

O Elite Resolve

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

*Você na elite
das universidades!*



ITA 2004
MATEMÁTICA

✓ GABARITO ITA 2004 – MATEMÁTICA

1. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

- I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.
- II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.
- III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
- IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

- a) apenas I e III. b) apenas II e IV. c) apenas II e III. d) apenas IV. e) todas as afirmações.

Alternativa C

Analisando as afirmações:

I - falsa: a relação de pertencer ocorre entre elementos e conjuntos. A relação de conter ou estar contido ocorre entre dois ou mais conjuntos, portanto, o correto seria $\emptyset \subset U$.

II - verdadeira: vide afirmativa I. Além disso, U possui 10 elementos.

III - verdadeira: 5 é elemento (logo $5 \in U$) e $\{5\}$ é subconjunto de U (logo $\{5\} \subset U$)

IV - falsa, pois $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$

2. Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

- I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$.
- II. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.
- III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I e II. b) I e III. c) II e III. d) I. e) II.

Alternativa D

I - verdadeira: $\frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$ e $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2$, logo $\frac{5}{4} \in S$.

$$\frac{7}{5} \in \mathbb{Q} \text{ e } \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \leq 2, \text{ logo } \frac{7}{5} \in S.$$

II - falsa: existem infinitos números racionais entre 0 e $\sqrt{2}$ e, sendo o conjunto dos números racionais um subconjunto de \mathbb{R} , todos eles pertencem também a \mathbb{R} , logo a intersecção possui um

número infinito de elementos. Por exemplo: $\frac{5}{4} \in S$, $\frac{5}{4} \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \frac{5}{4} \leq \sqrt{2}$, logo $\frac{5}{4} \in \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

III - falsa: Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin S$.

3. Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os

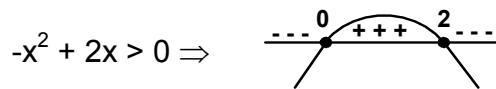
valores de x tais que $\alpha^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^{2x^2} < 1$.

- a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ c) $]0, 2[$ d) $]-\infty, 0[$ e) $]2, +\infty[$

Alternativa C

$$\alpha^{2x} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]^{2x^2} < 1 \Rightarrow \alpha^{2x} [\alpha^{-1/2}]^{2x^2} < \alpha^0 \Rightarrow \alpha^{2x} \cdot \alpha^{-x^2} < \alpha^0 \Rightarrow \alpha^{-x^2+2x} < \alpha^0$$

Como temos $0 < \alpha < 1$, logo:



portanto $0 < x < 2$ ou $S =]0, 2[$.

4. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = 2\cos x + 2i\sin x$. Então, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x)f(y)$ é igual a

- a) $f(x+y)$ b) $2 f(x+y)$ c) $4 i f(x+y)$ d) $f(xy)$ e) $2f(x) + 2 i f(y)$

Alternativa B

$$\begin{cases} f(x) = 2 \cos x + 2i \sin x = 2 (\cos x + i \sin x) \\ f(y) = 2 \cos y + 2i \sin y = 2 (\cos y + i \sin y) \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x) \cdot f(y) = 4 [\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i (\sin y \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos y)] = [\cos (x+y) + i \sin (x+y)]$
Portanto:

$$f(x) \cdot f(y) = 2 \cdot 2 [\cos (x+y) + i \sin (x+y)] = 2 f(x+y)$$

5. Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

- a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

Alternativa A

O número de triângulos que podem ser formados com estes 12 pontos é igual ao número de maneiras de escolher-se 3 pontos distintos entre estes 12 menos o número de maneiras de escolher-se 3 dos cinco pontos que estão na mesma reta, pois estes não formam um triângulo.

$$C_{12, 3} - C_{5, 3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 220 - 10 = 210$$

6. Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2 + 1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.
b) Apenas para $x > 0$, A possui inversa.
c) São apenas dois valores de x para o qual a possui inversa.
d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

Alternativa A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2^x & (x^2 + 1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{vmatrix} = 2^x \cdot (\log_2 5 - (x^2 + 1)^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 2^x \cdot (\log_2 5 - (x^2 + 1)^{-1}).$$

A é inversível se e somente se $\det A \neq 0$. Suponha $\det A = 0$:

$$2^x \cdot (\log_2 5 - (x^2 + 1)^{-1}) = 0 \Rightarrow \log_2 5 - (x^2 + 1)^{-1} = 0, \text{ pois } 2^x \text{ é sempre positivo.}$$

$$\text{Assim } \log_2 5 = 1/(x^2 + 1) \Rightarrow (x^2 + 1) = 1/\log_2 5 \Rightarrow x^2 = \log_5 2 - 1;$$

Como $\log_5 2 - 1 < 0$, então conclui-se que $x^2 < 0$. Portanto não existe x real que satisfaça a equação $\det A = 0$, daí conclui-se que $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.

7. Considerando as funções

$$\arcsen : [-1, +1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\text{assinale o valor de } \cos\left(\arcsen \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}\right).$$

- a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

Alternativa B

$$\text{Seja } \begin{cases} x = \arcsen \frac{3}{5} \Rightarrow \sen x = \frac{3}{5}; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = \arccos \frac{4}{5} \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5}; y \in [0, \pi] \end{cases} . \text{ Logo: } \cos\left(\arcsen \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}\right) = \cos(x + y)$$

Além disso, sabe-se que:

$$\sen^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\sen^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \sen^2 y = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sen y = \frac{3}{5}$$

$$\text{Como } \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sen x \cdot \sen y \text{ então } \cos(x + y) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$

8. Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5° . Então, seu maior ângulo mede, em graus,

- a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

Alternativa E

A soma dos ângulos internos de um polígono é $S_n = (n - 2) 180^\circ$. Para $n = 9$ temos $S_n = 1260^\circ$.

Sejam a_1, a_2, \dots, a_9 os ângulos internos do polígono e r a razão da PA. Então:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_5 - 4r & a_6 &= a_5 + r \\ a_2 &= a_5 - 3r & a_7 &= a_5 + 2r \\ a_3 &= a_5 - 2r & a_8 &= a_5 + 3r \\ a_4 &= a_5 - r & a_9 &= a_5 + 4r \end{aligned}$$

Portanto: $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9 a_5 = S_n = 1260^\circ \Rightarrow a_5 = 140^\circ$

$\therefore a_9 = 140^\circ + 4 \cdot 5^\circ = 160^\circ$

9. O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt[3]{x}}} \right)^{12}$ é

- a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

Alternativa E

$$B = \left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt[3]{x}}} \right)^{12} \Rightarrow B = \left[\sqrt{\frac{3}{5} x^{-\frac{2}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{5}{3} x^{\frac{1}{2}}} \right]^{12} = \left[\sqrt{\frac{3}{5}} x^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}} x^{\frac{1}{6}} \right]^{12}$$

O termo geral do binômio será:

$$T_i = \binom{12}{i} (-1)^i \left[\sqrt{\frac{3}{5}} \right]^{12-i} \left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \right]^i \cdot x^{\frac{i-12}{3} + \frac{i}{6}}$$

Para o termo i ser independente de x, devemos ter o expoente de x igual a zero, ou seja:

$$\frac{i-12}{3} + \frac{i}{6} = 0 \Rightarrow 2i - 24 + i = 0 \Rightarrow i = 8$$

então:

$$\begin{aligned} T_8 &= \binom{12}{8} (-1)^8 \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^4 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \right)^8 = 495 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{25}{9} \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \\ &= 495 \sqrt[3]{\frac{25}{9} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{495}{3} \sqrt[3]{75} = 165 \sqrt[3]{75} \end{aligned}$$

10. Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

- I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
- II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.
- III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2} + 1$ e a segunda por $\sqrt{2} - 1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então podemos afirmar que é (são) verdadeira(s):

- a) apenas I b) apenas III c) apenas I e II d) apenas II e III e) todas

Alternativa D

I – falsa. Para que o determinante de uma matriz seja nulo, basta que uma fila (linha ou coluna) seja

combinação linear de outra, o que não requer que a fila seja nula. Por exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

II – verdadeira. Basta aplicar o teorema de Laplace ou Chiò sucessivamente em cada linha (ou coluna) e chegamos ao valor $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$.

III – verdadeira. $\det B = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot \det A = ((\sqrt{2})^2 - 1) \det A = 1 \cdot \det A$

11. Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360 \pi \text{ cm}^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2 ,

a) $18\sqrt{427}$

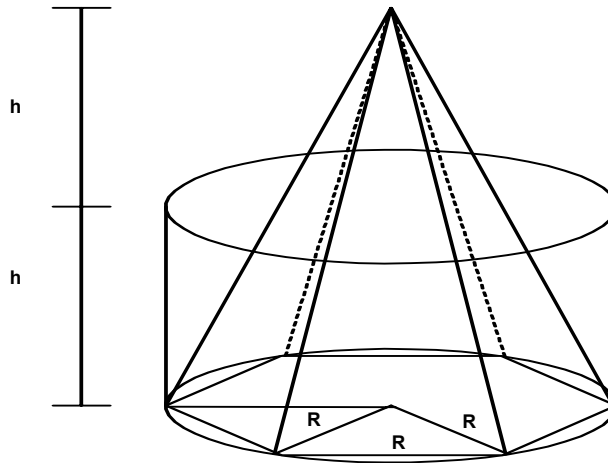
b) $27\sqrt{427}$

c) $36\sqrt{427}$

d) $108\sqrt{3}$

e) $45\sqrt{427}$

Alternativa A



Cálculo de R:

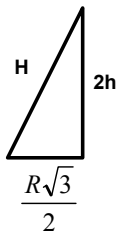
A área da base da pirâmide é dada por:

$$A_B = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = \frac{2 \cdot 54}{3} \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

Cálculo de h:

$$V_{\text{cil}} = \pi R^2 h = 360\pi \Rightarrow 36h = 360 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Seja H a altura da face lateral:



$$H^2 = (2 \cdot 10)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2 = 400 + 27 = 427 \Rightarrow H = \sqrt{427}$$

área lateral: $6 \cdot (\text{área de cada face}) = 6 \cdot \frac{R \sqrt{427}}{2} = 18\sqrt{427} \text{ cm}^2$

12. O conjunto de todos os valores de α , $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, tais que as soluções da equação (em x)

$$x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0 \text{ são todas reais, é}$$

- a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ d) $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} \right]$

Alternativa D

Seja $\text{Int} = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0 \text{ (I)}$$

fazendo $y = x^2$ tem-se $y^2 - \sqrt[4]{48}y + \operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt[4]{48} \pm \sqrt{\sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha}}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$.

Portanto, para que todas as soluções de (I) sejam reais é necessário que $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$ e $\operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$ (II)
(Pois $x = \pm\sqrt{y}$)

(i) $y_1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{48} + \sqrt{\sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha} \geq 0$ que é verdade $\forall \alpha \in \text{Int}$ tal que $\operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$

(Pois $\sqrt{m^2} = |m| \geq 0$, por definição)

(ii) $y_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha} \leq \sqrt[4]{48} \Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha} \right)^2 \leq \left(\sqrt[4]{48} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{48} - 4\operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt[4]{48}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \geq 0 \text{ (III)}$$

Portanto, de (II) e (III) temos que as soluções da equação (I) (em x) são todas reais quando

$$0 \leq \operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \text{ pois } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ ou seja, } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right]$$

13. Sejam as funções f e g definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	Ponto de mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-1	< 0	$\frac{9}{4}$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é igual a

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Alternativa D

$$f(x) = x^2 + \alpha x$$

$$\text{Valor mínimo de } f = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(\alpha^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0)}{4} = -\frac{\alpha^2}{4} = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2 \quad (I)$$

$$\text{Ponto mínimo de } f < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} < 0 \Rightarrow \alpha > 0 \quad (II)$$

$$\text{De (I) e (II): } \alpha = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = -x^2 - \beta x$$

$$\text{Valor máximo de } g = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-\beta)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{-4} \Rightarrow \frac{\beta^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = \pm 3 \quad (III)$$

$$\text{Ponto de máximo de } g > 0 \Rightarrow -\frac{\beta}{2} > 0 \Rightarrow \beta < 0 \quad (IV)$$

$$\text{De (III) e (IV): } \beta = -3 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 3x$$

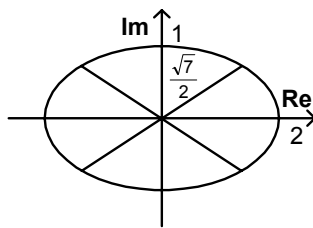
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (-x^2 + 3x)^2 + 2(-x^2 + 3x) = 0 \\ \Rightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 + 6x &= 0 \\ \Rightarrow x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soma das raízes} = -\frac{(-6)}{1} = 6$$

14. Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

- a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{81}{25}$ d) $\frac{25}{7}$ e) 4

Alternativa B



$$z = x + iy \Leftrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ mas } |z| = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ logo } x^2 + y^2 = \frac{7}{4}$$

Como os pontos devem estar sobre a elipse, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{7}{4} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

$$3y^2 = \frac{16-7}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x^2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Logo, } z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_3 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_4 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

O produto $z_1, z_2 \cdot z_3, z_4$ vale: $\left(1 + \frac{3}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{49}{16}$

15. Para algum número real r , o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo mais está próximo de r ?

- a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

Alternativa B**1ª SOLUÇÃO:**

$$p(x) \equiv 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$$

$$p(x) \equiv 8x^3 + 20x^2 - 24x^2 - 60x + 18x + 45$$

$$p(x) \equiv 4x^2(2x + 5) - 12x(2x + 5) + 9(2x + 5)$$

$$p(x) \equiv (2x + 5) \cdot (4x^2 - 12x + 9)$$

$$p(x) \equiv (2x + 5) \cdot (2x - 3)^2$$

Assim, as raízes do polinômio são $-\frac{5}{2}$ (raiz simples) e $\frac{3}{2}$ (raiz dupla) logo $r = \frac{3}{2} = 1,5$

2ª SOLUÇÃO:

Como $p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$ então r é raiz de $p(x)$ e de $p'(x)$.

Mas $p'(x) = 24x^2 - 8x - 42$. Fazendo $p'(x) = 0$:

$$24x^2 - 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{7}{6}$$

como $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ e $p\left(-\frac{7}{6}\right) \neq 0$, temos que $p(x)$ é divisível por $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

Portanto $r = 1,5$.

16. Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

- a) Uma elipse. b) Uma parábola. c) Uma circunferência.
d) Uma hipérbole. e) Uma reta.

Alternativa C

Seja L_i a linha i do determinante dado. Realizando as operações $L_1 - L_4, L_2 - L_4$ e $L_3 - L_4$, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 34 & x - 5 & y - 3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288$$

Aplicando o Teorema de Laplace na 4ª coluna, temos:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 34 & x - 5 & y - 3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288$$

Realizando agora $L_1 - L_3$ e $L_2 - L_3$, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 4 & x - 2 & y \\ 36 & 0 & 6 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(-3) \begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 4 & x - 2 & y \\ 6 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y + 10(x - 2) - 6(x - 2) - (x^2 + y^2 - 4) = -16$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

Logo, o lugar geométrico é uma circunferência de centro $C(2; 3)$ e raio 5.

17. A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Alternativa A

$$z^3 + z^2 - z \cdot \bar{z} + 2z = 0 \Rightarrow z \cdot (z^2 + z - \bar{z} + 2) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ é raiz}$$

Fazendo $z = x + yi$:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x + iy - x + yi + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 + 2 + (2xy + 2y)i = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2xy + 2y = 0 \Rightarrow 2y \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (I) ou } x = -1 \text{ (II)} \\ x^2 - y^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

De (I): $y = 0 \Rightarrow x^2 = -2$ (impossível)

De (II): $x = -1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ (ok)

Assim as três raízes são $z_1 = 0$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ e $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$

Logo $z_1 + z_2 + z_3 = -2$

18. Dada a equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes informações:

- I. Se $m \in]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
 II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
 III. $\forall m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I b) II c) III d) II e III e) I e II

Alternativa E

$$x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$$

$$x^3 + x^2 + mx^2 + mx + 9x + 9 = 0$$

$$x^2(x+1) + mx(x+1) + 9(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + mx + 9) = 0$$

ou $x+1=0$, e portanto -1 é raiz, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$$\text{ou } x^2 + mx + 9 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 36$$

então temos:

Se $\Delta < 0$ então $-6 < m < 6$, duas raízes não reais, portanto I é verdadeira e III é falsa.

Se $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \pm 6$, uma raiz de multiplicidade 2, portanto II é verdadeira

19. Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2} \text{ cm}$, respectivamente. Seja \overline{AB} uma corda de C_2 , tangente à C_1 . A área da menor região delimitada pela corda \overline{AB} e pelo arco \widehat{AB} mede, em cm^2 ,

a) $9(\pi - 3)$

b) $18(\pi + 3)$

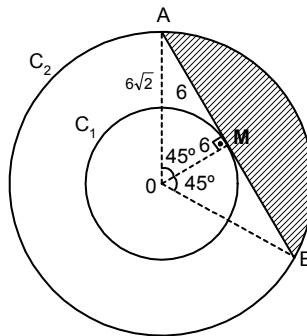
c) $18(\pi - 2)$

d) $18(\pi + 2)$

e) $16(\pi + 3)$

Alternativa C

Vejamos a figura a seguir:



No $\triangle OAM$, temos: $AM^2 + 6^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow AM = 6$

Logo: $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{BOM}) = 45^\circ$

Seja S a área da menor região delimitada pela corda \overline{AB} e pelo arco \widehat{AB} :

$$S = S_{\text{menor setor circular AOB}} - 2 \cdot S_{\text{triângulo AOM}} = \frac{1}{4}\pi(6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow S = 18(\pi - 2) \text{ cm}^2.$$

20. A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede $R \text{ cm}$, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3 , é igual a:

a) πR^3

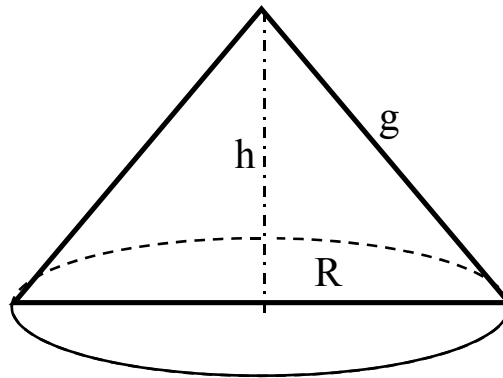
b) $\pi\sqrt{2} R^3$

c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3$

d) $\pi\sqrt{3} R^3$

e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} R^3$

Alternativa E



Diâmetro do círculo = $2R + 2g$

Área total do cone = $A_t = \pi(R+g)^2/3 \Rightarrow \pi R^2 + \pi Rg = \pi(R+g)^2/3 \Rightarrow g^2 - Rg - 2R^2 = 0$

$g = (R \pm 3R)/2$; $g > 0 \Rightarrow g = 2R$

$h^2 = g^2 - R^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$

$$\text{Volume} = V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 (R\sqrt{3}) \Rightarrow V = \pi R^3 \sqrt{3} / 3 = \pi R^3 / \sqrt{3}$$

21. Seja A um conjunto não-vazio.

a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de m .

b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k , tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

SOLUÇÃO:

a) Se um conjunto A tem m elementos, o número de elementos das partes de A ($P(A)$) é dado por: $n(P(A)) = 2^m$

b) Foi dado que: $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$

Para $k = 1 \Rightarrow P^2(A) = P(P^1(A))$ onde $P^1(A) = P(A) = 2^2 = 4$

$n(P^2(A)) = 2^4 = 16$

Para $k = 2 \Rightarrow P^3(A) = P(P^2(A)) = 2^{16} = 65536$

Logo, $P^3(A) = 65536 > 65000$ e o valor mínimo de k é 3.

22. Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

SOLUÇÃO:

Seja:

S a probabilidade de se retirar uma bola verde;

P_b a probabilidade de escolher a caixa branca;

P_{vb} a probabilidade de pegar bola verde na caixa branca;

P_p a probabilidade de escolher a caixa preta;

P_{vp} a probabilidade de pegar bola verde na caixa preta.

$$\text{Então } P_b = \frac{3}{36} \quad P_{vb} = \frac{5}{8} \quad P_p = \frac{33}{36} \quad P_{vp} = \frac{3}{5} \text{ e}$$

$$S = P_b \cdot P_{vb} + P_p \cdot P_{vp} = \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{8} + \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{96} + \frac{11}{20} = \frac{25 + 264}{480} = \frac{289}{480}$$

23. Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a-x$.

SOLUÇÃO:

$\sqrt{1-x^2}$ existe apenas se $-1 \leq x \leq 1$, então podemos afirmar que existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $x = \operatorname{sen} \alpha$ e

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \alpha. \text{ Assim: } \cos \alpha \geq a - \operatorname{sen} \alpha$$

$$a \leq \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$$

Observando que a deve ser menor ou igual ao valor máximo da soma $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$ e que este valor é positivo temos:

$$a \leq \operatorname{Max}[\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha] \Rightarrow a \leq \operatorname{Max}\left[\sqrt{(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2}\right] \Rightarrow a \leq \operatorname{Max}\left[\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}\right] \Rightarrow a \leq \sqrt{1 + \operatorname{Max}(\operatorname{sen} 2\alpha)} \Rightarrow$$

$$a \leq \sqrt{1+1} \Rightarrow a \leq \sqrt{2}$$

24. Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}|$.

SOLUÇÃO:

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Rightarrow z^{60} = \operatorname{cis} \frac{60\pi}{4} = \operatorname{cis} 15\pi = -1$$

A expressão $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}$ é uma PG de $a_1 = z$ e $r = z$. Logo:

$$\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|\frac{z(z^{60}-1)}{z-1}\right| = \left|\frac{z(z^{60}-1)}{z-1}\right| = \frac{|z||z^{60}-1|}{|z-1|} =$$

$$= \frac{|z||-1-1|}{|z-1|} = \frac{2|z|}{|z-1|} = \frac{2}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1\right|} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

25. Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x : $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

SOLUÇÃO:

$$(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$$

Aplicando logaritmo de base 2 aos dois lados da equação:

$$\log_b 2 \cdot \log_2 2x = \log_b 3 \cdot \log_2 3x \Leftrightarrow \log_b 2 (1 + \log_2 x) = \log_b 3 (\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow$$

$$1 + \log_2 x = \log_b 2 \cdot \log_b 3 (\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow 1 + \log_2 x = \log_2 3 (\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow$$

$$1 + \log_2 x = (\log_2 3)^2 + \log_2 3 \cdot \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x (1 - \log_2 3) = (\log_2 3)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-\log_2 x (\log_2 3 - 1) = (\log_2 3 + 1) (\log_2 3 - 1) \Leftrightarrow \log_2 x = -(\log_2 3 + \log_2 2) = -\log_2 6 = \log_2 6^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

26. Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0, 1[$?

1ª SOLUÇÃO:

Seja r a raiz dupla em questão e m a terceira raiz. Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r + r + m = -3 & (1) \\ r \cdot r + r \cdot m + r \cdot m = -2 & (2) \\ r \cdot r \cdot m = -d & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) vem:

$$\begin{cases} 2r + m = -3 \\ r^2 + 2rm = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2r - 3 \\ r^2 + 2rm = -2 \end{cases}$$

$$r^2 + 2r(-2r - 3) = -2 \Leftrightarrow 3r^2 + 6r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Como $r \in]0, 1[$, então $r = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$

Assim: $m = -2\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) - 3 \Leftrightarrow m = \frac{-3 - 2\sqrt{15}}{3}$

Substituindo os valores obtidos de r e m na relação (3), obtemos:

$$d = -r^2 m = -\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 \left(\frac{-3 - 2\sqrt{15}}{3}\right) \Leftrightarrow d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$$

2ª SOLUÇÃO:

Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$. Uma raiz dupla de $f(x)$ deve ser raiz da derivada $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$. As raízes de $3x^2 + 6x - 2 = 0$ são $-1 - \frac{\sqrt{15}}{3}$ e $-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$; destas, $\frac{\sqrt{15}}{3} - 1$ é a única no intervalo $]0, 1[$.

Logo $f(x)$ terá raiz dupla em $]0, 1[$ se, e somente se, $f\left(\frac{\sqrt{15}}{3} - 1\right) = 0$. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini:

$\frac{\sqrt{15}}{3} - 1$	1	3	-2	d
	1	$\frac{\sqrt{15}}{3} + 2$	$\frac{\sqrt{15} - 7}{3}$	$4 - \frac{10\sqrt{15}}{9} + d$
				$\underbrace{\hspace{2cm}}_0$

$$\text{Logo } d = \frac{10\sqrt{15}}{9} - 4 = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}.$$

27. Prove que, se os ângulos internos α , β e γ de um triângulo satisfazem a equação

$$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos α , β ou γ é igual a 60° .

SOLUÇÃO:

Sejam α , β e γ os ângulos inteiros de um triângulo, então temos: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

Da relação fornecida:

$$\operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}3\beta + \operatorname{sen}3\gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}3\beta + \operatorname{sen}\{3[180^\circ - (\alpha + \beta)]\} = 0$$

Aplicando as fórmulas de prostaferese, temos:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}(3\alpha+3\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) \cdot 2\cos\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\alpha}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\beta}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha+3\beta}{2} = 180^\circ \\ \text{ou} \\ \frac{3\alpha}{2} = 90^\circ \\ \text{ou} \\ \frac{3\beta}{2} = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 120^\circ \\ \text{ou} \\ \alpha = 60^\circ \\ \text{ou} \\ \beta = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ \text{ ou } \beta = 60^\circ \text{ ou } \gamma = 60^\circ$$

28. Se A é uma matriz real, considere as definições:

- I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
- II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

SOLUÇÃO:

Como A é quadrada, de ordem 3 e diagonal, vem:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Seja A ortogonal, $A^{-1} = A^T$. Como $AA^{-1} = I$, $AA^T = I$:

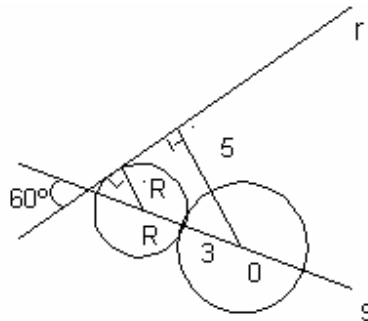
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

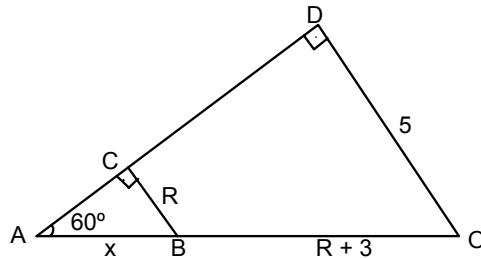
Logo, existem 8 matrizes que satisfazem as condições do problema, que são da forma: $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

29. Sejam r e s duas retas que se interceptam segundo um ângulo de 60° . Seja C_1 uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em s , a 5 cm de r . Determine o raio da menor circunferência tangente à C_1 e à reta r , cujo centro também se situa na reta s .

SOLUÇÃO:



A menor circunferência que cumpre as exigências enunciadas está representada acima. Para determinar seu raio, pode-se aplicar semelhança de triângulos:



$$\Delta ABC: \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{R}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

$$\Delta AOD: \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{5}{x + R + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 10 = \sqrt{3} \frac{2\sqrt{3}}{3}R + \sqrt{3}(R + 3) \Rightarrow$$

$$10 = (2 + \sqrt{3})R + 3\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{20 - 16\sqrt{3} + 9}{4 - 3} \Rightarrow$$

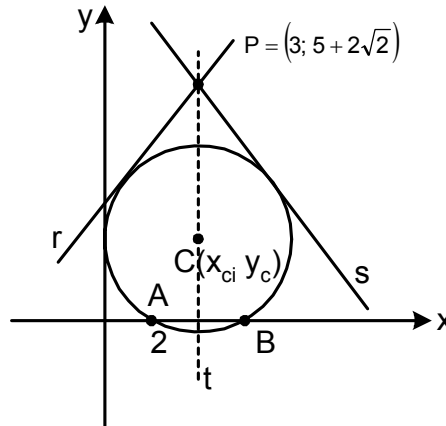
$$R = (29 - 16\sqrt{3})\text{cm}$$

30. Sejam os pontos $A: (2, 0)$, $B: (4, 0)$ e $P: (3, 5 + 2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência C , cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y .

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P .

SOLUÇÃO:



a) O centro da circunferência procurada está sobre a reta $t : x = 3$ (// ao eixo y)
A distância de C até A é raio da circunferência e vale 3:

$$d_{CA} = \sqrt{(x_c - 2)^2 + y_c^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{(3 - 2)^2 + y_c^2} = 3 \therefore 1 + y_c^2 = 9$$

e $y_c = 2\sqrt{2}$

(pois o centro da circunferência está no 1º quadrante)

Logo, a equação é $(x - 3)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 9$

b) a equação do feixe de retas que passa por $P(3; 5 + 2\sqrt{2})$ é

$$y - (5 + 2\sqrt{2}) = m(x - 3) \Rightarrow mx - y - 3m + 5 + 2\sqrt{2} = 0$$

A distância de C até as retas r e s é o raio da circunferência.

Como r e s pertencem ao feixe, tem-se:

$$d_{D,s} = \left| \frac{3m - 2\sqrt{2} - 3m + 5 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 3 \therefore \left| \frac{5}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 3$$

Então: $\frac{5}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \therefore m^2 + 1 = \frac{25}{9}$ e $m = \pm \frac{4}{3}$

Assim:

$r: y - (5 + 2\sqrt{2}) = \frac{4}{3}x - 3$ ou $y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$

$s: y - (5 + 2\sqrt{2}) = -\frac{4}{3}(x - 3)$ ou $y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$