = (x+a)^3 - (x+b)^3 = 3(a-b)x^2 + 3(a^2 - b^2)x + (a^3 - b^3)$$

Da igualdade entre polinômios:

$$\begin{cases} 3(a-b) = 9 \\ 3(a^2 - b^2) = -63 \\ c = a^3 - b^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = -7 \\ c = a^3 - b^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 117 \end{cases}$$

Assim, $\left|a + |b| - c\right| = \left|-2 + |-5| - 117\right| = |-114| = 114$

QUESTÃO 11

Sobre a equação na variável real x,

$$\left|\,\left|\,|x-1| - 3\right| - 2\right| = 0$$

podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

Resolução Alternativa D

Temos que:

$$\left|\,\left|\,|x-1| - 3\right| - 2\right| = 0 = 0 \Rightarrow \left|\,|x-1| - 3\right| - 2 = 0 \Rightarrow \left|\,|x-1| - 3\right| = 2 \Rightarrow$$

$$|x-1| - 3 = 2 \text{ ou } |x-1| - 3 = -2$$

1) Se $|x-1| - 3 = 2 \Rightarrow |x-1| = 5 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -4$

2) Se $|x-1| - 3 = -2 \Rightarrow |x-1| = 1 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 0$

Substituindo na equação original, verifica-se que todos os valores de x encontrados são de fato soluções.

Assim, a equação admite quatro raízes reais distintas, sendo uma delas negativa, e a soma dessas raízes vale:

$$S = 6 + (-4) + 2 + 0 = 4$$

QUESTÃO 12

Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo a seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204 b) 206 c) 208 d) 210 e) 212

Resolução Alternativa E

Podemos dividir o problema em 3 situações:

1) os números não começam com 1 ou 2 $\Rightarrow$ nenhum algarismo se repete. Assim, dos sete números possíveis, temos apenas 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 6 possibilidades para o segundo (um dos sete já foi utilizado) e 5 para o terceiro (dois dos sete já foram utilizados) $\Rightarrow$ o total é 5.6.5 **= 150 possibilidades.**

2) os números começam com 1 ou 2 e o algarismo 7 aparece

a) o número é da forma A7B, com A igual a 1 ou 2 e B diferente de A e 7. Assim, dos sete números possíveis, teremos apenas 2 possibilidades para A e 5 possibilidades para B $\Rightarrow$ o total é 2.5 **= 10 possibilidades.**

b) o número é da forma AB7, com A igual a 1 ou 2 e B diferente de A e 7. Assim, dos sete números possíveis, teremos apenas existem 2 possibilidades para A e existem 5 possibilidades para B $\Rightarrow$ o total é 2.5 **= 10 possibilidades.**

c) O número 7 se repete, formando o número é 177 ou 277 $\Rightarrow$ o total é **2 possibilidades.**

3) os números começam com 1 ou 2, e o algarismo 7 não aparece. Assim, dos seis números possíveis (não pode ser o número 7), teremos apenas 2 possibilidades para o primeiro algarismo, 5 possibilidades para o segundo (um dos seis já foi utilizado) e quatro para o terceiro (dois dos seis já foram utilizados) $\Rightarrow$ o total é 2.5.4 **= 40 possibilidades.**

Assim, temos então que o total de algarismos é:

150 + 10 + 10 + 2 + 40 = **212 possibilidades**

QUESTÃO 13

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menos intervalo que contém todas as soluções de desigualdade

$$\frac{1}{2}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

a) $\pi/2$. b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/6$ e) $\pi/12$

Resolução Alternativa D

Lembrando que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x \\ \cos(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{cotg} x$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

Fazendo $\alpha = \frac{x}{2}$, vem: $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$

Então:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)-\sqrt{3}(\cos^2(\frac{x}{2})-\frac{1}{2})\sec(x)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}(x)-\sqrt{3}(\frac{\cos(x)+1}{2}-\frac{1}{2})\sec(x)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0 \Rightarrow \operatorname{cotg}(x)\geq\sqrt{3}\Rightarrow \operatorname{tg}(x)\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Além disso, $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg(x) > 0$

Assim: $0 < tg(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\pi}{6}$, que é um intervalo de comprimento $\frac{\pi}{6}$.

QUESTÃO 14

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{ x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1,\ 2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1,\ 2 \right\}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) $(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})/3$ e) $(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})/3$

Resolução Alternativa C

Calculando os quatro valores, temos:

$$x_1 = sen^2\left(\frac{1^2\cdot\pi}{24}\right) = sen^2\frac{\pi}{24} \text{ e } x_2 = sen^2\left(\frac{2^2\cdot\pi}{24}\right) = sen^2\frac{\pi}{6}$$

$$y_1 = sen^2\frac{(3\cdot 1+5)\pi}{24} = sen^2\frac{\pi}{3} \text{ e } y_2 = sen^2\frac{(3\cdot 2+5)\pi}{24} = sen^2\frac{11\pi}{24}$$

Assim:

$$A = \{x_1, x_2\} = \left\{sen^2\frac{\pi}{24}, sen^2\frac{\pi}{6}\right\} \text{ e } B = \{y_1, y_2\} = \left\{sen^2\frac{\pi}{3}, sen^2\frac{11\pi}{24}\right\}$$

O conjunto pedido será formado por:

$$A\cup B = \{x_1,x_2\}\cup\{y_1,y_2\} = \left\{sen^2\frac{\pi}{24}, sen^2\frac{\pi}{6}, sen^2\frac{\pi}{3}, sen^2\frac{11\pi}{24}\right\}$$

Constatamos que todos os elementos são diferentes entre si e portanto a soma dos seus elementos é dada por:

$$\left(sen^2\frac{\pi}{24}+sen^2\frac{11\pi}{24}\right)+\left(sen^2\frac{\pi}{6}+sen^2\frac{\pi}{3}\right)$$

Como para ângulos agudos $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$, vale que $sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, notando que $\frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ e $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, temos a soma passa a ser:

$$\left(sen^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{\pi}{24}\right)+\left(sen^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}\right) = 1+1 = 2$$

QUESTÃO 15

Sejam A =(a_{jk}) e B=(b_{jk}), duas matrizes quadradas n X n, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \text{ quando } j \geq k, \quad a_{jk} = \binom{k}{j}, \quad \text{quando } j < k$$

$$\text{e } b_{jk} = \sum_{p=0}^{j.k}(-2)^p\binom{j.k}{p}$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem n x n é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de A + B é igual a

a) n(n-1)/3.
b) (n-1)(n+1)/4
c) $(n^2 - 3n+2)/(n-2)$.
d) 3(n-1)/n.
e) (n-1)/(n-2).

Resolução Alternativa C

O traço da matriz A + B é a soma do traço de A com o traço de B. Assim, para a matriz A:

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\binom{j}{j} = n$$

Para a matriz B, observe que $b_{jj} = \sum_{p=0}^{j^2}(-2)^p\binom{j^2}{p}$. Aplicando o binômio de Newton, temos que $b_{jj} = \sum_{p=0}^{j^2}(-2)^p\binom{j^2}{p} = (1-2)^{j^2}$. Como n é ímpar, segue que n é da forma 2k+1, logo,

$$tr(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = \underbrace{-1+1-1+1+\ldots-1+1}_{2k}-1 = -1.$$

Assim, temos $tr(A+B) = tr(A)+tr(B) = n-1 = \frac{(n-1)(n-2)}{n-2}$

$$\Rightarrow tr(A+B) = \frac{n^2-3n+2}{n-2}.$$

QUESTÃO 16

Considere no plano cartesiano *xy* o triângulo delimitado pelas retas 2x=y, x=2y e x=-2y +10 . A área desse triângulo mede

a) 15/2. b) 13/4. c) 11/6. d) 9/4. e) 7/2.

Resolução Alternativa A

Os vértices do triângulo são as interseções das retas, duas a duas:

$$\begin{cases} x=2y \\ 2x=y \end{cases} \Rightarrow A\ (0;0) \qquad \begin{cases} x=2y \\ x=-2y+10 \end{cases} \Rightarrow B\ (5;\ 2{,}5)$$

$$\begin{cases} 2x=y \\ x=-2y+10 \end{cases} \Rightarrow C\ (2;\ 4)$$

Assim podemos calcular a área do triângulo

$$S = \frac{\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2{,}5 & 1 \end{matrix}\right\|}{2} = 15/2 \text{ unidades de área}$$

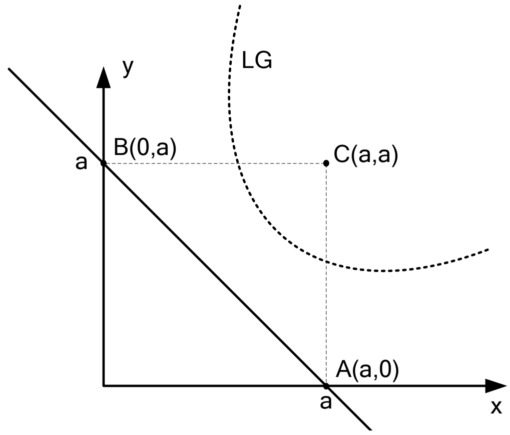
QUESTÃO 17

Sejam A: (a,0), B(0,a) e C (a,a); pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P: (x,y) cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Resolução — Alternativa A

Pela definição de parábola (lugar geométrico eqüidistante de um ponto e de uma reta), notamos que o lugar geométrico em questão será uma parábola rotacionada.



Considerando $a \neq 0$, temos que a reta que passa por A e B tem equação:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + ay - a^2 = 0 \Rightarrow x + y - a = 0$$

A distância de um ponto $P(x,y)$ à reta AB é:

$$d_{P,AB} = \frac{|x+y-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x+y-a|}{\sqrt{2}}$$

Por outro lado, a distância entre os pontos P e C é:

$$d_{P,C} = \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

Igualando as duas, e elevando os dois membros ao quadrado, vem que:

$$\left(\frac{|x+y-a|}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{(x+y-a)^2}{2} = (x-a)^2+(y-a)^2 \Rightarrow$$

$$x^2+2xy+y^2-2ax-2ay+a^2 = 2(x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2) \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2xy-2ax-2ay+3a^2=0$$

QUESTÃO 18

Seja P_n um polígono regular de n lados, com n >2. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades

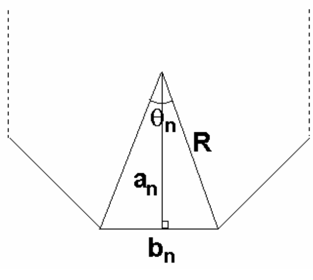
$$b_n \leq a_n \text{ e } b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

a) 3< n< 7.
b) 6< n < 9.
c) 8< n <11.
d) 10 < n < 13.
e) 12< n < 15.

Resolução — Alternativa B

Sejam θ_n (ângulo central de P_n) e R (raio da circunferência circunscrita a P_n), como na figura:



Do triângulo retângulo:

$$\frac{b_n/2}{a_n} = tg\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = 2\cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Das condições $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$ e $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > 1$, temos:

$$tg\left(\frac{180°}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \text{ e } tg\left(\frac{180°}{n-1}\right) > \frac{1}{2}$$

Para n = 6 (hexágono): $\frac{b_6}{a_6} = 2.tg\left(\frac{180°}{6}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} > 1$

Para n = 8 (octógono):

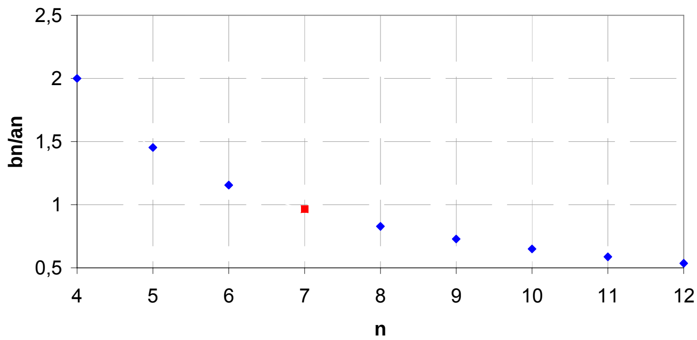
$$\frac{b_8}{a_8} = 2\cdot tg\left(\frac{180°}{8}\right) = 2\cdot tg\left(\frac{45°}{2}\right) = 2\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} =$$

$$= 2\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) < 1$$

Logo, pode-se concluir que n = 7 ou 8

OBS.: Graficamente, ou numericamente com auxílio de uma calculadora científica, é possível determinar que n = 7.

$$\frac{b_7}{a_7} = 0{,}96$$



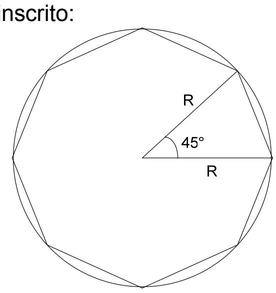
QUESTÃO 19

Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1/A_2 é igual a

a) $\sqrt{5/8}$
b) 9 $\sqrt{2/16}$
c) 2 $\sqrt{2}$ -1
d) (4 $\sqrt{2}$ +1)/8.
e) (2+ $\sqrt{2}$)/4.

Resolução — Alternativa E

1) Área do octógono inscrito:

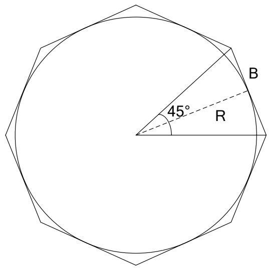


O octógono inscrito na circunferência consiste de 8 triângulos isósceles, conforme a figura. Assim, a área do octógono é dada por:

$$A_1 = 8.\frac{R.R.\cos 45°}{2} = 4.R^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2\sqrt{2}$$

2) Área do octógono circunscrito

O octógono circunscrito na circunferência consiste de 8 triângulos isósceles, onde cada um deles possui um ângulo de 45˚ oposto à base e altura R. Fazendo B = base do triângulo, temos:



$$\frac{B/2}{R} = tg\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} \Rightarrow B = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 2R\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$\Rightarrow B = 2R.(2-\sqrt{2}).\frac{\sqrt{2}}{2} = 2R(\sqrt{2}-1)$$

Assim, a área do octógono é dada por:

$$A_2 = 8.\frac{B.R}{2} = 8.\frac{2R^2(\sqrt{2}-1)}{2} = 8.R^2(\sqrt{2}-1)$$

Fazendo agora o quociente $\frac{A_1}{A_2}$, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2.R^2\sqrt{2}}{8.R^2(\sqrt{2}-1)} = \frac{2.\sqrt{2}.(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

QUESTÃO 20

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a $1 cm^3$ e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1\ \sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

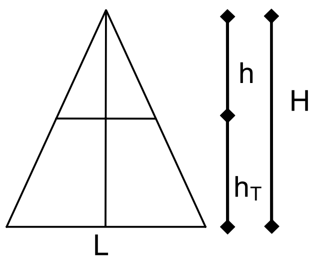
a) ($\sqrt{6}$ - $\sqrt{2}$)/4.
b) ($\sqrt{6}$ - $\sqrt{3}$)/3
c) (3 $\sqrt{3}$ - $\sqrt{6}$)/21.
d) (3 $\sqrt{2}$ -2 $\sqrt{3}$)/6
e) (2 $\sqrt{6}$ - $\sqrt{2}$)/22.

Resolução Alternativa C

Como a pirâmide menor e a maior são semelhantes, a razão de semelhança entre seus volumes será o cubo da razão entre suas dimensões lineares.

Assim: $\frac{V_P}{V_G} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

$$V_P = \frac{1}{2\sqrt{2}}V_G \qquad \text{(i)}$$



(Visão Frontal)

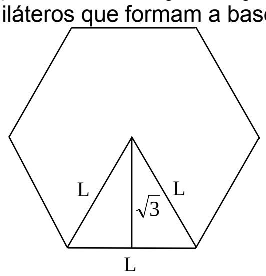
O volume do tronco da pirâmide é dado pelo volume da pirâmide maior subtraído do volume da pirâmide menor:

$$V_G - V_P = V_T = 1cm^3 \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (i) em (ii):

$$V_G - \frac{1}{2\sqrt{2}}V_G = 1 \Rightarrow V_G = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}cm^3 \quad \text{(iii)}$$

O apótema do hexágono regular é a altura de um dos seis triângulos eqüiláteros que formam a base. Assim:



$$\frac{L\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow L = 2cm$$

A área da base pode ser calculada por:

$$A_B = 6\frac{L\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Assim, o volume da pirâmide é dado por

$$V_G = \frac{1}{3}A_B H = \frac{6\sqrt{3}}{3}.H \qquad \text{(iv)}$$

Igualando (iii) e (iv), temos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{3}H \Rightarrow H = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)} \qquad \text{(v)}$$

Porém, a razão das alturas das pirâmides é, de acordo com a visão frontal, $\frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Assim, $\frac{H-h_T}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}h_T \Rightarrow h_T = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}H$ (vi)

Finalmente, substituindo (v) em (vi):

$$h_T = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow h_T = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)}$$

Racionalizando:

$$h_T = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}cm$$

QUESTÃO 21

Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjuntos de números reais tais que

$A \cup B \cup C = \{x \in R : x^2 + x \geq 2\}$,
$A \cup B = \{x \in R : 8^{-x} - 3.4^{-x} - 2^{2-x} > 0\}$,
$A \cap C = \{x \in R : \log(x+4) \leq 0\}$,
$B \cap C = \{x \in R : 0 \leq 2x+7 < 2\}$.

Resolução

O conjunto C pode ser dado por:

$$C = \left[(A \cup B \cup C) - (A \cup B)\right] \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{(I)}$$

Determinamos então cada conjunto do segundo membro:

1) $A \cup B \cup C$:

$$x^2 + x \geq 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ ou } x + \frac{1}{2} \leq \frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$x \geq 1 \text{ ou } x \leq -2$$

$$\boxed{A \cup B \cup C = \{x \in R \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -2\}}$$

2) $A \cup B$:

$$8^{-x} - 3.4^{-x} - 2^{2-x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{3x}} - \frac{3}{2^{2x}} - \frac{4}{2^x} > 0$$

Como $2^x > 0 \Rightarrow \frac{2^x}{2^{3x}} - \frac{3.2^x}{2^{2x}} - \frac{4.2^x}{2^x} > 0 \Rightarrow 2^{-2x} - 3.2^{-x} - 4 > 0$.

Seja $a = +2^{-x}$, então

$$a^2 - 3a - 4 > 0 \Rightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$a - \frac{3}{2} > \frac{5}{2} \text{ ou } a - \frac{3}{2} < -\frac{5}{2} \Rightarrow a > 4 \text{ ou } a < -1$$

Como $a = 2^{-x} > 0, \forall x \in R \Rightarrow 2^{-x} > 4 \Rightarrow 2^x < 2^{-2} \Rightarrow x < -2$

$$\boxed{A \cup B\ \{x \in R \mid x < -2\}}$$

3) $A \cap C$:

$$\log(x+4) \leq 0, \text{ com } 0 < x+4;$$

então temos que:

$$\log(x+4) \leq 0 \Rightarrow 0 < x+4 \leq 1 \Rightarrow -4 < x \leq -3$$

$$\boxed{A \cap C = \{x \in R / -4 < x \leq -3\}}$$

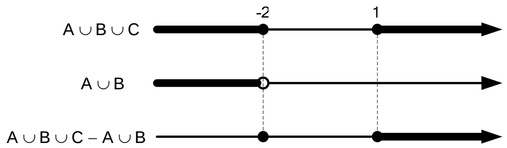
4) $B \cap C$:

$$0 \leq 2x+7 < 2 \Rightarrow \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2} \Rightarrow$$

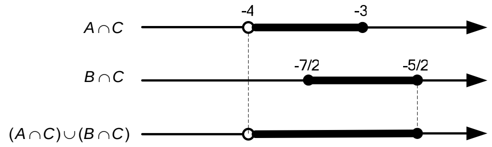
$$\boxed{B \cap C = \left\{x \in R \,/\, \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2}\right\}}$$

Assim:

$$(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = \{x \in R / x \geq 1 \text{ ou } x = -2\}$$

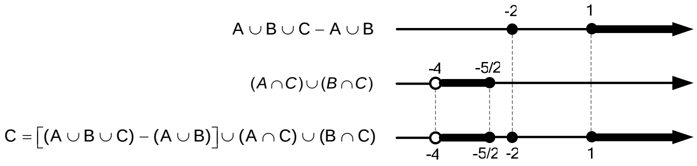


$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\left\{x\in R / -4<x\le -\frac{5}{2}\right\}$$



Logo, temos:

$$C=\left[(A\cup B\cup C)-(A\cup B)\right]\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$$



$$C=\left\{x\in R / -4<x\le -\frac{5}{2} \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x\ge 1\right\}$$

QUESTÃO 22

Determine o conjunto A formado por todos os números complexos *z* tais que

$$\frac{\bar{z}}{z-2i}+\frac{2z}{\bar{z}+2i}=3 \text{ e } 0<|z-2i|\le 1.$$

Resolução

Fazendo $w=\dfrac{\bar{z}}{z-2i}$, temos que $\dfrac{2z}{\bar{z}+2i}=2.\bar{w}$. Substituindo, temos $w+2.\bar{w}=3$. Fazendo w = a +bi, vem 3a -2bi = 3, logo a = 1 e b = 0, ou seja, w = 1. Portanto,

$$\frac{\bar{z}}{z-2i}=1\Rightarrow \bar{z}=z-2i\,.$$

Substituindo z por x + iy, temos:

$$x-iy=x+i.y-2i\Rightarrow -y=y-2\Rightarrow y=1$$

Como $0<|z-2i|\le 1\Rightarrow 0<\sqrt{x^2+(1-2)^2}\le 1\Rightarrow 0<\sqrt{x^2+1}\le 1$

$$0<x^2+1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 0\Rightarrow x=0\,.$$

Portanto, z = x + iy = i, ou seja, A = {i}.

QUESTÃO 23

Seja k um número inteiro positivo e

$A_k = \{ j\in N : j\le k \text{ e mdc } (j,k) = 1 \}$

Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Resolução

A partir da caracterização do conjunto A_k, temos que tal conjunto considera como elementos os números que são coprimos com k.

Para calcular a quantidade de números que são coprimos com k, podemos usar a função φ de Euler, que é calculada da seguinte forma:

Dado um número natural n,cuja decomposição em primos é:$n=p_1^{\alpha 1}.p_2^{\alpha 2}...p_n^{\alpha n}$ a quantidade de números que são coprimos com n é:

$\varphi(n)=n\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$, onde p_i é o i-ésimo primo na decomposição de n.

Logo, temos:

$n(A_3)=\varphi(3)=3\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=3\cdot\dfrac{2}{3}=2$;

$n(A_9)=\varphi(9)=9.\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=9.\dfrac{2}{3}=6$;

$n(A_{27})=\varphi(27)=27.\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=27.\dfrac{2}{3}=18$;

$n(A_{81})=\varphi(81)=81.\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=81.\dfrac{2}{3}=54$;

Assim os termos (2, 6, 18, 54) formam uma PG de razão 3.

QUESTÃO 24

Considere a equação

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes reais.

Resolução

a) Para que as raízes quadradas pertençam aos reais, temos duas condições:

$$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1 \text{ e } x^2-p\ge 0\Rightarrow x^2\ge p$$

A partir da equação inicial:

$$\sqrt{x^2-p}+2.\sqrt{x^2-1}=x\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-p}\right)^2=\left(x-2\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

$$x^2-p=x^2-4x\sqrt{x^2-1}+4x^2-4$$

$$4x\sqrt{x^2-1}=p+4x^2-4$$

$$\Rightarrow\left(4x\sqrt{x^2-1}\right)^2=\left(p+4x^2-4\right)^2$$

$$16x^4-16x^2=p^2+16x^4+16+8px^2-8p-32x^2$$

$$(16-8p)x^2-p^2-16+8p=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{8p-p^2-16}{8p-16}=\frac{-(p-4)^2}{8(p-2)}=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}$$

Da condição $x^2\ge p$, temos

$$\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}\ge p\Rightarrow\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}-p\ge 0\Rightarrow\frac{9p^2-24p+16}{16-8p}\ge 0$$

Considerando apenas o numerador e igualando-o a zero, temos:

$$\Delta=(-24)^2-4.9.16=0$$

Logo, para qualquer valor real de p temos que $9p^2-24p+16\ge 0$ e assume valor nulo em $p=\dfrac{24\pm 0}{18}=\dfrac{4}{3}$. Assim, como o numerador sempre é não-negativo, segue que $16-8p>0\Rightarrow p<2$

Como a equação do enunciado deve ser satisfeita:

$$\left(\sqrt{x^2-p}+2.\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2:$$

$$(x^2-p)+4(x^2-1)+4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=x^2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=p-4x^2+4$$

Como a raiz deve existir, segue que $p-4x^2+4\ge 0$.

$$\Rightarrow x^2\le\frac{p+4}{4}\Rightarrow x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}\le\frac{p+4}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{p^2-8p+16}{2(2-p)}-p-4\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{p^2-8p+16-(4-2p)(p+4)}{4-2p}\le 0$$

Como $4-2p>0$ (pois p < 2), temos:

$$p^2 - 8p + 16 - 4p - 16 + 2p^2 + 8p \le 0 \Rightarrow 3p^2 - 4p \le 0 \Rightarrow 0 \le p \le \frac{4}{3}.$$

b) Se $0 \le p \le \frac{4}{3}$, temos então:

$$x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \Rightarrow x = \frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}} = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

QUESTÃO 25

Sendo x,y,z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \log\left[(x+2y)\cdot(w-3z)^{-1}\right] = 0, \\ 2^{x+3z} - 8\cdot 2^{y-3z+w} = 0, \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0. \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} \log\left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right] = 0 \\ 2^{x+3z} - 8.2^{y-3z+w} = 0 \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right] = 1 \\ 2^{x+3z} - 2^{y-3z+w+3} = 0 \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y = w-3z \Rightarrow x+2y+3z-w = 0 & (i) \\ x+3z = y-3z+w+3 \Rightarrow x-y+6z-w = 3 & (ii) \\ 2x+y+6z-2w = 8 & (iii) \end{cases}$$

Deve-se notar que $w - 3z \neq 0$, ou seja $w \neq 3z$

Fazendo-se a combinação linear (iv) = (i)+(ii)-(iii), obtém-se:

$$3z = -5 \Rightarrow z = -\frac{5}{3}$$

Substituindo o valor de z nas equações, tem-se:

$$\begin{cases} x+2y-w = 5 & (i) \\ x-y-w = 13 & (ii) \\ 2x+y-2w = 18 & (iii) \end{cases}$$

Fazendo agora a combinação linear (v) = (i)-(ii), encontra-se:

$$3y = -8 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

Substituindo o valor de y nas expressões acima, obtém-se:

$$x - w = \frac{31}{3} \Rightarrow w = x - \frac{31}{3};$$

$$w \neq 3z = -5 \Rightarrow x \neq \frac{16}{3}$$

O conjunto solução do sistema é dado por: (x;y;z;w)

$$S = \left\{ (x; -\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}; x - \frac{31}{3}), x \in \Re - \left\{\frac{16}{3}\right\} \right\}$$

QUESTÃO 26

Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Resolução

Como cada comissão possui, ao menos, 1 rapaz e 1 moça, temos então as seguintes possibilidades:

1) 1 moça e 4 rapazes: $C_{4,1}.C_{5,4} = 4.5 = 20$

2) 2 moças e 3 rapazes: $C_{4,2}.C_{5,3} = 6.10 = 60$

3) 3 moças e 2 rapazes: $C_{4,3}.C_{5,2} = 4.10 = 40$

4) 4 moças e 1 rapaz: $C_{4,4}.C_{5,1} = 1.5 = 5$

Logo, o total de comissões possíveis é igual a 20 + 60 + 40 + 5 = 125.

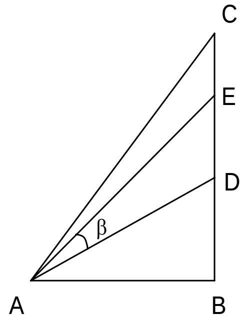
QUESTÃO 27

Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$,nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo EÂD, determine tg β em função da razão r da progressão.

Resolução

Chamando $AB = BC = x \Rightarrow \begin{cases} BD = xr \\ DE = xr^2 \\ EC = xr^3 \end{cases}$, onde r < 1 é a razão da PG.

Observe a figura:



Temos que:

$$tg\beta = tgD\hat{A}E = tg(B\hat{A}E - B\hat{A}D) = \frac{tg(B\hat{A}E) - tg(B\hat{A}D)}{1 + tg(B\hat{A}E)tg(B\hat{A}D)} \Rightarrow$$

$$tg\beta = \frac{\frac{BE}{BA} - \frac{BD}{BA}}{1 + \frac{BE}{BA}\cdot\frac{BD}{BA}} = \frac{\frac{DE}{BA}}{1 + \frac{BD+DE}{BA}\cdot\frac{BD}{BA}} =$$

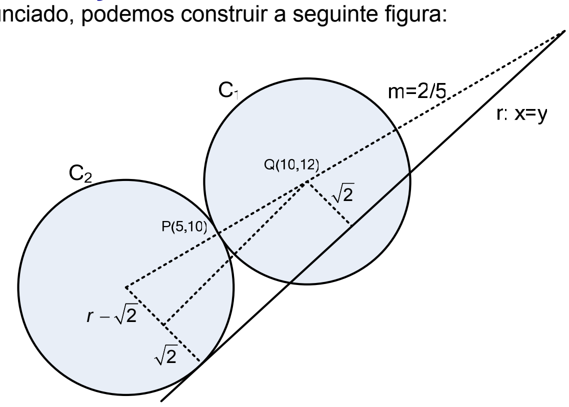
$$= \frac{\frac{xr^2}{x}}{1 + \left(\frac{xr + xr^2}{x}\right)\left(\frac{xr}{x}\right)} = \frac{r^2}{1 + r^2 + r^3}$$

QUESTÃO 28

Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em P: (5,10). O ponto Q: (10,12) é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida ela equação x=y.

Resolução

Do enunciado, podemos construir a seguinte figura:



Da figura, o raio de C_1 = $d_{Q,P}$= $\sqrt{(10-5)^2 + (12-10)^2} = \sqrt{29}$;

A distancia do ponto Q a reta (r) x-y=0 é:

$$d_{Q,r} = \frac{|1.12 - 1.10 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|12-10|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Logo a reta (r) é secante a C_1.

Como as retas (r) e a reta que passa por Q e T não são paralelas, temos um ângulo entre elas.

A reta que passa por Q e T é: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 10 & 1 \\ 10 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 40 = 0$

Cujo coeficiente angular é $\frac{2}{5}$

Se tgα e tgγ são os coeficientes angulares das duas retas, a tangente do ângulo entre elas é calculada por:

$$\text{tg}\beta = \left|\frac{tg\alpha - tg\gamma}{1 + tg\alpha tg\gamma}\right| = \left|\frac{1 - \frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}}\right| = \frac{3}{7} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

Da figura, temos: sen β = $\dfrac{r - \sqrt{2}}{r + \sqrt{29}}$

$$\frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{r - \sqrt{2}}{r + \sqrt{29}} \Rightarrow 3r + 3\sqrt{29} = r\sqrt{58} - \sqrt{106} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58} - 3} \Rightarrow$$

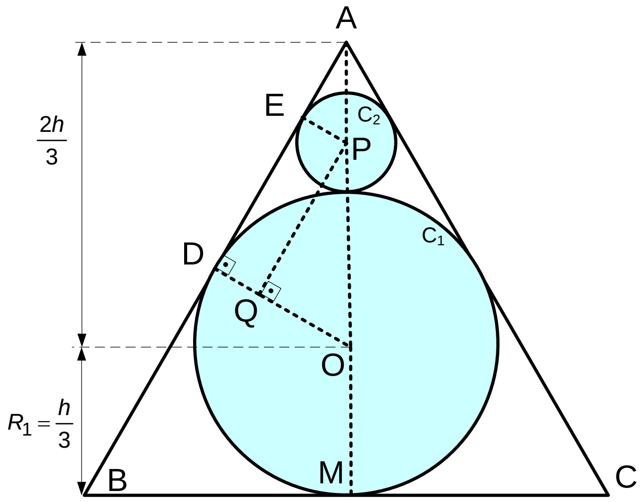
$$r = \frac{5\sqrt{29}\left(\sqrt{2.29} + 3\right)}{\left(\sqrt{58} - 3\right)\left(\sqrt{58} + 3\right)} \Rightarrow r = \frac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}$$

QUESTÃO 29

Seja C_1 uma circunferência de raio R_1, inscrita num triângulo eqüilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule
$(R_1 – R_2)/h$.

Resolução

Como o triângulo é eqüilátero, temos que o incentro se encontra na mesma posição do baricentro. Assim, a medida AO corresponde a dois terços da altura, e o raio R_1, representado por OM corresponde ao outro terço. Assim, considerando a figura abaixo:



Os triângulos OQP e ODA são semelhantes (ambos têm um ângulo reto, e o ângulo AÔD é comum).
Assim:

$$\frac{AO}{PO} = \frac{OD}{OQ} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}h}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 - R_2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}h}{\frac{h}{3} + R_2} = \frac{\frac{h}{3}}{\frac{h}{3} - R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{2h}{3} - 2R_2 = \frac{h}{3} + R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{h}{9}$$

Assim, temos que a relação pedida tem valor:

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{2}{9}$$

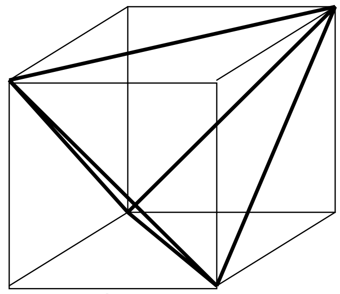
QUESTÃO 30

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume 8/3 cm^3, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

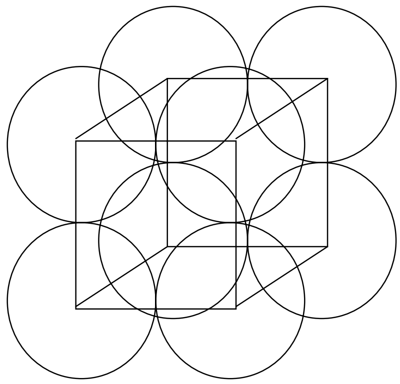
Resolução

Seja **b** a aresta do tetraedro, então o volume deste tetraedro é dado por:

$$V = b^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \frac{8}{3} = b^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$



Note a aresta do tetraedro é dada pela diagonal de face do cubo de aresta **a**. Assim, $d = a\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 2$ cm Como as esferas tem raio igual a 1 cm, as 8 esferas (8 vértices) se tangenciam conforme a figura abaixo, não havendo área comum a duas esferas quaisquer.



Notamos que 1/8 de cada esfera fica interna ao cubo.
Assim, o volume da parte do cubo exterior às esferas é calculado por:

$$V_{exterior} = V_{cubo} - \frac{1}{8} \cdot V_{esferas} = a^3 - \frac{1}{8}\left(8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right)$$

$$V_{exterior} = 2^3 - \frac{1}{8}\left(8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3\right) = 8 - \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$