ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve Aprova

ITA 2006
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br (19) 3251-1012

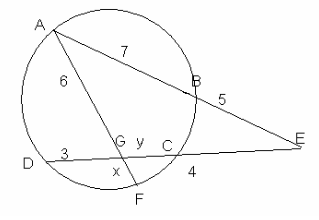
MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, GD = 3 e $AG = 6$, então GF vale

a) 1 b)2 c)3 d)4 e)5

Resolução — Alternativa D



Sendo E um ponto externo à circunferência acima, podemos escrever AE.BE=DE.CE

$\Rightarrow 5.12 = 4.(7+y) \Rightarrow y = 8$.

Observando o ponto G, interno à circunferência, podemos escrever AG.GF=DG.GC

$\Rightarrow 6x = 3.y \Rightarrow x = 4$.

QUESTÃO 2

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se A,B $\in$ S, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}
b) $n/2$, se n for par, e $(n + 1)/2$ se n for ímpar
c) n+1
d) $2^n - 1$
e) $2^{n-1} + 1$

Resolução — Alternativa C

Sendo S um subconjunto de P(U), e $A,B \in S \Rightarrow$ A e B são subconjuntos com no máximo n elementos cada.

Considere então $A_n \in S$ um conjunto com n elementos. Dessa forma, sabemos que qualquer elemento $B \in S$, com $B \neq A_n$ deve ser subconjunto de A_n, uma vez que A_n é máximo. Assim, o número de elementos de B é, no máximo, n-1. Considerando todos os subconjuntos de A_n com n-1 elementos, afirmamos que B é único, uma vez que se houvesse um outro subconjunto C de A com n-1 elementos e diferente de B então teríamos que $C \not\subset B$ e $B \not\subset C$, o que contraria a hipótese. Seja então $B=A_{n-1}$.

Continuando o raciocínio para A_{n-1}, podemos montar a seguinte seqüência de inclusão:

$$\varnothing \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n$$

onde cada índice indica o número de elementos presentes no conjunto, e $\forall A_i$, $A_i \in S$. Essa seqüência torna S o maior possível, logo, temos que o maior S é o conjunto

$$\{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\},$$

que possui n+1 elementos.

QUESTÃO 3

Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B\setminus A)$, $n(A\setminus B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B\setminus A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A\setminus B)$ é igual a

a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

Resolução — Alternativa B

De acordo com o enunciado, temos que $n(B\setminus A)$, $n(A\setminus B)$ e $n(A \cap B)$ formam uma PA de razão r, onde $n(B\setminus A) = 4$ e $n(A \cup B) = 64 - r$. Assim, temos:

$$n(A \cup B) = 64 - r = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) \qquad \text{(I)}$$

Como $n(B\setminus A) = n(A\setminus B) - r$ e $n(A \cap B) = n(A\setminus B) + r$, então

$$n(A \cup B) = 64 - r = 2n(A \setminus B) + n(A \setminus B) = 3n(A \setminus B)$$

Logo $64 - r = 3(4 + r) = 12 + 3r \Rightarrow r = 13$.

Portanto, $n(A \setminus B) = 4 + r = 17$.

QUESTÃO 4

Seja f: R $\to$ R definida por $f(x) = \sqrt{77}\ \text{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in R : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty,0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0,+\infty)$, então $m + n$ é igual a

a) $2\pi/15$ b) $\pi/15$ c) $-\pi/30$ d) $-\pi/15$ e) $2\pi/15$

Resolução — Alternativa E

Como $m \in B \cap (-\infty,0) \Rightarrow m<0$ e $f(m)=0$

$n \in B \cap (0,\infty) \Rightarrow n>0$ e $f(n)=0$

sendo $f(m)= \sqrt{77}\text{sen}\left[5\left(m+\frac{\pi}{6}\right)\right]=0 \Rightarrow \text{sen}[5(m+\frac{\pi}{6})]=0$

$\Rightarrow 5(m+\frac{\pi}{6}) = 0+k\pi \Rightarrow m+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{5}$

$\Rightarrow m=\frac{6k\pi-5\pi}{30}=\frac{(6k-5)\pi}{30}$, com k inteiro.

Como m é o maior elemento de B e m < 0, devemos escolher k = 0. Assim, temos: $m=-\frac{5\pi}{30}=-\frac{\pi}{6}$

$f(n)= \sqrt{77}\text{sen}\left[5\left(n+\frac{\pi}{6}\right)\right]=0 \Rightarrow \text{sen}[5(n+\frac{\pi}{6})]=0 \Rightarrow n=\frac{(6k-5)\pi}{30}$

Como n é o menor elemento de B e n > 0, devemos escolher k = 1. Assim, temos:

$$n=\frac{\pi}{30}$$

Assim $m+n=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{30}=-\frac{4\pi}{30}=-\frac{2\pi}{15}$

QUESTÃO 5

Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

a) $(-1,0) \cup (0,1)$ b) $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ c) $(-1,1)$
d) $(0, \infty)$ e) $(-\infty,+\infty)$

Resolução — Alternativa C

Considerando $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$. Fazendo $y = a^x$, podemos reescrever a equação como $\frac{y - y^{-1}}{y + y^{-1}} = m$. Assim, temos:

$$m = \frac{(y^2-1)/y}{(y^2+1)/y} = \frac{(y^2-1)}{(y^2+1)}$$

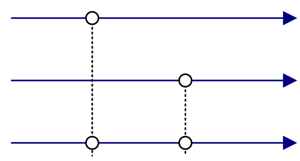
Portanto $y^2 - 1 = m(y^2+1)$

$\Rightarrow y^2 - 1 = m.y^2 + m \Rightarrow (1-m)y^2 = 1+m$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1+m}{1-m}$

Para uma solução real, temos que considerar $\frac{1+m}{1-m} > 0$

Resolvendo a inequação $\frac{1+m}{1-m} > 0$, temos -1<m<+1:



Assim, $m \in (-1; 1)$.

QUESTÃO 6

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4.30$ b) $4^3.60$ c) $5^3.60$ d) $\binom{7}{3}.4^3$ e) $\binom{10}{7}$

Resolução — Alternativa A

Existem $\binom{10}{7}$ formas de responder 7 questões certas em 10; porém, para cada uma destas existem 4 maneiras de escolher uma alternativa errada em cada uma das outras 3 questões; portanto, o número de formas possíveis de o candidato acertar **APENAS** 7 questões é:

$$\binom{10}{7}.4^3 = 120.4^3 = 4^4.30 .$$

QUESTÃO 7

Considere as seguintes afirmações sobre a expressão

$$S = \sum_{k=0}^{101}\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right):$$

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita
II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3
III. S = 3451
IV. S ≤ 3434 + $\log_8\sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e III	b) II e III	c) II e IV	d) II	e) III

Resolução — Alternativa B

Considere a seqüência dada por na onde:

$$a_n = \log_8 4^n\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{2n+0,5} = \frac{2n+0,5}{3} = \frac{1}{6}+\frac{2n}{3}$$

Dessa forma, a seqüência é uma PA de razão 2/3, o que torna falsa a afirmação (I) e valida a afirmação (II). Logo, S é a soma dos 102 primeiros termos da seqüência (de n=0 até n=101). Assim, temos

$$S = \sum_{k=0}^{101}\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right) = \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S = 51.\left(\log_8\sqrt{2}+\log_8 4^{101}\sqrt{2}\right) = 51.\left(\frac{1}{6}+\frac{405}{6}\right).$$

Assim, encontramos $S = 3451$, o que valida a afirmação (III), e torna falsa a afirmação (IV).

QUESTÃO 8

Se para todo $z \in$ C, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então, para todo $z \in$ C, $\overline{f(1)}\,f(z)+ f(1)\,\overline{f(z)}$ é igual a

a) 1 b) 2z c) 2 Re z d) 2Im z e) $2|z|^2$

Resolução — Alternativa C

Se |f(z)-f(1)|= |z-1|, podemos escrever:

$(f(z)-f(1)).\overline{(f(z)-f(1))} = |z-1|^2 \Rightarrow (f(z)-f(1)).(\overline{f(z)}-\overline{f(1)}) = |z-1|^2$.

Desenvolvendo a expressão acima temos:

$$f(z)\overline{f(z)} + f(1)\overline{f(1)} - \left[f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)}\right] = |z-1|^2$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 + |f(1)|^2 - \left[f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)}\right] = |z-1|^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 + 1 - \left[f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)}\right] = |z-1|^2$$

$$\Rightarrow f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)} = |z|^2 + 1 - |z-1|^2$$

$$\Rightarrow f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 + 1 - [\mathrm{Re}(z-1)]^2 - [\mathrm{Im}(z-1)]^2$$

$$\Rightarrow f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 + 1 - [\mathrm{Re}(z)]^2 + 2\mathrm{Re}(z) - 1 - [\mathrm{Im}(z)]^2$$

$$\Rightarrow f(1)\overline{f(z)} + f(z)\overline{f(1)} = 2\mathrm{Re}(z)$$

QUESTÃO 9

O conjunto solução de $(\mathrm{tg}^2x - 1)(1 - \mathrm{cotg}^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$, é

a) $\{\pi/3 + k\pi/4,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{\pi/4 + k\pi/4,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{\pi/6 + k\pi/4,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{\pi/8 + k\pi/4,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\{\pi/12 + k\pi/4,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

Resolução — Alternativa D

Expandindo nossa expressão em senos e cossenos, temos

$$\left(\frac{sen^2x}{\cos^2x}-1\right)\left(1-\frac{\cos^2x}{sen^2x}\right) = \left(\frac{sen^2x-\cos^2x}{\cos^2x}\right)\left(\frac{sen^2x-\cos^2x}{sen^2x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(sen^2x-\cos^2x\right)^2}{sen^2x.\cos^2x}\right) = \left(\frac{\cos^2 2x}{\frac{sen^2 2x}{4}}\right) = 4.tg^2 2x = 4$$

$$\Rightarrow .tg^2 2x = 1 \Rightarrow tg\,2x = \pm 1$$

Dessa forma, temos então $2x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, com $k \in Z$.

QUESTÃO 10

Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $Z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\,sen(n\alpha)$, então, é verdade que

a) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π
c) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

Resolução — Alternativa B

Seja z dado por $z=|z|\,[\cos\alpha+i\,sen\alpha]$.

Assim $\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = (\cos\alpha+i\,sen\alpha)^n = \cos(n\alpha)+i\,sen(n\alpha)$

Como, por hipótese, $\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = i\,sen(n\alpha)$, temos $\cos(n\alpha)=0$

$\Rightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow 2n\alpha=\pi+2k\pi \Rightarrow 2n\alpha-\pi=2k\pi \Rightarrow 2n\alpha-\pi$ é múltiplo de 2π

QUESTÃO 11

A condição para que as constantes reais *a* e *b* tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x+y+3z = 2 \\ x+2y+5z = 1 \\ 2x+2y+az = b \end{cases}$ é

a) $a - b \neq 2$ b) a + b = 10 c) 4a - 6b = 0
d) a/b = 3/2 e) a.b=24

Resolução — Alternativa A

O determinante associado ao sistema é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = (2a+10+6)-(12+10+a) = a-6$$

Para que esse sistema não seja possível e determinado

$$\det(A)=0 \Rightarrow a = 6.$$

Substituindo o valor de a, encontrado e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+3z = 2 \\ x+2y+5z = 1 \\ 2x+2y+6z = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z = 2 \\ y+2z = -1 \\ 0z = -4+b \end{cases}$$

Assim, para que o sistema seja incompatível devemos ter

$$-4+b \neq 0 \Rightarrow b \neq 4.$$

O sistema será incompatível (impossível) se

a=6 e $b \neq 4$, ou seja $a - b \neq 2$

QUESTÃO 12

Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$ então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

Resolução — Alternativa D

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = -2.3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$=-6.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6.2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = -12.(-1) = 12$$

QUESTÃO 13

Seja *p* um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1-*i* como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de *p* são, respectivamente, 10 e -40. Sendo afirmado que três raízes de *p* são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

a) $3/2-\sqrt{193}/6,\ 3,\ 3/2+\sqrt{193}/6$

b) $2-4\sqrt{13},\ 2,\ 2+4\sqrt{13}$
c) -4, 2, 8
d) 2, 3, 8
e) -1, 2, 5

Resolução — Alternativa E

Como 1-i é raiz de multiplicidade 2 e p possui coeficientes reais, sabemos que 1+i também é raiz de p, com a mesma multiplicidade. Assim, as sete raízes de p são {1-i, 1-i, 1+i, 1+i, a, b, c}, onde (a,b,c) é uma PA de razão r formada por números reais.
Dessa forma:

$$a+b+c+2.(1+i)+2.(1-i)=4+a+b+c=10 \Rightarrow a+b+c=6$$

$$a.b.c.(1+i)^2(1-i)^2=4.a.b.c=-40 \Rightarrow a.b.c=-10$$

Fazendo a=b-r e c=b+r, temos $3b=6 \Rightarrow b=2$

Além disso, temos $(b-r)(b+r).2=-10 \Rightarrow b^2-r^2=-5$

$\Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3$.

Se r = 3, temos a = -1, b = 2 e c = 5; se r = -3, temos a = 5, b = 2 e c = -1.
Logo, temos que as outras raízes são -1, 2 e 5.

QUESTÃO 14

Sobre o polinômio $p(x)=x^5-5x^3+4x^2-3x-2$ podemos afirmar que
a) $x=2$ não é raiz de p
b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais
c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira
d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras
e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

Resolução — Alternativa E

Observemos que x = 2 é raiz da equação já que

$$p(2)=2^5-5.2^3+4.2^2-3.2-2=0$$

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini podemos fatorar o polinômio p(x):

	1	0	-5	4	-3	-2
2	1	2	-1	2	1	0

Assim, p(x) pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x)=(x-2)\left(x^4+2x^3-x^2+2x+1\right)$$

Para encontrarmos as demais raízes de p(x) vamos dividir o fator $x^4+2x^3-x^2+2x+1$ por x^2 (observando que x=0 não é raiz da equação):

$$\frac{x^4+2x^3-x^2+2x+1}{x^2}=\frac{0}{x^2} \Rightarrow x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

Fazendo $u=x+\frac{1}{x}$:

$$u^2-2+2u-1=0 \Rightarrow u^2+2u-3=0$$

Suas raízes são dadas por: -3 e 1.

Se u = -3, temos:

$$x+\frac{1}{x}=-3 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ (duas raízes irracionais)

Se u = 1 temos:

$$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$ (duas raízes complexas)

QUESTÃO 15

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado $\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\(a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$ Considere as seguintes afirmações:
I. O sistema é possível e indeterminado se $a=b=0$
II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos
III. $x^2+y^2=(a^2+b^2)^{-1}$, se $a^2+b^2\neq 0$
Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas
a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

Resolução — Alternativa E

A afirmação I é falsa pois se a=b=0 temos:

$$\begin{cases}0x-0y=1\\0x+0y=1\end{cases} \Rightarrow \text{Sistema impossível}$$

2) A afirmação II é verdadeira já que

$$D=\begin{vmatrix}a-b & -(a+b)\\ a+b & a-b\end{vmatrix}$$
$$=(a-b)^2+(a+b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2$$
$$=2(a^2+b^2)\neq 0 \quad \forall a,b\neq 0$$

3) Quanto a afirmação III, se $a,b\neq 0$ podemos escrever:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -(a+b)\\ 1 & a-b\end{vmatrix}}{2(a^2+b^2)}=\frac{a-b+a+b}{2(a^2+b^2)}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a-b & 1\\ a+b & 1\end{vmatrix}}{2(a^2+b^2)}=\frac{a-b-a-b}{2(a^2+b^2)}=-\frac{b}{a^2+b^2}$$

Assim,

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}=(a^2+b^2)^{-1}$$

Portanto a afirmação III é verdadeira.

QUESTÃO 16

Considere o polinômio $p(x)=x^3-(a+1)x+a$, onde $a\in\mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é.
a) $\{2n, n\in\mathbb{N}\}$ b) $\{4n^2, n\in\mathbb{N}\}$
c) $\{6n^2-4n, n\in\mathbb{N}\}$ d) $\{n(n+1), n\in\mathbb{N}\}$
e) $\mathbb{N}$

Resolução — Alternativa D

Observe que 1 é raiz de p(x). Utilizando o dispositivo de Briot Ruffini temos:

	1	0	-a-1	a
1	1	1	-a	0

Temos então
$p'(x)=x^3-(a+1)x+a=x(x^2-1)-a(x-1)=x(x-1)(x+1)-a(x-1)$
Assim, $p'(x)=(x-1)[x(x+1)-a]=(x-1)(x^2+x-a)$
$x-1=0$ ou $x^2+x-a=0$
I) $x-1=0 \Rightarrow x=1$ é raiz novamente (raiz dupla)
II) $x^2+x-a=0$

As raízes de x^2+x-a são dadas por: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

Considerando x um inteiro n, temos:

$$\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}=n \Rightarrow \pm\sqrt{1+4a}=2n+1$$

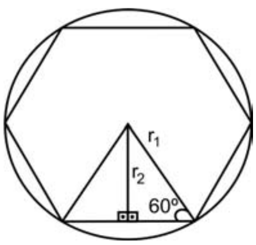
$\pm\sqrt{1+4a}=2n+1$
Assim temos: $1+4a=(2n+1)^2$
$\Rightarrow 4a=(2n+1)^2-1 \Rightarrow 4a=(2n+1-1)(2n+1+1) \Rightarrow 4a=2n.2(n+1)$
$\Rightarrow a=n(n+1),\ n\in\mathbb{Z}$

Como tratamos de números inteiros, $n(n+1)\geq 0$. Assim, os conjuntos {n(n+1), n∈Z} e {n(n+1), n∈Z} apresentam os mesmos elementos.

QUESTÃO 17

Numa circunferência C_1 de raio $r_1=3$ *cm* está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a .
a) $54\sqrt{2}$ b) $54\sqrt{3}$ c) $36(1+\sqrt{3})$
d) $27(2-\sqrt{3})$ e) $30(2+\sqrt{3})$

Resolução — Alternativa B



O lado do hexágono H_1, inscrito na circunferência C_1 de raio r_1 = 3cm, é ℓ_1= 3cm.

Logo, sua área é: $A_1 = \dfrac{6.\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (seis triângulos equiláteros) $\Rightarrow A_1 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2

O lado o hexágono H_2 será r_2 (raio da circunferência C_2 e altura do triângulo eqüilátero da figura).
Podemos escrever:

$$\text{sen}60^o = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm} = l_2$$

Logo, $$A_2 = \frac{6.\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{8}\ \text{cm}^2$$

Como o raio da próxima circunferência (altura do triângulo) é sempre o lado da circunferência anterior vezes sen60º, podemos notar que a área da próxima circunferência é a área da anterior vezes sen^{2}60º.

Percebemos, então, que (A_1, A_2, A_3, ...) = $\left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2}, \dfrac{81\sqrt{3}}{8}, \dfrac{243\sqrt{3}}{32}, \ldots\right)$

formam uma Progressão Geométrica infinita de razão $q = \text{sen}^2 60^o = \dfrac{3}{4}$

e $a_1 = A_1$.

Logo, $$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

QUESTÃO 18

Sejam a reta *s*: *12x-5y+7=0* e a circunferência C: *$x^2+y^2+4x+2y=11$*. A reta *p,* que é perpendicular a *s* e é secante a C, corta o eixo *Oy* num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

a) $\left(-\dfrac{91}{12}, -\dfrac{81}{12}\right)$ b) $\left(-\dfrac{81}{12}, -\dfrac{74}{12}\right)$ c) $\left(-\dfrac{74}{12}, -\dfrac{30}{12}\right)$

d) $\left(\dfrac{30}{12}, \dfrac{74}{12}\right)$ e) $\left(\dfrac{75}{12}, \dfrac{91}{12}\right)$

Resolução — Sem resposta

Considere a equação geral da reta s dada por 12x – 5y + 7 = 0.

Escrevendo a sua equação reduzida temos: $y = \dfrac{12x}{5} + \dfrac{7}{5}$, de onde observamos que seu coeficiente angular é m_s=12/5.

Por hipótese, temos que a reta p é perpendicular a s, assim, m_p . m_s = -1, onde m_p e m_s são respectivamente os coeficientes angulares das retas p e s.

Temos então m_p = – 5 /12. Assim, a família das retas perpendiculares a s é da forma: 5x + 12y + k = 0.

Escrevendo a equação da circunferência C na forma reduzida temos $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$. Para encontrar o intervalo desejado, iremos encontrar quais retas da família dada são tangentes a C (casos extremos).

p é tangente a C ⇔ d(O,s) = R, onde O é o centro de C e R o seu raio.

$$d(O,s) = R \Rightarrow \frac{|5.(-2)+12.(-1)+k|}{\sqrt{12^2+5^2}} = 4 \Rightarrow -22+k = \pm 52 \Rightarrow$$
$$k = -30 \text{ ou } k = +74$$

Assim, as tangentes são:

$$\begin{cases} 5x+12y-30=0 \Rightarrow y = \dfrac{-5x}{12} + \dfrac{30}{12} \\ 5x+12y+74=0 \Rightarrow y = \dfrac{-5x}{12} - \dfrac{74}{12} \end{cases}$$

O intervalo pedido é: $\left(\dfrac{-74}{12}, \dfrac{30}{12}\right)$. Não há alternativa.

Questão deve ser ANULADA. Provavelmente houve erro de digitação na alternativa C, trocando $+\dfrac{30}{12}$ por $-\dfrac{30}{12}$.

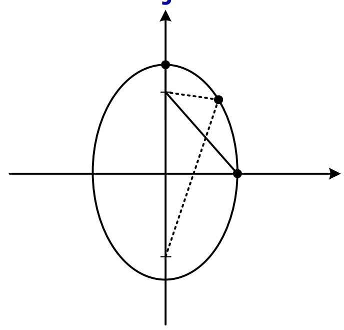
QUESTÃO 19

Os focos de uma elipse são *F_1(0,-6)* e *F_2(0,6).* Os pontos *A*(0,9) e *B*(x,3), x>0, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em *B, F_1 e F_2.*é igual a

a) $22\sqrt{10}$ b) $18\sqrt{10}$ c) $15\sqrt{10}$

d) $12\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

Resolução — Alternativa D



Como $9^2=a^2+6^2 \Rightarrow a^2=81+36 \Rightarrow$ $a^2=45 \Rightarrow a=3\sqrt{5}$

Podemos escrever a equação da elipse da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1$$

Assim temos,

$$\frac{x^2}{\left(3\sqrt{5}\right)^2} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Como B(x,3) é um ponto da elipse, podemos substituir suas coordenadas na equação da mesma, o que nos leva a

$$\frac{x^2}{45} + \frac{3^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{9}{81} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{45} = \frac{8}{9} \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

Queremos a área do triângulo BF_1F_2:

$$S = \frac{\textit{base} \ . \ \textit{altura}}{2} = \frac{F_1F_2.x}{2} = \frac{12.2\sqrt{10}}{2} = 12\sqrt{10}$$

QUESTÃO 20

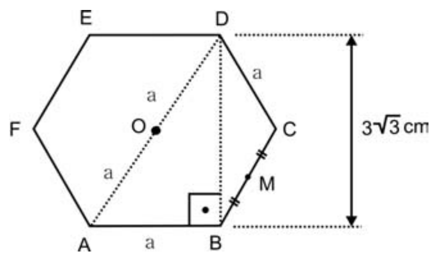
Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede 34 *cm.* As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em *cm^2,* é

a) $81\sqrt{3}/2$ b) $81\sqrt{2}/2$ c) 81/2

d) $27\sqrt{3}$ e) $27\sqrt{2}$

Resolução — Alternativa A

Vista superior



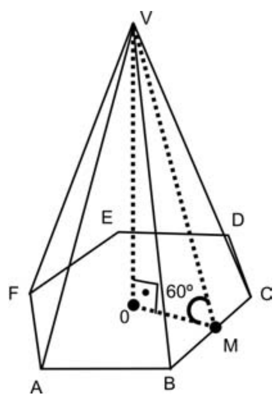
Utilizando o Teorema de Pitágoras no ΔABD, temos:

$$\left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 \Rightarrow (2a)^2 = (a)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a = 3\text{cm}.$$

O apótema da base da pirâmide será dado por:

$$\overline{OM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}.$$

Para determinarmos a área lateral, será necessária a altura das faces:



Pelo enunciado, sabemos que $\angle$ OMV = 60°, então:

$$\overline{MV} = \frac{\overline{OM}}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

∴ A Área da Pirâmide é dada por: $A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base}$

$$A_{Total} = 6.\left[\frac{3.3\sqrt{3}}{2}\right] + 6.\left[\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\right] \Rightarrow A_{Total}$$
$$= \frac{54\sqrt{3}}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A_{Total} = \frac{81\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

QUESTÃO 21

Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos *que: F= {A₁, ... ,Aₘ}* $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset P(A)$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset$, $i = 1,\ldots,m$

II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i,j = 1,\ldots,m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$

Dizemos ainda que: F é uma partição de ordem k se $n(A_i) = k$, $i = 1,\ldots,m$. Supondo que $n(A) = 8$, determine:

a) As ordens possíveis para uma partição de A

b) O número de partições de A que têm ordem 2

Resolução

a) Se t tem 8 elementos pode-se criar partições de t de ordem 1, 2, 4 e 8. Isso se deve ao fato de que esses são os possíveis divisores de 8.

Exemplo: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Ordem 1 {{1},{2},{3},{4},{5},{6},{7},{8}}

Ordem 2 {{1,2}, {3,4}, {5,6},{7,8}}

Ordem 4 {{1,2,3,4} {5,6,7,8}}

Ordem 8 {{1,2,3,4,5,6,7,8}}

b) Para partições de ordem 2, deve-se agrupar os elementos de A 2 a 2. Assim, o total de possibilidades de agrupamento é $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 28.15.6.1 = 2520$. Entretanto, não existe uma ordem entre os elementos da partição, logo, o total de partições será $\frac{2520}{4!} = 105$.

QUESTÃO 22

Seja f: [0, 1) → IR definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$. Seja g: (-1/2, 1/2) → IR dada por $g(x) = \begin{cases} f(x+1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x+1/2), & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$ com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Resolução

Pelo enunciado, podemos admitir que

$$f(x+1/2) = \begin{cases} 2(x+1/2), & 0 \le x+1/2 < 1/2 \\ 2(x+1/2)-1, & 1/2 \le x+1/2 < 1 \end{cases}.$$

Assim, temos $f(x+1/2) = \begin{cases} 2x+1, & -1/2 \le x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$.

Substituindo a expressão acima em g(x), encontramos:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1/2 < x < 0 \\ 1-2x, & 0 \le x < 1/2 \end{cases}.$$

Assim, temos:

$$g(-x) = \begin{cases} 2(-x)+1, & -1/2 < -x < 0 \\ 1-2(-x), & 0 \le -x < 1/2 \end{cases} \Rightarrow g(-x) = \begin{cases} -2x+1, & 0 < x < 1/2 \\ 1+2x, & -1/2 < x \le 0 \end{cases}.$$

Assim, g(x)=g(-x) para todo $x \in (-1/2, 1/2)$, portanto g é par.

QUESTÃO 23

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$

Resolução

O termo geral do desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$ é dado por: $G = \frac{9!}{a!\,b!\,c!}(1)^a\cdot(x)^b\cdot(x^2)^c;\ a+b+c=9$, sendo a, b, c números naturais.

Para se obter o termo com x^4, nossa restrição é b+2c=4.

Desta maneira, as soluções possíveis para a, b e c são {(6,2,1);(5,4,0);(7,0,2)}.

Substituindo os valores possíveis em G, encontramos

$$\left(\frac{9!}{6!2!1!} + \frac{9!}{5!4!0!} + \frac{9!}{7!0!2!}\right)(x)^4 = 414x^4$$

QUESTÃO 24

Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x}(4sen^2x - 1) - \log_{\cos x}(4 - sec^2x) > 2$$

Resolução

Pelo enunciado, podemos escrever

$$\log_{\cos x}\left(4sen^2x-1\right) > 2 + \log_{\cos x}\left(4-\sec^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \log_{\cos x}\left(4sen^2x-1\right) > \log_{\cos x}(\cos^2 x) + \log_{\cos x}\left(4-\sec^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \log_{\cos x}\left(4sen^2x-1\right) > \log_{\cos x}\cos^2 x.\left(4-\sec^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \log_{\cos x}\left(4sen^2x-1\right) > \log_{\cos x}\left(4\cos^2 x-1\right)$$

Da condição de existência, temos que cos x > 0.

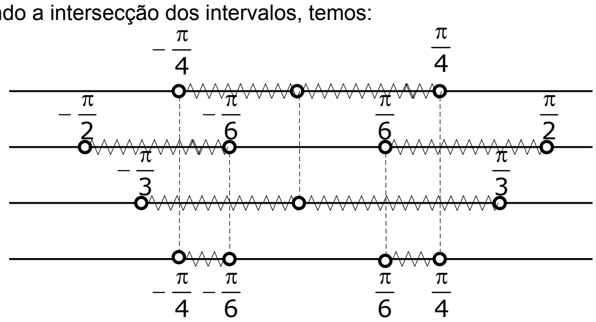
Como 0<cos x<1, a função é decrescente, assim, temos $4.sen^2x - 1 < 4.\cos^2 x - 1 \Rightarrow tg^2x < 1 \Rightarrow \frac{-\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, com x≠0.

Além disso, temos, a partir das condições de existência de logaritmos:

$$4.sen^2x - 1 > 0 \Rightarrow sen^2x > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < x < \frac{-\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$4.\cos^2 x - 1 > 0 \Rightarrow \cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

Fazendo a intersecção dos intervalos, temos:



Então o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in R \,/\, -\pi/4 < x < -\pi/6 \quad \text{ou} \quad \pi/6 < x < \pi/4\right\}$$

QUESTÃO 25

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais."

Resolução

Para o polinômio p(x), como a é racional, então todos os seus coeficientes são reais. Temos, portanto, 3 diferentes possibilidades:

1) 2 complexas conjugadas e 1 racional

2) 3 raízes racionais

3) duas irracionais da forma $b+\sqrt{c}$ e $b-\sqrt{c}$, com b, c racionais e c > 0 (pois todos os coeficientes são racionais) e uma raiz racional

Para o nosso polinômio, a hipótese 1 está descartada, pois do enunciado, todas as raízes são reais.

Como a diferença entre duas raízes é sempre racional, a hipótese 2 é uma hipótese válida para as condições do enunciado.

Para a hipótese 3, temos que a diferença $\left(b+\sqrt{c}\right) - \left(b-\sqrt{c}\right) = 2\sqrt{c}$, que não é racional ou seja, essa hipótese não é valida para as condições do enunciado.

Portanto, podemos dizer que a sentença é verdadeira.

QUESTÃO 26

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Resolução

Sejam r, h e g, o raio da base, a altura e a geratriz do cone respectivamente.

Como r, h e g formam uma PA nesta ordem, temos que:

r = h - 2 e g = h + 2

Temos $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow (h+2)^2 = (h-2)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 - 8h = 0$

Como $h \neq 0$, temos que $h - 8 = 0 \Rightarrow h = 8$

Assim, h = 8 m, r = 6 m e g = 10 m.

A área total vale:

$A = A_{base} + A_{lateral} = \pi r^2 + \pi rg = 36\pi + 60\pi = 96\pi\ m^2$

QUESTÃO 27

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Resolução

Temos que $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 99$

Pela definição da matriz inversa, temos:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot (\text{cof}.M)^t$$

Assim, para determinarmos o elemento c_{34} da matriz $C=(A+B)^{-1}$, calculamos o cofator do elemento c'_{43} da matriz

$$A+B:\ (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Portanto, o elemento pedido é: $\frac{1}{99} \cdot (-18) = \frac{-2}{11}$

QUESTÃO 28

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva *r*, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de *a* + *r*.

Resolução

Reescrevendo a PG como $(a, a.r, a.r^2, a.r^3, \ldots)$, temos

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k} + \ldots = 4 \quad (1) \\ a_3 + a_6 + a_9 + \ldots + a_{3p} + \ldots = \dfrac{16}{13} \quad (2) \end{cases}$$

Se as soma infinita de parte dos termos tende a um valor então 0 < r < 1, logo:

$\sum_1^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q}$, q razão da PG, assim:

Termos de índices pares:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots = ar + ar^3 + ar^5 + \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{PG de } 1° \text{ termo} \\ a.r \text{ e razão } r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

Assim, $ar = 4(1 - r^2)$ (I)

Termos de índices múltiplos de 3

$$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = ar^2 + ar^5 + ar^8 + \ldots \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \text{PG de } 1° \text{ termo} \\ a.r^2 \text{ e razão } r^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13}$$

Assim, $ar^2 = \frac{16}{13}(1 - r^3)$ (II)

Dividindo (II) por (I)

$$r = \frac{16/13}{4} \cdot \frac{(1-r)(1+r+r^2)}{(1-r)(1+r)} \Rightarrow 13r + 13r^2 = 4 + 4r + 4r^2 \Rightarrow$$

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$r = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{18} \Rightarrow r = \frac{-9 \pm 15}{18}$$

r = -23/18 (descartada porque r<1) ou r = 1/3

Substituindo em (I): $a = 4\left(1 - \frac{1}{9}\right).3 = \frac{32}{3} \Rightarrow a + r = 11.$

QUESTÃO 29

Sabendo que $9y^2 - 16x - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Resolução

Vamos escrever a equação reduzida da hipérbole dada, "completando os quadrados" na equação:

$9y^2 - 144y + 576 - 16x^2 + 224x - 784 = 352 + 576 - 784$, logo $9(y - 8)^2 - 16(x - 7)^2 = 144 \Rightarrow \frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} = 1$

$$\frac{(y-8)^2}{4^2} - \frac{(x-7)^2}{3^2} = 1$$

Assim temos:

$c^2 = a^2 + b^2$

b → Semi-eixo imaginário

a → Semi-eixo real

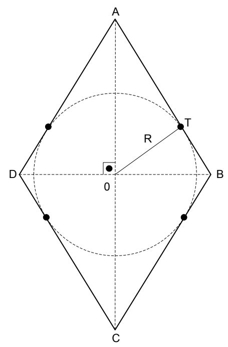
c → Semi-dist. focal

$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 25$
$c = 5$
Logo a distância focal é 10.

QUESTÃO 30

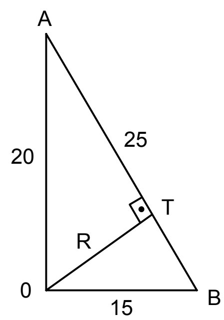
Considere um *losango ABCD* cujo perímetro mede 100 *cm* e cuja maior diagonal mede 40 *cm*. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

Resolução



Como ABCD é losango (quadrilátero eqüilátero), pode-se dizer que AB = BC = CD = AD = 25 cm e AC = 40, logo AO = 20 cm.

Percebe-se que:



De acordo com a figura, OT = R e T é ponto de tangência. Como o triângulo AOB é retângulo, temos então, pela semelhança $\Delta AOB \sim \Delta AOT$, temos OT.AB = OB.AT

$R.25 = 20.15 \Rightarrow R = 12$ cm

Finalmente, temos $A = \pi R^2 = 144\pi\ cm^2$.