

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

O ELITE RESOLVE



ITA 2005
MATEMÁTICA

**“É impossível para um homem aprender aquilo que ele
acha que já sabe.”**

Epíteto

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251-1012

MÚLTIPLA ESCOLHA

NOTAÇÕES

- C : conjunto dos números complexos.
 Q : conjunto dos números racionais.
 R : conjunto dos números reais.
 Z : conjunto dos números inteiros.
 N = {0, 1, 2, 3, ...}.
 N* = {1, 2, 3, ...}.
 ∅ : conjunto vazio.
 $A \setminus B = \{x \in A ; x \notin B\}$.
 $[a, b] = \{x \in R, a \leq x \leq b\}$.
 $]a, b[= \{x \in R, a < x < b\}$.
 i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$.
 $z = x + iy$, $x, y \in R$.
 \bar{z} : conjugado do número complexo $z \in C$.
 $|z|$: módulo do número complexo $z \in C$.
 \overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B.
 $m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de \overline{AB} .

1. Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

- I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.
 II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
 III. Existe uma função $f: S \rightarrow T$ injetiva.
 IV. Nenhuma função $g: T \rightarrow S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s):
 a) apenas I. b) apenas IV. c) apenas I e IV.
 d) apenas II e III. e) apenas III e IV.

SOLUÇÃO:

- I. Falsa, pois $\{0\} \subset S$ e não $\{0\} \in S$.
 II. Falsa, pois $\{2\} \subset S \setminus U$, porém $S \cap T \cap U = \emptyset$.
 III. Falsa, pois como $n(S) > n(T)$ não é possível fazer $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x \in S$.
 IV. Verdadeira, pois como $n(T) < n(S)$ sempre haverá um elemento de S sem correspondente em T, ou seja, o contra-domínio é diferente da imagem.

ALTERNATIVA B

2. Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R\$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R\$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
 a) R\$ 17,50. b) R\$ 16,50. c) R\$ 12,50. d) R\$ 10,50. e) R\$ 9,50.

SOLUÇÃO:

Sejam s o preço do sanduíche, x o da xícara de café, t o do pedaço de torta. Então:
 Para a mesa 1, temos: $3s + 7x + t = 31,50$ (I)
 Para a mesa 2, temos: $4s + 10x + t = 42,00$ (II)
 Fazendo $3 \cdot I - 2 \cdot II$ temos: $s + x + t = 10,50$

ALTERNATIVA D

3. Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
 a) (0, 5) e 6. b) (5, 4) e 5. c) (4, 8) e 5,5.
 d) (4, 5) e 5. e) (4, 6) e 5.

SOLUÇÃO:

Como $A = (0, 2)$ e $B = (0, 8)$ têm a mesma abscissa, e sabemos que a mediatriz de AB (a reta $y = 5$) passa pelo centro da circunferência D, temos que $y_D = 5$.
 Como $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$ têm a mesma ordenada, e sabemos que a mediatriz de BC (a reta $x = 4$) passa pelo centro da circunferência D, temos que $x_D = 4$.
 Assim, o centro da circunferência é $D = (4, 5)$.
 Para o raio temos:

$$r = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(0 - 4)^2 + (2 - 5)^2} \Rightarrow r = 5$$

ALTERNATIVA D

4. Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

- a) $x \in]0, 2[$. b) x é racional. c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
 d) x^2 é irracional. e) $x \in]2, 3[$.

SOLUÇÃO:

Como $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ tem-se:

$$x = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

Logo, x é racional.

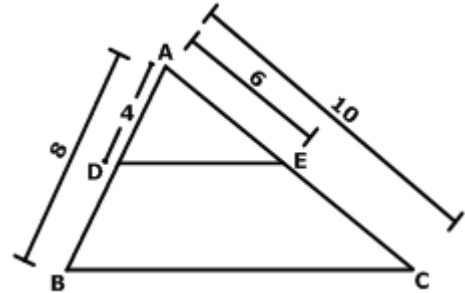
ALTERNATIVA B

5. Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado \overline{AB} e E um ponto do lado \overline{AC} . Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:

- a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $\frac{3}{8}$. d) $\frac{3}{10}$. e) $\frac{3}{4}$.

SOLUÇÃO:

A partir dos dados da questão temos a seguinte figura geométrica:



Logo, temos a razão entre as áreas:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \text{sen}\hat{A}}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}\hat{A}} = \frac{4 \cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

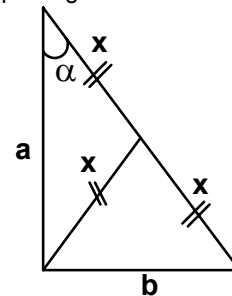
ALTERNATIVA D

6. Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

- a) $\frac{4}{5}$. b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$. c) $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. d) $\frac{1}{4} \sqrt{4 + \sqrt{3}}$. e) $\frac{1}{3} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

SOLUÇÃO:

Como o triângulo é retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa, isso pode ser observado pela figura:



Pelas condições do problema: $x = \sqrt{ab}$

Por Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 4b^2}}{2} = b(2 \pm \sqrt{3})$$

Considerando $a > b$, vem:

$$a = b(2 + \sqrt{3})$$

Portanto:

$$\cos \alpha = \frac{a}{2x} = \frac{a}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{ab}}{2b} = \frac{\sqrt{b^2(2+\sqrt{3})}}{2b}$$

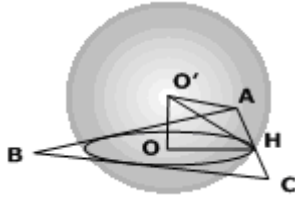
$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ALTERNATIVA C

7. A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

- a) $3\sqrt{3}$. b) 6. c) 5. d) 4. e) $2\sqrt{5}$.

SOLUÇÃO:



Considere o triângulo equilátero ABC, O o centro da circunferência e O' o centro da esfera. Sendo ℓ o lado do triângulo:

$$OH = \frac{1}{3} \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ e } AO = \frac{2}{3} \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Sendo O'H o raio da esfera, então:

$$O'H^2 = OH^2 + OO'^2 \Leftrightarrow 4^2 = (\sqrt{3})^2 + OO'^2 \Leftrightarrow OO' = \sqrt{13}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras em $\Delta O'A O$:

$$O'A^2 = O'O^2 + AO^2 \Leftrightarrow O'A^2 = 13 + 12$$

Logo, $O'A = 5$.

ALTERNATIVA C

8. Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

- a) 4. b) 3. c) 6. d) 5. e) 7.

SOLUÇÃO:

Na P.A. dada tem-se

$$a_1 = \frac{\pi \cdot r^3}{18}, R = \frac{\pi \cdot r^3}{45} \text{ e } S_n = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Aplicando a fórmula da soma da P.A., tem-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{\left\{ \frac{\pi r^3}{18} + \frac{\pi r^3}{18} + (n-1) \cdot \frac{\pi r^3}{45} \right\} \cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\{ \frac{\pi r^3}{18} + \frac{\pi r^3}{18} + (n-1) \cdot \frac{\pi r^3}{45} \right\} \cdot n}{2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Assim, simplificando a equação acima, temos:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{n-1}{45} \right) \cdot n = \frac{4}{3}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 45, vem:

$$(5 + n - 1)n = 60 \Rightarrow (n + 4) \cdot n = 60$$

Como a equação acima admite 6 e -10 como raízes, chegamos a conclusão que a esfera é intersectada por 6 planos meridianos.

ALTERNATIVA C

9. Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200° . O número de vértices deste prisma é igual a

- a) 11. b) 32. c) 10. d) 20. e) 22.

SOLUÇÃO:

Seja n o número de lados da base do prisma, fazemos a soma dos ângulos das faces laterais mais a soma dos ângulos das bases, logo:

$$360^\circ \cdot n + 2 \cdot [180^\circ \cdot (n - 2)] = 7200^\circ \Rightarrow -720^\circ + 720^\circ \cdot n = 7200^\circ \Rightarrow n = 11$$

Como o prisma é composto por duas bases de 11 lados, então seu número total de vértices é 22.

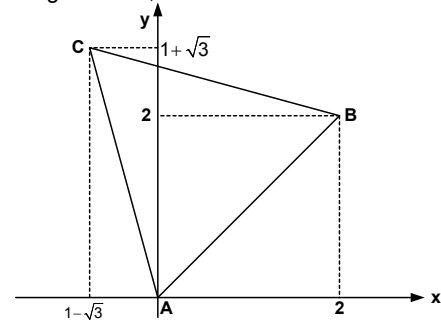
ALTERNATIVA E

10. Em relação a um sistema de eixos cartesianos ortogonais no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

- a) $\frac{8}{3}$. b) 3. c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. e) 8.

SOLUÇÃO:

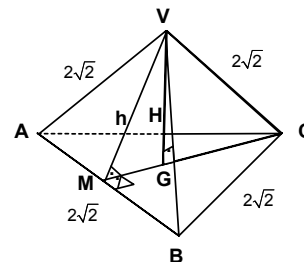
Desenhando a figura dada, temos:



Cálculo do lado do tetraedro:

$$AB = \ell = 2\sqrt{2}$$

Cálculo do volume do tetraedro com base ABC:



Aplicando Pitágoras no triângulo VMB:

$$VB^2 = MB^2 + VM^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 6$$

Aplicando Pitágoras no triângulo VMG:

$$VM^2 = MG^2 + VG^2 \Leftrightarrow h^2 = \left(\frac{1}{3}h\right)^2 + H^2 \Leftrightarrow H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{8}{3}$$

Logo o volume da pirâmide é $\frac{8}{3}$.

ALTERNATIVA A

11. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

- a) $-\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 1. e) $\frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO:

Seja $p(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ e considerando a, b e c reais, temos que a soma dos coeficientes é dada por

$$p(1) = (a - 2b + c + 1)^5 = 32$$

Então:

$$a - 2b + c + 1 = 2 \Rightarrow a - 2b + c = 1 \quad (I)$$

Como 0 e -1 são raízes, então:

$$p(0) = c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \quad (II)$$

$$p(-1) = a + 2b + c + 1 = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -1 \quad (III)$$

De (I), (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 1 \\ c = -1 \\ a + 2b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases} \therefore a + b + c = -\frac{1}{2}$$

OBSERVAÇÃO: Caso os coeficientes a , b e c fossem complexos não reais, então na extração da raiz quinta da equação $(a - 2b + c + 1)^5 = 32$, obteríamos 5 diferentes valores para a soma $a + b + c$.

ALTERNATIVA A

12. O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
a) 2499. b) 2501. c) 2500. d) 3600. e) 4900.

SOLUÇÃO:

Dada a inequação: $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq 0,01$

Podemos reescreve-la como:

$$\frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \geq 100$$

Como sabemos que $\sqrt{2500} = 50$, para a desigualdade ser verdadeira devemos ter $n \geq 2501$.

ALTERNATIVA B

13. Seja $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $f: D \rightarrow D$ uma função dada por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.

II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.

III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D, x \neq 0$.

IV. $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras

- a) apenas I e III. b) apenas I e IV. c) apenas II e III.
d) apenas I, III e IV. e) apenas II, III e IV.

SOLUÇÃO:

Analisando as afirmações:

I. Verdadeira. Para saber se f é injetiva e sobrejetiva, basta verificar se é bijetiva, então f deve possuir inversa:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{f^{-1}(y)+1}{f^{-1}(y)-1}$$

Para $f^{-1}(y) \neq 1$:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Encontramos então a inversa, que é igual a função original, e uma vez que existe inversa, a função é bijetiva.

II. Falsa. Ficou provado em (I) que f é bijetiva logo também é sobrejetiva.

III. Verdadeiro. Calculando o resultado da soma tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) + f(1/x) &= \frac{x+1}{x-1} + \frac{1/x+1}{1/x-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{(1+x)/x}{(1-x)/x} \\ &\Rightarrow f(x) + f(1/x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1+x}{x-1} = 0 \end{aligned}$$

IV. Falsa. Calculando o valor de $f(-x)$ em $x = -1$ tem-se:

$$f(-x) = f(-(-1)) = f(1)$$

Porém, $f(1)$ não existe, uma vez que $x = 1$ não está no domínio de f . Logo, não existe o produto $P = f(x) \cdot f(-x)$ para $x = -1$, invalidando a afirmação pois o produto não existe para todo $x \in D$.

ALTERNATIVA A

14. O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q,$$

com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

- a) 4. b) -4. c) 6. d) 5. e) -5.

SOLUÇÃO:

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes do polinômio, então:

$$x_1 = 2 + i \text{ e } x_2 = \bar{x}_1 = 2 - i$$

Pelas relações de Girard:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow 2 + i + 2 - i + x_3 + x_4 = -1 \\ &\Rightarrow x_3 + x_4 = -5 \end{aligned}$$

ALTERNATIVA E

15. Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{1/x},$$

onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2 \ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

- a) 0. b) -1. c) 1. d) $\ln 2$. e) 2.

SOLUÇÃO:

Dada a equação:

$$a^{x+1} = b^{1/x}$$

Aplicando \ln dos dois lados, temos:

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x} \ln b$$

Como, dado do enunciado, $\ln b = 2 \ln a > 0$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} (x+1)\ln a &= \frac{1}{x} \ln b \Rightarrow (x+1)\ln a = \frac{1}{x} 2 \ln a \Rightarrow (x+1) = \frac{2}{x} \\ &\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Logo, a soma das raízes da equação é:

$$S = \frac{-1}{1} \Rightarrow S = -1$$

ALTERNATIVA B

16. O intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan \frac{1+x}{2} + \arctan \frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

é

- a) $[-1, 4]$. b) $[-3, 1]$. c) $[-2, 3]$. d) $[0, 5]$. e) $[4, 6]$.

SOLUÇÃO:

Sabe-se que:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

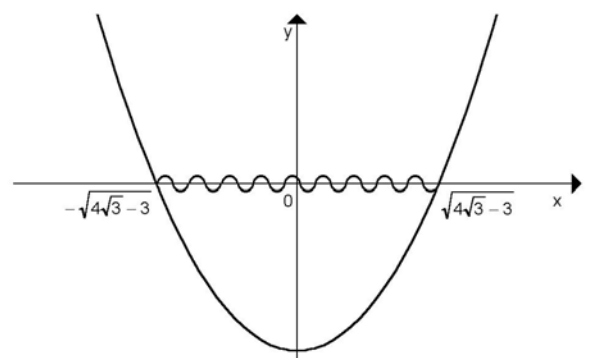
Aplicando a função tangente a ambos os membros da inequação dada, temos:

$$\frac{\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}}{1 - \left(\frac{1+x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)} \geq \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo:

$$\frac{1}{1 - \frac{(1-x^2)}{4}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4}{3+x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$

A figura abaixo apresenta o conjunto solução dessa inequação:



Dos intervalos apresentados, o único que contém o intervalo solução é $[-2;3]$.

ALTERNATIVA C

17. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left| \frac{1 - \bar{z}w}{z - w} \right|$ assume

- valor:
a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

SOLUÇÃO:

Sabe-se que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Como $|z| = 1$, então $z \cdot \bar{z} = 1$.

Substituindo o resultado acima na expressão dada temos:

$$\left| \frac{1 - \bar{z}w}{z - w} \right| = \left| \frac{z \cdot \bar{z} - \bar{z}w}{z - w} \right| = \left| \frac{\bar{z}(z - w)}{z - w} \right| = |\bar{z}| = |z| = 1$$

Logo, $\left| \frac{1 - \bar{z}w}{z - w} \right| = 1, \forall w \in \mathbb{C} / w \neq z$.

ALTERNATIVA D

18. O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a
a) -1. b) 0. c) 1. d) 2. e) -2.

SOLUÇÃO:

A condição necessária para que o sistema linear não admita solução é $\det = 0$:

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b^3 + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

Para $b = -1$:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Somando-se as três equações, obtemos $0 = 3$, que é um absurdo, portanto verificando que o sistema não admite solução.

ALTERNATIVA A

19. Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é
a) 0,21. b) 0,25. c) 0,28. d) 0,35. e) 0,40.

SOLUÇÃO:

Calculo de P_1 :

Temos inicialmente 16 bolas na urna, sendo 11 não-azuis, tirando as bolas sem reposição, a probabilidade P_1 é dada por:

$$P_1 = \frac{11}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14}$$

Calculo de P_2 :

$$P_2 = V + A + B$$

Onde:

- V = Probabilidade de serem todas verdes
A = Probabilidade de serem todas azuis
B = Probabilidade de serem todas brancas

Temos:

$$V = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14}; \quad A = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14}; \quad B = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}$$

Logo:

$$P_1 + P_2 = P_1 + V + A + B = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 5}{16 \cdot 15 \cdot 14}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1284}{3360} \cong 0,382$$

Das alternativas dadas, o valor que mais se aproxima é 0,40.

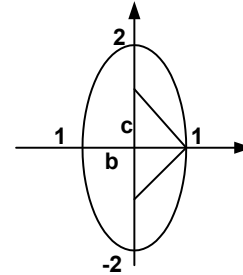
ALTERNATIVA E

20. A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$ são, respectivamente,

- a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SOLUÇÃO:

Supondo que os eixos da elipse são paralelos aos eixos cartesianos:



Equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Onde a é o semi-eixo maior e b é o semi-eixo menor.

Como $(1, 0)$ e $(0, -2)$ pertencem a elipse; temos:

$$\begin{cases} \frac{0^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Pelas relações geométricas, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

Onde c é a metade da distância focal.

Sendo e a excentricidade da elipse e d_f a distância focal, podemos escrever:

$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} \\ d_f = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ d_f = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO: Caso os eixos da elipse não forem paralelos aos eixos cartesianos, então esta questão teria infinitas soluções, pois infinitas elipses satisfariam o enunciado.

ALTERNATIVA E

DISSERTATIVAS

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21. Seja a_1, a_2, \dots uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^n a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

SOLUÇÃO:

Para $K = 1$:

$$\begin{cases} a_3 = \sqrt{2} + \pi \\ a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi \end{cases} \Rightarrow a_6 = \sqrt{2} + 3\pi \Rightarrow a_6 = a_3 + 2\pi$$

Temos também que:

$$a_6 = a_3 + 3r$$

Logo:

$$a_3 + 3r = a_3 + 2\pi \Rightarrow r = 2\pi/3$$

Temos:

$$a_1 = a_3 - 2r$$

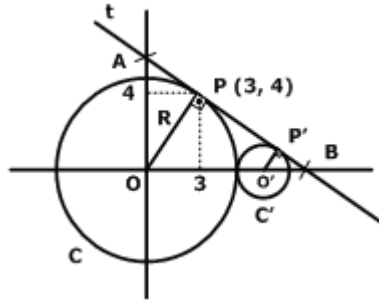
Logo:

$$a_1 = \sqrt{2} + \pi - 2 \cdot (2\pi/3) \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - \pi/3$$

22. Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

SOLUÇÃO:

Considere a figura:



Equação da reta \overline{OP} : $y = kx$

Substituindo no ponto P: $4 = k \cdot 3$

Logo: $\overline{OP} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$

Equação da reta t (perpendicular a \overline{OP}): $y = -\frac{3}{4}x + b$

Substituindo no ponto P: $4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b$

Logo: $b = \frac{25}{4}$

Assim: $A \left(0, \frac{25}{4} \right)$

Para $y=0$ (ponto B): $\frac{3}{4}x = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

Logo: $B \left(\frac{25}{3}, 0 \right)$.

Para determinarmos o raio da circunferência maior:

$$R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

Observando a semelhança dos triângulos $\triangle OBP$ e $\triangle O'P'B$:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{O'P'}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}} \Rightarrow \frac{5}{r} = \frac{\frac{25}{3}}{\left(\frac{25}{3} - 5 - r\right)} \Rightarrow \frac{10}{3} - r = \frac{5r}{3} \Rightarrow \frac{8r}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

Logo:

$$x_{O'} = R + r \Rightarrow x_{O'} = \frac{25}{4} \text{ e } y_{O'} = 0$$

Assim, resulta a circunferência C': $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$

23. Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

SOLUÇÃO:

a) Se B é inversível então existe B^{-1} , tal que $B \cdot B^{-1} = 1$

Sendo $AB = BA$ temos:

$$\begin{aligned} A &= A \Leftrightarrow A \cdot 1 = A \Leftrightarrow A \cdot B \cdot B^{-1} = A \\ \Leftrightarrow B \cdot A \cdot B^{-1} &= A \Leftrightarrow B^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A \\ \Leftrightarrow 1 \cdot A \cdot B^{-1} &= B^{-1} \cdot A \Leftrightarrow A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A \end{aligned}$$

b) Resolvendo a equação:

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB - B &= 0 \Leftrightarrow B = A^2 + 2AB \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B &= A \cdot (A + 2B) \end{aligned}$$

Tomando o determinante:

$$\det B = \det [A \cdot (A + 2B)] = \det A \cdot \det (A + 2B) \neq 0$$

Pois B é inversível.

Se $\det A \cdot \det (A + 2B) \neq 0$, então $\det A \neq 0$ e portanto A é inversível.

24. Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é 2004° , determine o número n de lados do polígono.

SOLUÇÃO:

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é:

$$S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Pelo enunciado, temos:

$$S_i = S + a = 2004^\circ + a$$

Onde S é a soma de $(n-1)$ ângulos internos do polígono e a é a medida de um desses ângulos.

Então:

$$180^\circ (n-2) = 2004^\circ + a \Rightarrow a = 180^\circ (n-2) - 2004^\circ$$

Mas, como se trata de um polígono convexo:

$$0 < a < 180^\circ \Rightarrow 0 < 180^\circ (n-2) - 2004^\circ < 180^\circ$$

$$\Rightarrow 0 < (n-2) - 11,133 < 1 \Rightarrow 13,133 < n < 14,133$$

Portanto, $n = 14$, pois $n \in \mathbb{N}$.

25. (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

(b) Conclua de (a) que α é um número racional.

SOLUÇÃO:

a) Fazemos:

$$\alpha = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

Logo:

$$\alpha^3 = x + 3\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{y}} + 3\sqrt[3]{x\sqrt[3]{y^2}} + y$$

$$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2} + 2$$

$$\alpha^3 = 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Substituindo na equação:

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

Resulta:

$$4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Logo, como a igualdade é verdadeira, podemos verificar que α é raiz da equação dada.

26. Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx},$$

sendo m um parâmetro real.

(a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

SOLUÇÃO:

$$a) \sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx} \Leftrightarrow x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$x^2 = 1 + mx - 2\sqrt{(1+mx)(1-mx)} + 1 - mx$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 - 2\sqrt{1-m^2x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-m^2x^2} = 2 - x^2$$

Elevando novamente ao quadrado, temos:

$$4(1-m^2x^2) = (2-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m^2x^2 = 4 - 4x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4m^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 4 + 4m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm 2\sqrt{1-m^2} \end{cases} \therefore S = \left\{ 0, 2\sqrt{1-m^2}, -2\sqrt{1-m^2} \right\}$$

b) Para que a equação admita solução não nula é necessário primeiramente que:

$$1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \quad (I)$$

Testando as soluções, temos:

$$x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-m^2} = \sqrt{1+2m\sqrt{1-m^2}} - \sqrt{1-2m\sqrt{1-m^2}}$$

Elevando ao quadrado:

$$4 - 4m^2 = 1 + 2m\sqrt{1-m^2} - 2\sqrt{1-4m^2(1-m^2)} + 1 - 2m\sqrt{1-m^2}$$

$$\sqrt{4m^2 - 4m + 1} = 2m^2 - 1$$

A condição de existência da equação acima é:

$$2m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (II)$$

Além disso, devemos fazer a seguinte consideração:

$$x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$$

Se $x > 0$ é solução, temos $\sqrt{1+mx} > \sqrt{1-mx}$, logo $m > 0$.

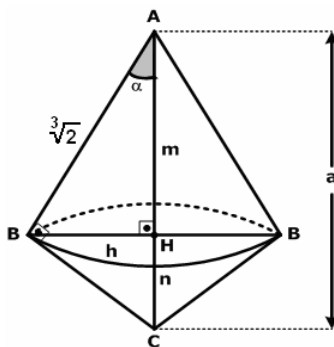
Se $x < 0$ é solução, temos $\sqrt{1+mx} < \sqrt{1-mx}$, logo $m > 0$.

Logo: $m > 0$ (III)

De (I), (II) e (III) temos: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$.

27. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm³. Determine os ângulos deste triângulo.

SOLUÇÃO:



O volume V do sólido gerado pela rotação completa do triângulo ABC, retângulo em B, e, conforme a figura, tal que:

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 m + \frac{1}{3} \pi h^2 n = \frac{1}{3} \pi h^2 (m + n)$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \pi h^2 a = \pi \Leftrightarrow h^2 a = 3 \quad (I)$$

No triângulo ABC, tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos \alpha} \quad (II)$$

No triângulo AHB tem-se:

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{2} \cdot \sin \alpha \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$h^2 a = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} \cdot \sin \alpha)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos \alpha} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \alpha) = 3 \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1/2 \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ, \text{ pois } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Os ângulos do triângulo ABC são, portanto,

$$\hat{B}\hat{A}\hat{C} = \alpha = 60^\circ; \hat{B}\hat{C}\hat{A} = 90^\circ - \alpha = 30^\circ; \hat{A}\hat{B}\hat{C} = 90^\circ$$

28. São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

SOLUÇÃO:

Seja P, a função probabilidade definida no espaço de eventos do problema. Sejam, também, definidos os seguintes eventos:

V_1 : face visível do cartão selecionado é vermelha;

V : face oculta do cartão selecionado é vermelha;

A: cartão de duas faces vermelhas é selecionado;

A probabilidade de o cartão escolhido ter vermelho como cor da outra face $P(V)$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$P(V) = P(V | V_1)$, onde:

$P(V | V_1)$ é a probabilidade de a outra face ser vermelha, dado que a primeira face selecionada foi vermelha.

Podemos calcular então:

$$P(V) = P(V | V_1) = \frac{P(V \cap V_1)}{P(V_1)} = \frac{P(A)}{P(V_1)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

29. Obtenha todos os pares (x, y) , com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 1/2$$

$$\sin x + \cos y = 1$$

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo a primeira equação temos:

$$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = 1/2$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos y = 1/2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos y = 1/4$$

Temos então o novo sistema de equações:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin x \cdot \cos y = 1/4 \end{cases}$$

Assim, $\sin x$ e $\cos y$ são as raízes de uma equação de segundo grau cuja soma é 1 e o produto é 1/4. Logo:

$$w^2 - w + 1/4 = 0 \Leftrightarrow w = 1/2$$

Logo:

$$\sin x = 1/2 \Rightarrow x = 30^\circ \text{ ou } x = 150^\circ$$

$$\cos y = 1/2 \Rightarrow y = 60^\circ \text{ ou } y = 300^\circ$$

Assim os possíveis pares (x, y) pertencem ao conjunto:

$$\{(30^\circ, 60^\circ), (30^\circ, 300^\circ), (150^\circ, 60^\circ), (150^\circ, 300^\circ)\}$$

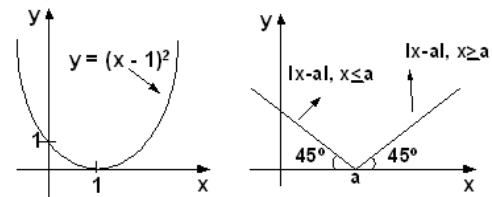
30. Determine todos os valores reais de a para os quais a equação

$$(x-1)^2 = |x-a|$$

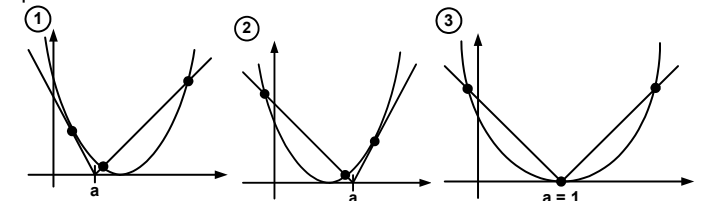
admita exatamente três soluções distintas.

SOLUÇÃO:

Graficamente, temos:



Para que a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas, é necessário que o gráfico de $|x-a|$ intercepte a parábola $y = (x-1)^2$ em três pontos diferentes. As situações em que isso ocorre são:



Nos casos 1 e 2, $|x-a|$ tangencia a parábola em um ponto e cruza em outros dois pontos.

1) No ponto de tangência para $x < a$, temos:

$$(x-1)^2 = |x-a| = a-x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = a-x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - a = 0$$

Para que ocorra tangência, $\Delta = 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3/4$

2) No ponto de tangência para $x > a$, temos:

$$(x-1)^2 = |x-a| = x-a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x-a \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + a = 0$$

Novamente, $\Delta = 5 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 5/4$

Podemos observar no gráfico do caso 3, quando $a = 1$, temos a interseção das curvas em três pontos.

Logo, os valores procurados de a são $3/4, 1$ e $5/4$.