Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Aprovou!

ELITE Resolve

IME 2015 Discursivas

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

Resolução

As condições de existência para um logaritmo são:

- base positiva e diferente de 1;
- logaritmando positivo.

Além disso, o denominador da primeira fração não pode ser nulo. Impondo todas essas condições simultaneamente, vem que:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^2 > 0 \\ \log_3 x^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x^2 \neq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Sendo satisfeitas essas condições, temos que:

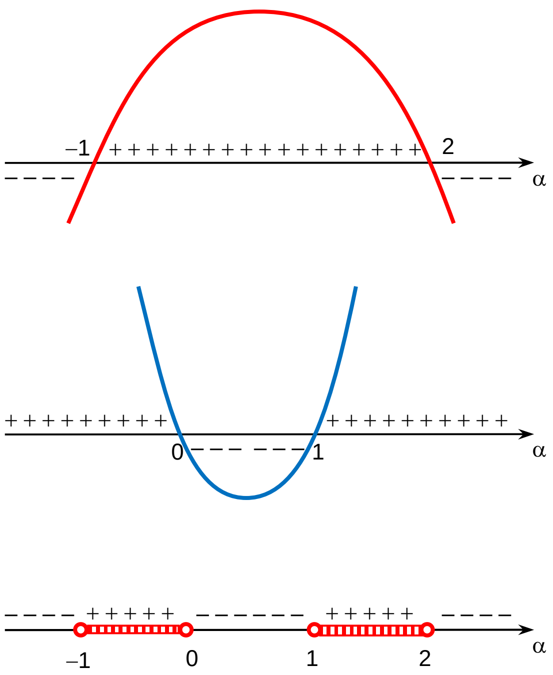
$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{2 \cdot \log_3 x - 2} + \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 x} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\log_3 x - 1} + \frac{-2}{\log_3 x} - 1 > 0$$

Fazendo $\log_3 x = \alpha$, segue que:

$$\frac{2}{\alpha - 1} + \frac{-2}{\alpha} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha^2 - \alpha} > 0$$

Fazendo o quadro de sinais para o quociente em função dos sinais do numerador e do denominador, temos:



Assim:

$$-1 < \alpha < 0 \ \text{ ou } \ 1 < \alpha < 2 \Leftrightarrow$$

$$-1 < \log_3 x < 0 \ \text{ ou } \ 1 < \log_3 x < 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^0 \ \text{ ou } \ \log_3 3^1 < \log_3 x < \log_3 3^2$$

Sendo a base 3 maior do que 1, fazemos a comparação entre os logaritmandos mantendo os sinais das inequações inalterados:

$$3^{-1} < x < 3^0 \ \text{ ou } \ 3^1 < x < 3^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \ \text{ ou } \ 3 < x < 9$$

Sendo as condições de existência todas satisfeitas para esses valores, ficamos com:

$$\boxed{V = \left]\frac{1}{3}, 1\right[\cup \left]3, 9\right[}$$

QUESTÃO 02

Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x + \sqrt{4x - 4}} + \sqrt{x - \sqrt{4x - 4}} = \sqrt{x + 3}$$

Resolução

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{4x-4}} + \sqrt{x - \sqrt{4x-4}}\right)^2 = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x} + \cancel{\sqrt{4x-4}} + 2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{4x-4}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{4x-4}} + x - \cancel{\sqrt{4x-4}} = \cancel{x} + 3 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 - (4x - 4)} = 3 - x$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado:

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) = 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \text{ ou } \ x = \frac{7}{3}$$

Tendo elevado a equação ao quadrado (duas vezes, inclusive), devemos fazer a verificação de cada um desses valores.

(I) Verificação para $x = 1$:

Lado esquerdo:

$$\sqrt{1 + \sqrt{4 \cdot 1 - 4}} + \sqrt{1 - \sqrt{4 \cdot 1 - 4}} = \sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0} = 2$$

Lado direito:

$$\sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Tendo obtido a igualdade $\Rightarrow x = 1$ é solução!

(II) Verificação para $x = \frac{7}{3}$:

Lado esquerdo:

$$\sqrt{\frac{7}{3} + \sqrt{4 \cdot \frac{7}{3} - 4}} + \sqrt{\frac{7}{3} - \sqrt{4 \cdot \frac{7}{3} - 4}} = \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}} + \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}} =$$

Sendo $7 \pm 4\sqrt{3} = 2^2 \pm 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$, segue que:

$$= \frac{\left|2 + \sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}} + \frac{\left|2 - \sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Lado direito:

$$\sqrt{\frac{7}{3} + 3} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Tendo obtido a igualdade $\Rightarrow x = \frac{7}{3}$ é solução!

Assim:

$$\boxed{V = \left\{1, \frac{7}{3}\right\}}$$

QUESTÃO 03

Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação

$$\arg(z - z_1) - \arg(z - z_2) - \arg(z - z_3) = k\,\pi\,,$$

em que z_1 é real, z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro.

Obs: arg(z) é o argumento do número complexo z.

Resolução

Como argumento não é definido para o complexo nulo, consideraremos $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. Vamos denotar $z_2 = a + bi$ e $z = x + yi$. Então observe que

$$\arg(z - z_1) - \arg(z - z_2) - \arg(z - z_3) = \arg\left(\frac{z - z_1}{(z - z_2)(z - \bar{z}_2)}\right) = k\,\pi$$

Como k varia nos inteiros, isso é equivalente a falar que nosso complexo $\dfrac{z-z_1}{(z-z_2)(z-\bar{z}_2)}$ é real, e portanto igual ao seu conjugado. Igualando isso temos:

$$\frac{z-z_1}{(z-z_2)(z-\bar{z}_2)}=\overline{\left(\frac{z-z_1}{(z-z_2)(z-\bar{z}_2)}\right)}=\frac{\bar{z}-z_1}{(\bar{z}-\bar{z}_2)(\bar{z}-z_2)}$$

Multiplicando em cruz obtemos:

$$(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)(\bar{z}-z_2)=(\bar{z}-z_1)(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\ \Leftrightarrow$$

$$(z-z_1)\left(\bar{z}^2-(\bar{z}_2+z_2)\bar{z}+z_2\bar{z}_2\right)=(\bar{z}-z_1)\left(z^2-(\bar{z}_2+z_2)z+z_2\bar{z}_2\right)\Leftrightarrow$$

$$(z-z_1)\left(\bar{z}^2-2a\bar{z}+\left(a^2+b^2\right)\right)=(\bar{z}-z_1)\left(z^2-2az+\left(a^2+b^2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}^2\cancel{-2az\bar{z}}+z\left(a^2+b^2\right)-z_1\bar{z}^2+2az_1\bar{z}\cancel{-z_1\left(a^2+b^2\right)}=$$
$$=\bar{z}z^2\cancel{-2az\bar{z}}+\bar{z}\left(a^2+b^2\right)-z_1z^2+2az_1z\cancel{-z_1\left(a^2+b^2\right)}$$

Lembrando que $z\bar{z}=|z|^2$ chegamos na expressão

$$\bar{z}|z|^2+z\left(a^2+b^2\right)-z_1\bar{z}^2+2az_1\bar{z}=z|z|^2+\bar{z}\left(a^2+b^2\right)-z_1z^2+2az_1z\ \Leftrightarrow$$

$$|z|^2(\bar{z}-z)+(z-\bar{z})\left(a^2+b^2\right)-z_1\left(\bar{z}^2-z^2\right)+2az_1(\bar{z}-z)=0\ \Leftrightarrow$$

$$(\bar{z}-z)\left(|z|^2-\left(a^2+b^2\right)-z_1(\bar{z}+z)+2az_1\right)=0\ \Leftrightarrow$$

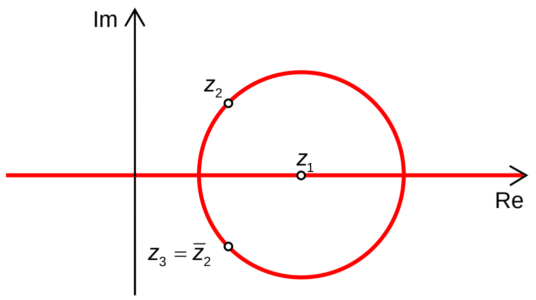
$$-2xi\left(x^2+y^2-2z_1x-\left(a^2+b^2\right)+2az_1\right)=0$$

Então temos duas opções possíveis:

1) $2x=0$, o que significa que nosso número é real.
2) $x^2+y^2-2z_1x-\left(a^2+b^2\right)+2az_1=0$. Colocando a equação na forma reduzida temos:

$$x^2+y^2-2z_1x-\left(a^2+b^2\right)+2az_1=0\ \Leftrightarrow$$
$$(x-z_1)^2+y^2=(a-z_1)^2+b^2$$

Que é a equação de uma circunferência de centro no afixo de z_1 que passaria pelo afixo de z_2, no entanto temos esse ponto excluído do lugar geométrico pela definição de argumento complexo.



QUESTÃO 04

Seja n um inteiro positivo cuja representação decimal é $a_m...a_1a_0$ e f a função que troca a posição dos dígitos a_{2i} e a_{2i+1} de forma que $f(a_{2k+1}a_{2k}...a_1a_0)=a_{2k}\,a_{2k+1}...a_0a_1$. Por exemplo:

$f(123456)=214365$

$f(1034)=143$

$f(123)=1032$

$f(10)=1$

Determine o menor número maior que 99 que satisfaça à equação

$$x^2=9x+9f(x)+(f(x))^2$$

Resolução

Primeiramente vamos descobrir a relação entre $f(x)$ e x. Para isso devemos pensar em $x^2=9x+9f(x)+(f(x))^2$ como uma equação de segundo grau em f. Resolvendo ela temos:

$$f^2+9f+\left(9x-x^2\right)=0\ \Rightarrow\ \Delta=9^2-4\cdot1\cdot\left(9x-x^2\right)=4x^2-36x+9^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Delta=(2x-9)^2\ \Rightarrow\ f=\frac{-9\pm|2x-9|}{2}$$

Agora, observe que $f(x)$ deve ser positivo e que $x>99$, nos dando a única opção que

$$f(x)=\frac{-9+(2x-9)}{2}=x-9\,.$$

Agora devemos encontrar o menor número maior que 99 que satisfaz $f(x)=x-9$. Vamos considerar primeiro um número de 3 algarismos abc. Então:

$$f(abc)=a0cb=abc-9$$

Mas $a0cb>abc$ para qualquer valor positivo a. Então não é possível encontrar uma resposta com 3 algarismos. Vamos então tentar encontrar uma com 4 algarismos.

$$f(abcd)=badc=abcd-9$$

Primeiro vamos considerar a e b. Para conseguirmos o menor valor possível, devemos ter $a=1$, o que significa $b=1$ também. Pensando então nos nossos números temos:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & c & d \\ & & - & 9 \\ \hline 1 & 1 & d & c \end{array}$$

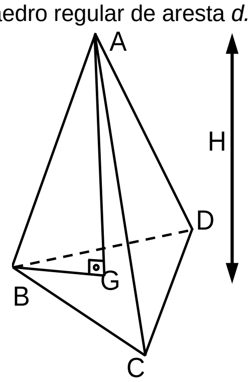
O menor que satisfaz isso acontece quando $c=1$ e $d=0$. Assim o número procurado é $x=1110$.

QUESTÃO 05

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a *d*, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determina a altura de cada um destes 3 sólidos em função de *d*.

Resolução

Segue abaixo um tetraedro regular de aresta *d.*

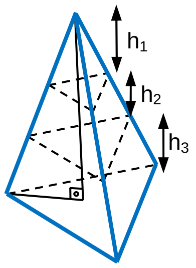


Lembrando que a altura desse tetraedro intercepta a base triangular em seu baricentro (G) e que o segmento $\overline{BG}$ mede dois terços da altura do triângulo *BCD.* Segue que:

$$(AG)^2=(AB)^2-(BG)^2\Leftrightarrow(AG)^2=d^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2\ \Leftrightarrow$$

$$(AG)^2=d^2\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow AG=\frac{d\sqrt{6}}{3}=H$$

Tomando os planos paralelos que cortam o tetraedro em três sólidos de volumes iguais, temos a seguinte ilustração:



Pela relação de semelhança entre sólidos, temos:

$$\left(\frac{h_1}{H}\right)^3=\frac{V_1}{V}\Leftrightarrow\left(\frac{h_1}{H}\right)^3=\frac{1}{3}\Leftrightarrow h_1=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot H\Leftrightarrow h_1=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{d\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{h_1=\frac{d\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{9}}{9}}$$

Analogamente, tomando o tetraedro de altura h_1+h_2, temos:

$$\left(\frac{h_1+h_2}{H}\right)^3=\frac{2}{3}\Leftrightarrow h_1+h_2=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\cdot H\Leftrightarrow h_1+h_2=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{d\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{9}}{9}+h_2=\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot d\sqrt{6}}{9}\Leftrightarrow\boxed{h_2=\frac{d\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{9}}{9}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}$$

E, por fim, segue que:

$$h_3=H-h_2-h_1\Leftrightarrow h_3=\frac{d\sqrt{6}}{3}-\frac{d\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{9}}{9}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)-\frac{d\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{9}}{9}\Leftrightarrow$$

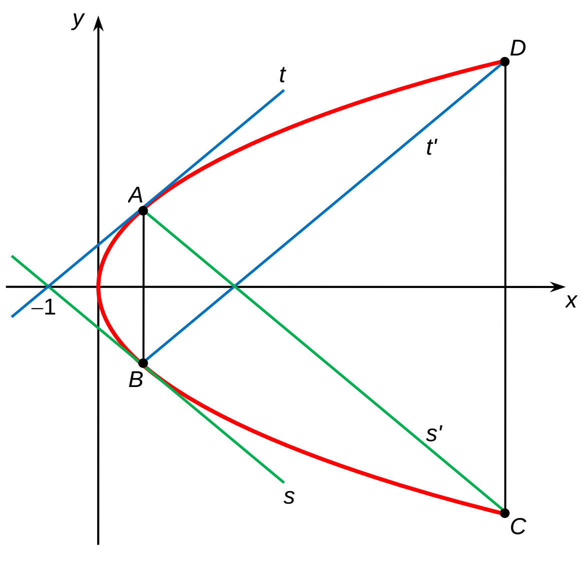
$$h_3=\frac{d\sqrt{6}}{3}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right)\Leftrightarrow\boxed{h_3=\frac{d\sqrt{6}}{3}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{18}}{3}\right)}$$

QUESTÃO 06

Pelo ponto P de coordenadas (–1, 0) traçam-se as tangentes t e s à parábola $y^2=2x$. A reta t intercepta a parábola em A e a reta s intercepta a parábola em B. Pelos pontos A e B traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos C e D, respectivamente. Calcule o valor da razão AB/CD.

Resolução

Temos a seguinte ilustração para a situação descrita:



As retas que passam pelo ponto $(-1,0)$ e são tangentes à parábola têm equações dadas por:

$$y-0=m\cdot(x-(-1))\Leftrightarrow y=m\cdot(x+1)$$

Fazendo a intersecção dessas retas com a parábola, temos:

$$\begin{cases}y^2=2x\\ y=m\cdot(x+1)\end{cases}$$

Substituindo uma equação na outra, segue que:

$$\left[m\cdot(x+1)\right]^2=2x\Leftrightarrow m^2\cdot x^2+2\cdot\left(m^2-1\right)\cdot x+m^2=0$$

Para que cada reta seja tangente à parábola, tal equação do segundo grau só deve retornar uma raiz real, de modo que existe somente um ponto comum entre as duas curvas. Assim, o discriminante dessa equação deve ser nulo:

$$\Delta=0\Leftrightarrow 2^2\cdot\left(m^2-1\right)^2-4\cdot m^2\cdot m^2=0\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A equação do segundo grau, por sua vez, fica como:

$$\frac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Assim, a abscissa (comum) dos pontos A e B é 1. Substituindo-se, por exemplo, na equação da parábola, vem que:

$$y^2=2\cdot1\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

Assim, fazendo a correspondência com o desenho, temos os pontos:

$$A=\left(1,\sqrt{2}\right)\text{ e }B=\left(1,-\sqrt{2}\right)$$

Seja s' a reta paralela à reta s pelo ponto A. Pelo paralelismo, seus coeficientes angulares devem ser iguais:

$$m_s'=m_s=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Assim, s' tem por equação:

$$y-y_A=m_s'\cdot(x-x_A)\Leftrightarrow y-\sqrt{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-1)$$

Fazendo a intersecção com a equação da parábola, temos que:

$$\begin{cases}x=\dfrac{y^2}{2}\\ \sqrt{2}\cdot y-2=1-x\end{cases}$$

Substituindo uma equação na outra:

$$\sqrt{2}\cdot y-2=1-\frac{y^2}{2}\Leftrightarrow y^2+2\sqrt{2}\cdot y-6=0\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\text{ ou }y=-3\sqrt{2}$$

Sendo $y=\sqrt{2}$ a ordenada do ponto A, a ordenada do ponto C deve ser:

$$y_C=-3\sqrt{2}$$

Analogamente para a ordenada do ponto D, devemos ter:

$$y_D=3\sqrt{2}$$

Portanto:

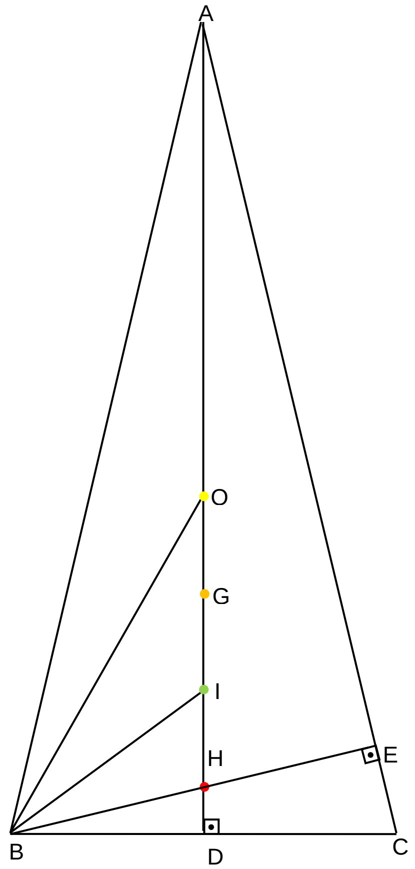
$$\frac{AB}{CD}=\frac{y_A-y_B}{y_D-y_C}=\frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\Leftrightarrow\boxed{\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}}$$

QUESTÃO 07

Num triângulo ABC isósceles, com ângulos iguais em B e C, o seu incentro I se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro H a seu baricentro G. O segmento de reta AG é menor que o segmento de reta AH. Os comprimentos dos segmentos de reta HI e IG são iguais a d. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de d.

Resolução

Lembrando que em um triângulo isósceles o ortocentro (H), o baricentro (G), o circuncentro (O) e o incentro estão alinhados e fazem parte da reta de Euler, segue ilustração da situação descrita no enunciado.



Podemos notar que $\Delta BEC \sim \Delta ADC$. Logo, $E\hat{B}C = D\hat{A}C$. Sendo assim, temos:

$$A\hat{C}D = 90° - D\hat{A}C$$

Como I é incentro, segue que:

$$D\hat{B}I = \frac{1}{2} \cdot A\hat{C}D \Leftrightarrow D\hat{B}I = \frac{90° - D\hat{A}C}{2} \Rightarrow$$
$$H\hat{B}I = D\hat{B}I - D\hat{A}C \Rightarrow H\hat{B}I = \frac{90° - 3 \cdot D\hat{A}C}{2}.$$

Por outro lado, temos que O é ortocentro, portanto o triângulo BOA é isósceles. Deste modo:

$$O\hat{B}A = O\hat{A}B = D\hat{A}C \Rightarrow O\hat{B}I = A\hat{B}I - O\hat{A}B \Rightarrow O\hat{B}I = D\hat{B}I - D\hat{A}C \Rightarrow$$
$$O\hat{B}I = \frac{90° - 3 \cdot D\hat{A}C}{2}$$

Desse modo, concluímos que:

$$O\hat{B}I = H\hat{B}I$$

E, portanto, BI é bissetriz do ângulo $O\hat{B}H$.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{OB}{OI} = \frac{BH}{HI}$$

Lembrando que $2 \cdot GO = GH$, segue que:

$$2 \cdot GO = 2d \Leftrightarrow GO = d$$

Portanto, voltando ao teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{OB}{2d} = \frac{BH}{d} \Leftrightarrow OB = 2 \cdot BH$$

Sendo $BD = a$, $DH = x$ e lembrando que

$$OB = AO = 2 \cdot GD - OG \Leftrightarrow OB = 2 \cdot (2d + x) - d \Leftrightarrow OB = 3d + 2x,$$

Portanto,

$$OB = 2 \cdot BH \Leftrightarrow BH = \frac{3d + 2x}{2}$$

Logo, por Pitágoras no triângulo *CBH,* segue que:

$$a^2 = (BH)^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{3d + 2x}{2}\right)^2 - x^2$$

Além disso, pela semelhança entre os triângulos *HBD* e *CAD* segue que:

$$\frac{HD}{BD} = \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{6d + 3x} \Leftrightarrow a^2 = x \cdot (6d + 3x)$$

Logo, igualando as duas equações, temos:

$$\left(\frac{3d + 2x}{2}\right)^2 - x^2 = x(6d + 3x) \Leftrightarrow 24xd + 12x^2 = 9d^2 + 12xd + 4x^2 - 4x^2 \Leftrightarrow$$
$$12x^2 + 12xd - 9d^2 = 0 \Rightarrow x = d \cdot \left(\frac{-12 + 24}{24}\right) \Rightarrow x = \frac{d}{2}$$

Portando,

$$AD = 6d + 3x \Leftrightarrow AD = 6d + \frac{3d}{2} \Leftrightarrow AD = \frac{15d}{2}$$

Substituindo,

$$a^2 = x \cdot (6d + 3x) \Rightarrow a^2 = \frac{d}{2} \cdot \frac{15 \cdot d}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{15}d}{2}$$

Logo, a área do triângulo é:

$$S = \frac{(BC) \cdot (AD)}{2} \Leftrightarrow S = 2a \cdot \frac{15d}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{15 \cdot d^2 \sqrt{15}}{4}}$$

Como,

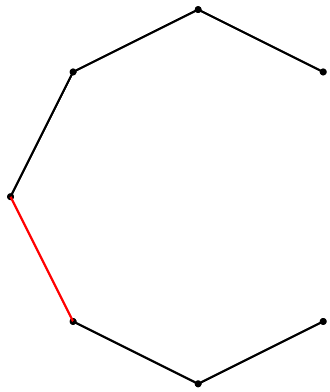
$$S = p \cdot r \Leftrightarrow S = p \cdot (ID) \Leftrightarrow \frac{15 \cdot d^2 \sqrt{15}}{4} = p \cdot \left(d + \frac{d}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{15 \cdot d^2 \sqrt{15}}{4} = p \cdot \frac{3d}{2} \Leftrightarrow 2p = \frac{30 \cdot d\sqrt{15}}{6} \Leftrightarrow \boxed{2p = 5 \cdot d\sqrt{15}}$$

QUESTÃO 08

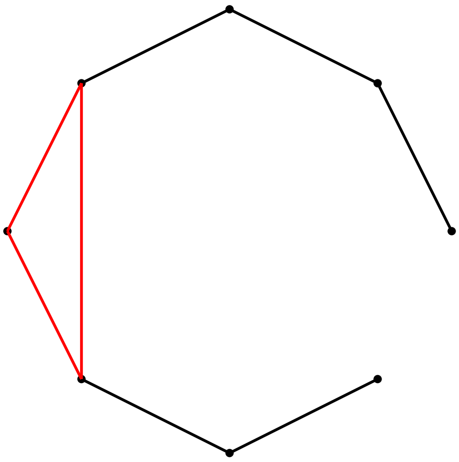
De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem.

Resolução

Vamos primeiramente considerar um caso geral com um polígono de n lados. Vamos chamar o número de maneiras de realizar a divisão desejada de P_n. Considere agora um lado específico do polígono:

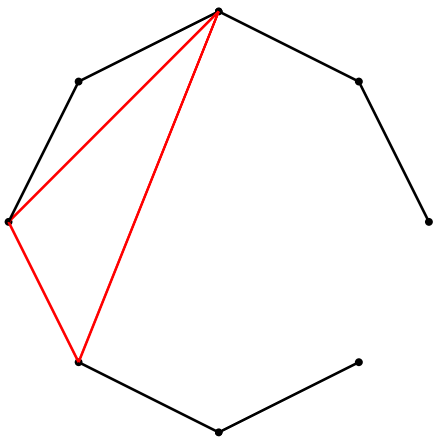


Esse segmento será lado de um dos triângulos formados. Devemos então ver as possibilidades que podem acontecer. A primeira é esse triângulo ser formado com dois lados consecutivos do polígono



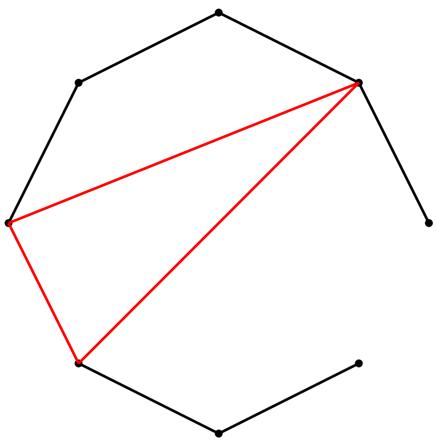
Nesse caso, resta dividir o polígono restante (à direita), e com nosso triângulo formado teremos P_{n-1} modos.

Se considerarmos o triângulo formado com o vértice seguinte ao lado consecutivo, temos:



Nesse caso, resta um triângulo a esquerda (que tem apenas $P_3 = 1$ modo de ser dividido) e um polígono de $n-2$ lados à direita, com P_{n-2} modos de ser dividido.

Com o vértice seguinte:



Ficamos com um polígono de 4 lados a esquerda (P_4 modos de ser dividido) e com um de $n-3$ lados à direita (P_{n-3} modos de ser dividido).

Podemos continuar esse argumento até chegar na ultimo vértice à direita. Assim temos a relação de recorrência:

$$P_n = P_{n-1} + P_3 \cdot P_{n-2} + P_4 \cdot P_{n-3} + \ldots + P_{n-2} \cdot P_3 + P_{n-1}$$

Se considerarmos por conveniência o valor $P_2 = 1$, podemos escrever isso como a soma:

$$P_n = \sum_{k=2}^{n-1} \left(P_k \cdot P_{n+1-k} \right)$$

Calculando os valores então:

$$P_4 = P_2 \cdot P_3 + P_3 \cdot P_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$
$$P_5 = P_2 \cdot P_4 + P_3 \cdot P_3 + P_4 \cdot P_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$
$$P_6 = P_2 \cdot P_5 + P_3 \cdot P_4 + P_4 \cdot P_3 + P_5 \cdot P_2 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$
$$P_7 = P_2 \cdot P_6 + P_3 \cdot P_5 + P_4 \cdot P_4 + P_5 \cdot P_3 + P_6 \cdot P_2 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$$
$$P_8 = P_2 \cdot P_7 + P_3 \cdot P_6 + P_4 \cdot P_5 + P_5 \cdot P_4 + P_6 \cdot P_3 + P_7 \cdot P_2 = $$
$$= 42 + 14 + 10 + 10 + 14 + 42 = 132$$
$$P_9 = P_2 \cdot P_8 + P_3 \cdot P_7 + P_4 \cdot P_6 + P_5 \cdot P_5 + P_6 \cdot P_4 + P_7 \cdot P_3 + P_8 \cdot P_2 =$$
$$= 132 + 42 + 28 + 25 + 28 + 42 + 132 = 429$$

Então temos $P_9 = 429$ modos de dividir o eneágono.

QUESTÃO 09

Sejam $S = a + b + c$ e $P = a \cdot b \cdot c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de *S* e *P*.

$$\begin{vmatrix} a^2 + (b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2 + b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Resolução

Seja *D* o determinante considerado. Denotemos por L_i a *i*-ésima linha e por C_i a *i*-ésima coluna (i = 1, 2, 3).

Pelo teorema de Jacobi, somando $-2L_3$ a L_1 e a L_2, vem que:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + (b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2 + b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & c^2 - (a+b)^2 \\ 0 & (a+c)^2 - b^2 & c^2 - (a+b)^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

Fatorando as diferenças de quadrados, vem que:

$$D = \begin{vmatrix} (b+c+a) \cdot (b+c-a) & 0 & (c+a+b) \cdot (c-a-b) \\ 0 & (a+c+b) \cdot (a+c-b) & (c+a+b) \cdot (c-a-b) \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)^2 \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & c-a-b \\ 0 & a+c-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Agora, somando $-(C_1 + C_2)$ a C_3 e sendo $a + b + c = S$, vem que:

$$D = S^2 \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -2b \\ 0 & a+c-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix} = 2S^2 \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -b \\ 0 & a+c-b & -a \\ a^2 & b^2 & ab \end{vmatrix}$$

Somando $b \cdot L_2$ a L_3, temos:

$$D = 2S^2 \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -b \\ 0 & a+c-b & -a \\ a^2 & b \cdot (a+c) & 0 \end{vmatrix}$$

Expandindo agora esse determinante por Laplace na primeira linha, temos:

$$D =$$
$$2\cdot S^2\cdot\left[(b+c-a)\cdot(-1)^{1+1}\cdot a\cdot b\cdot(a+c)+(-b)\cdot(-1)^{1+3}\cdot(-a^2)\cdot(a+c-b)\right]=$$
$$2\cdot S^2\cdot a\cdot b\cdot\left[(b+c-a)\cdot(a+c)+a\cdot(a+c-b)\right]=$$
$$2\cdot S^2\cdot a\cdot b\cdot\left[\cancel{ab}+bc+\cancel{ac}+c^2-\cancel{a^2}-\cancel{ac}+\cancel{a^2}+ac-\cancel{ab}\right]=$$
$$2\cdot S^2\cdot a\cdot b\cdot[bc+c^2+ac]=2\cdot S^2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot[b+c+a]$$

Sendo $a+b+c=S$ e $a\cdot b\cdot c=P$, temos que:

$$D=2\cdot S^2\cdot P\cdot S\Leftrightarrow\boxed{D=2\cdot S^3\cdot P}$$

QUESTÃO 10

Os coeficientes a_0, ... , a_{2014} do polinômio $P(x)=x^{2015}+a_{2014}x^{2014}+...+a_1x+a_0$ são tais que $a_i\in\{0,1\}$, para $0\le i\le 2014$.

a) Quais são possíveis raízes inteiras de $P(x)$?

b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

Resolução

a) Observe que pelo enunciado, todos os coeficientes de nosso polinômio P são números inteiros. Sendo assim podemos aplicar a pesquisa de raízes racionais. Se nosso polinômio tiver alguma raiz racional $\frac{p}{q}$ irredutível, então q é um divisor do coeficiente dominante (que nesse nosso exercício vale 1) e p é um divisor de a_0 . Então temos dois possíveis casos:

1) $a_0=1$. Nesse caso os candidatos a raiz são os números 1 e -1.
2) $a_0=0$. Nesse caso $x=0$ é raiz e ao dividir o polinômio P por x obtemos uma situação igual a inicial, mas com um grau menor.

Por causa desse procedimento, nossos únicos candidatos a raiz são os números 0, 1 e -1. No entanto, observe que

$$P(1)=1+a_{2014}+a_{2013}+...+a_1+a_0\ge 1+0+0+...+0=1$$

Dessa forma, $x=1$ não pode ser raiz e os candidatos possíveis são 0 e -1

b) Como queremos ter 2 raízes distintas, elas devem ser 0 e -1. Então:

$$P(0)=a_0=0$$
$$P(-1)=-1+a_{2014}-a_{2013}+a_{2012}-...+a_2-a_1$$
$$=\underbrace{(a_{2014}+a_{2013}+....+a_2)}_{1007\text{ termos}}-\underbrace{(a_{2013}+a_{2011}+...+a_1)}_{1007\text{ termos}}-1$$

Vamos então considerar que na parte positiva de $P(-1)$ temos k valores iguais a 1. Dessa forma para completar uma raiz, devemos ter $k-1$ valores iguais a 0 na parte negativa. Podemos escolher os valores que serão então iguais a 1 de $\binom{1007}{k}\cdot\binom{1007}{k-1}$ modos. O valor de k pode variar de 1 até 1007. Somando as possibilidades obtemos:

$$\sum_{k=1}^{1007}\binom{1007}{k}\cdot\binom{1007}{k-1}=\sum_{k=1}^{1007}\binom{1007}{1007-k}\cdot\binom{1007}{k-1}$$

E então pela convolução de Vandermonde, que afirma que $\sum_{k=0}^{h}\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{h-k}=\binom{m+n}{h}$, obtemos que

$$\sum_{k=1}^{1007}\binom{1007}{1007-k}\cdot\binom{1007}{k-1}=\binom{1007+1007}{1007-1}=\binom{2014}{1006}$$

Ou seja, temos $\binom{2014}{1006}$ polinômios satisfazendo as restrições.

Equipe desta resolução

Matemática

Alessandro Fonseca Esteves Coelho
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Thais de Almeida Guizellini

Revisão

Danilo José de Lima
Fabiano Gonçalves Lopes
Felipe Eboli Sotorilli

Digitação, Diagramação e Publicação

Lucas Rubi Rosa
Toky Popytek Coelho