Fez

ELITE

PRÉ-VESTIBULAR

campinas

Aprovou!

Elite Resolve

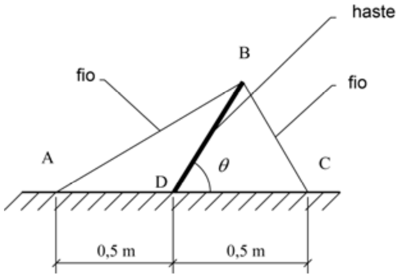
IME 2012

FÍSICA

Discursivas

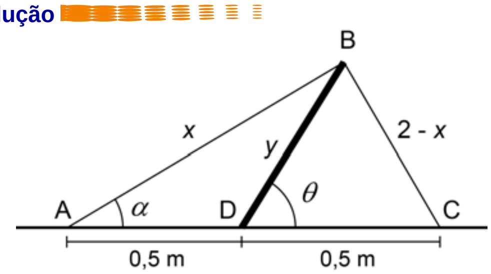
FÍSICA

QUESTÃO 01



Um varal de roupas foi construído utilizando uma haste rígida DB de massa desprezível, com a extremidade D apoiada no solo e a B em um ponto de um fio ABC com 2,0 m de comprimento, 100 g de massa e tensionado de 15 N, como mostra a figura acima. As extremidades A e C do fio estão fixadas no solo, equidistantes de 0,5 m da extremidade D da haste.
Sabe-se que uma frequência de batimento de 10 Hz foi produzida pela vibração dos segmentos AB e BC em suas frequências fundamentais após serem percutidos simultaneamente. Diante do exposto, determine a inclinação θ da haste.

Resolução



A densidade linear do fio é $\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0,1}{2} = 0,05\ \text{kg/m}$. Assim, a velocidade de propagação, considerando mesma tensão para todo o fio, será:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{15}{0,05}} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\ \text{m/s}$$

O comprimento de cada segmento é igual a meio comprimento de onda das harmônicas fundamentais, cujas frequências são:

$$f_{BC} = \frac{v}{\lambda} = \frac{10\sqrt{3}}{2\cdot(2-x)} \quad \text{e} \quad f_{AB} = \frac{v}{\lambda} = \frac{10\sqrt{3}}{2x}$$

Estas frequencias são tão maiores quanto menor o comprimento de onda, de modo que, se considerarmos que o segmento AB é maior que BC, $f_{BC} > f_{AB}$. Assim, pela frequência de batimento, temos que:

$$f_{BC} - f_{AB} = 10 \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{2\cdot(2-x)} - \frac{10\sqrt{3}}{2x} = 10 \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot(x-2+x) = 2\cdot(2x-x^2) \Rightarrow$$

$$x^2 + (\sqrt{3}-2)\cdot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2-\sqrt{3} \pm \sqrt{7-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{2} = 1 + \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$$

Porém, $1 - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} < 0$, enquanto $x > 0$. Com isso, $x = 1 + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ e $2 - x = 2 - 1 - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$.

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$(2-x)^2 = x^2 + 1 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2+1-(2-x)^2}{2x} = \frac{4x-3}{2x}$$

Com outra lei dos cossenos, agora no triângulo ABD, obtemos:

$$y^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos\alpha \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x\cdot\frac{4x-3}{2x} \Rightarrow$$

$$y^2 = x^2 - 2x + \frac{7}{4} \Rightarrow y = \sqrt{(x^2-2x+1)+\frac{3}{4}} = \sqrt{(x-1)^2+\frac{3}{4}}$$

Por fim, com uma lei dos cossenos no triângulo BCD, obtemos:

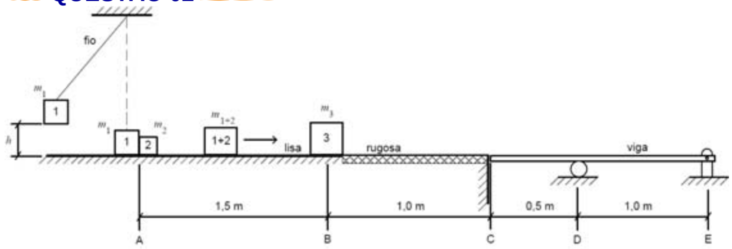
$$(2-x)^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y\cdot\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 = x^2 - 2x + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - y\cdot\cos\theta \Rightarrow y\cdot\cos\theta = 2x - 2$$

$$\cos\theta = \frac{2\cdot(x-1)}{y} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}+3}}{2}}$$

$$\therefore \theta = \text{arcos}\left(2\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{13-2\sqrt{21}}}\right)$$

QUESTÃO 02



Um corpo de massa m_1 = 4 kg está em repouso suspenso por um fio a uma altura h do solo, conforme mostra a figura acima. Ao ser solto, choca-se com o corpo m_2 de 2 kg no ponto A, desprendendo-se do fio. Após o choque, os corpos m_1 e m_2 passam a deslizar unidos sobre uma superfície lisa e colidem com um corpo em repouso, de massa m_3 = 8 kg. Nesse ponto, o conjunto m_1 + m_2 para e o corpo m_3 move-se em uma superfície rugosa de coeficiente de atrito cinético igual a 0,45, estacionando no ponto C, situado na extremidade da viga CE. A viga é constituída por um material uniforme e homogêneo, cuja massa específica linear é 4 kg/m. Determine:

a) a altura h;

b) o valor e o sentido da reação vertical do apoio E depois que o corpo m_3 atinge o ponto C da viga.

<u>Dado</u>:
aceleração da gravidade: 10 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

<u>Observação</u>:
Considerar que os corpos m_1, m_2 e m_3 apresentam dimensões desprezíveis.

Resolução

a) Para a situação em que o corpo de massa m_1 sai da posição inicial, de altura h, e colide com o corpo de massa m_2, podemos aplicar a conservação da energia mecânica:

$$(E_{pot}+E_{cin})_{\text{início}} = (E_{pot}+E_{cin})_{\text{final}} \Rightarrow \cancel{m_1}\cdot g\cdot h + 0 = 0 + \frac{\cancel{m_1}\cdot v_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2\cdot g\cdot h} \qquad \text{Eq. 1}$$

Observe que pela conservação da quantidade de movimento, o corpo de massa m_1 terá uma quantidade de movimento $\vec{Q}_1$ que será igual à quantidade de movimento do conjunto formado pelos blocos de massa m_1 e m_2 e que, por sua vez, será igual à quantidade de movimento do bloco de massa m_3 ao entrar na região rugosa, uma vez que no enunciado afirma-se que o conjunto de massa $m_1 + m_2$ para ao colidir com o bloco de massa m_3. Logo:

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_3 \Rightarrow m_1\cdot v_1 = m_3\cdot v_3 \Rightarrow 4\cdot v_1 = 8\cdot v_3$$

Substituindo neste resultado o que foi encontrado na Eq. 1, temos:

$$\sqrt{2\cdot g\cdot h} = 2\cdot v_3 \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{g\cdot h}{2}} \qquad \text{Eq. 2}$$

Ao entrar na parte rugosa, observamos que toda a energia cinética do corpo 3 será dissipada pelo atrito, assim pelo Teorema da Energia Cinética (T. E. C.) temos:

$$\tau_{Fat} = \Delta E_{cin} \Rightarrow \mu \cdot N_3 \cdot d \cdot \cos\theta = \frac{m_3 \cdot v_3^2}{2}$$

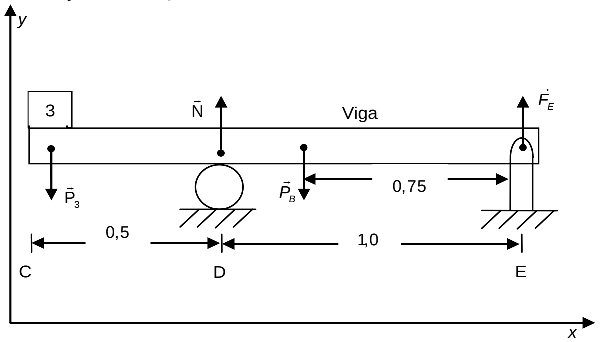
Sendo N_3 a normal que age sobre o corpo 3, d a distância percorrida sob atuação da força de atrito e θ o ângulo entre a força de atrito $\vec{F}_{Fat}$ e o vetor deslocamento $\vec{d}$. Assim:

$$0{,}45 \cdot \cancel{m_3} \cdot g \cdot 1 \cdot (-1) = 0 - \frac{\cancel{m_3} \cdot v_3^2}{2} \Rightarrow v_3 = 3{,}0 \text{ m/s}$$

Substituindo este resultado na Eq. 2, temos:

$$3 = \sqrt{\frac{10 \cdot h}{2}} \Rightarrow \boxed{h = 1{,}8 \text{ m}}$$

b) Seja $\vec{F}_E$ a reação vertical do apoio E. A figura a seguir representa a viga e as forças nela aplicada.



Para a situação de equilíbrio estático, temos que o somatório dos momentos das forças que atuam na barra, para qualquer ponto, é nulo ($\Sigma\vec{M} = \vec{0}$). Escolhendo o ponto D – ponto de aplicação da normal $\vec{N}$ – e levando em consideração que as forças horizontais não produziriam momento no ponto escolhido, podemos escrever:

$$\Sigma\vec{M}_{Horário} + \Sigma\vec{M}_{Anti\text{-}Horário} = \vec{0}$$

Adotando o sentido Anti-Horário como positivo, temos:

$$-P_{viga} \cdot 0{,}25 + P_3 \cdot 0{,}5 + F_E \cdot 1 = 0 \Rightarrow -(4 \cdot 10 \cdot 1{,}5) \cdot 0{,}25 + 80 \cdot 05 + F_E = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_E = -25 \text{ N}}$$

O valor negativo se deve ao fato de ter sido admitido que a força seria para cima, ou seja, **o sentido da força é para baixo**.

QUESTÃO 03

Em visita a uma instalação fabril, um engenheiro observa o funcionamento de uma máquina térmica que produz trabalho e opera em um ciclo termodinâmico, extraindo energia de um reservatório térmico a 1000 K e rejeitando calor para um segundo reservatório a 600 K. Os dados de operação da máquina indicam que seu índice de desempenho é 80%. Ele afirma que é possível racionalizar a operação acoplando uma segunda máquina térmica ao reservatório de menor temperatura e fazendo com que esta rejeite calor para o ambiente, que se encontra a 300 K. Ao ser informado de que apenas 60% do calor rejeitado pela primeira máquina pode ser efetivamente aproveitado, o engenheiro argumenta que, sob estas condições, a segunda máquina pode disponibilizar uma quantidade de trabalho igual a 30% da primeira máquina. Admite-se que o índice de desempenho de segunda máquina, que também opera em um ciclo termodinâmico, é metade do da primeira máquina. Por meio de uma análise termodinâmica do problema, verifique se o valor de 30% está correto.

Observação:

o índice de desempenho de uma máquina térmica é a razão entre o seu rendimento real e o rendimento máximo teoricamente admissível.

Resolução

O rendimento máximo de uma máquina térmica é o rendimento de Carnot, dado por:

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}, \text{ em que}$$

T_Q é a temperatura da fonte quente;

T_F é a temperatura da fonte fria.

Rendimento de uma máquina térmica:

$$\eta_{real} = \frac{\tau}{Q_Q} = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q}.$$

τ é o trabalho realizado pela máquina térmica;

Q_Q é o calor recebido da fonte quente;

Q_F é o calor rejeitado para a fonte fria.

De acordo com o enunciado, o índice de desempenho é dado por:

$$I_D = \frac{\eta_{real}}{\eta_{max}}$$

Para a 1ª máquina, temos: $T_{1Q} = 1000K$ e $T_{1F} = 600K$. Logo:

Rendimento máximo:	Rendimento real:
$\eta_{1max} = 1 - \frac{T_{1F}}{T_{1Q}} = 1 - \frac{600}{1000}$ $\eta_{1max} = 0{,}4$	$\frac{\eta_{1real}}{\eta_{1max}} = 0{,}8$ $\eta_{1real} = 0{,}8 \cdot 0{,}4$ $\eta_{1real} = 0{,}32$

Para a 2ª máquina, temos: $T_{2Q} = 600K$ e $T_{2F} = 300K$. Logo:

Rendimento máximo:	Rendimento real:
$\eta_{2max} = 1 - \frac{T_{2F}}{T_{2Q}} = 1 - \frac{300}{600}$ $\eta_{2max} = 0{,}5$	$\frac{\eta_{2real}}{\eta_{2max}} = \frac{I_{D1}}{2}$ $\frac{\eta_{2real}}{0{,}5} = \frac{0{,}8}{2}$ $\eta_{2real} = 0{,}2$

A partir do rendimento real da 1ª máquina é possível estabelecer as seguintes relações:

$$0{,}32 = 1 - \frac{Q_{1F}}{Q_{1Q}} \Rightarrow Q_{1F} = 0{,}68 \cdot Q_{1Q} \qquad \textbf{(1)}$$

$$0{,}32 = \frac{\tau_1}{Q_{1Q}} \Rightarrow Q_{1Q} = \frac{\tau_1}{0{,}32} \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1)** e **(2)**, temos:

$$Q_{1F} = \frac{0{,}68 \cdot \tau_1}{0{,}32} \qquad \textbf{(3)}$$

A partir do rendimento real da 2ª máquina é possível estabelecer a seguinte relação:

$$0{,}2 = \frac{\tau_2}{Q_{2Q}} \qquad \textbf{(4)}$$

Como apenas 60% do calor rejeitado pela 1ª máquina pode ser aproveitado pela 2ª máquina, temos:

$$Q_{2Q} = 0{,}6 \cdot Q_{1F} \qquad \textbf{(5)}$$

De (4) e (5), temos:

$$0{,}2 = \frac{\tau_2}{0{,}6 \cdot Q_{1F}}$$

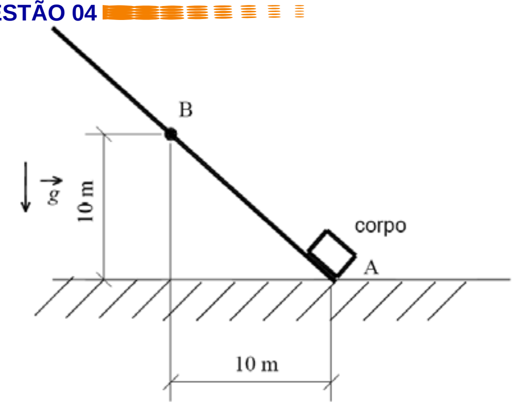
$$\tau_2 = 0{,}12 \cdot Q_{1F} \qquad \textbf{(6)}$$

Substituindo (3) em (6):

$$\tau_2 = 0{,}12 \cdot \left(\frac{0{,}68 \cdot \tau_1}{0{,}32}\right) \Rightarrow \boxed{\tau_2 = 0{,}255 \cdot \tau_1}$$

Logo, o valor de 30% não está correto, pois o trabalho da segunda máquina é 25,5% do trabalho da primeira.

QUESTÃO 04



Um corpo com velocidade v parte do ponto A, sobe a rampa AB e atinge o repouso no ponto B. Sabe-se que existe atrito entre o corpo e a rampa e que a metade da energia dissipada pelo atrito é transferida ao corpo sob a forma de calor. Determine a variação volumétrica do corpo devido à sua dilatação.

Dados:

- aceleração da gravidade: g = 10 m·s^{-2};
- volume inicial do corpo: V_i = 0,001 m^3;
- coeficiente de dilatação térmica linear do corpo: α = 0,00001 K^{-1};
- calor específico do corpo: c = 400 J·kg^{-1}·K^{-1}.

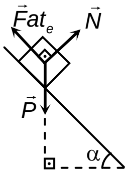
Observações:

- o coeficiente de atrito cinético é igual a 80% do coeficiente de atrito estático;
- o coeficiente de atrito estático é o menor valor para o qual o corpo permanece em repouso sobre a rampa no ponto B.

Resolução

Seja α o ângulo entre a horizontal e o plano, percebe-se facilmente que $\alpha = 45^o$.

Para o ponto B, podemos montar o seguinte diagrama de forças:



Considerando que o corpo ficará em repouso no ponto B e decompondo a força peso em componentes $\vec{P}_N$, na direção da normal, e $\vec{P}_{FAT}$, na direção da força de atrito, temos:

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P}_N = \vec{0} \\ \vec{Fat}_e + \vec{P}_{FAT} = \vec{0} \end{cases}$$

Daí, segue que:

$$Fat_e = m\cdot g\cdot sen\alpha \Rightarrow \mu_e\cdot N = m\cdot g\cdot sen\alpha \Rightarrow$$

$$\mu_e\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha = m\cdot g\cdot sen\alpha \Rightarrow \mu_e = tg\alpha \Rightarrow \boxed{\mu_e = 1}$$

E ainda:

$$\mu_c = 0{,}8\cdot\mu_e \Rightarrow \boxed{\mu_c = 0{,}8}$$

Observe que a única aceleração existente durante o deslocamento de A até B é paralela à rampa, assim, na direção perpendicular ao movimento, temos:

$$\vec{N} + \vec{P}_N = \vec{0} \Rightarrow N = m\cdot g\cdot\cos\alpha$$

Logo, o trabalho da força de atrito durante esse deslocamento ($\Delta s = 10\sqrt{2}m$) é dado por:

$$\tau_{Fat} = Fat\cdot\Delta s = (\mu_c\cdot N)\cdot\Delta s = \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha)\cdot\Delta s \Rightarrow$$

$$\tau_{Fat} = 0{,}8\cdot m\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\tau_{Fat} = 80\cdot m$$

Como metade da energia dissipada é convertida em calor, temos:

$$Q = \frac{\tau_{Fat}}{2} = \frac{80\cdot m}{2} = 40\cdot m$$

Logo:

$$40\cdot\cancel{m} = \cancel{m}\cdot c\cdot\Delta T \Rightarrow 40 = 400\cdot\Delta T \Rightarrow \Delta T = 0{,}1K$$

A relação entre a dilatação volumétrica (γ) e a dilatação linear (α) é dada por: $\gamma = 3\cdot\alpha$

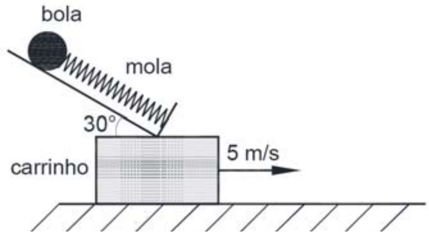
Logo:

$$\Delta V = V_i\cdot\gamma\cdot\Delta T = V_i\cdot(3\cdot\alpha)\cdot\Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta V = 0{,}001\cdot 3\cdot 0{,}00001\cdot 0{,}1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta V = 3\cdot 10^{-9} m^3}$$

QUESTÃO 05



A figura apresenta um carrinho que se desloca a uma velocidade constante de 5 m/s para a direita em relação a um observador que está no solo. Sobre o carrinho encontra-se um conjunto formado por um plano inclinado de 30°, uma mola comprimida inicialmente de 10 cm e uma pequena bola apoiada em sua extremidade. A bola é liberada e se desprende do conjunto na posição em que a mola deixa de ser comprimida. Considerando que a mola permaneça não comprimida após a liberação da bola, devido a um dispositivo mecânico, determine:

a) o vetor momento linear da bola em relação ao solo no momento em que se desprende do conjunto;

b) a distância entre a bola e a extremidade da mola quando a bola atinge a altura máxima.

Dados:

- Constante elástica da mola: k = 100 N.m-1
- Massa da bola: m = 200 g
- Aceleração da gravidade: g = 10 m·s^{-2}

Observação: A massa do carrinho é muito maior que a massa da bola.

Resolução

a) Para encontrarmos a quantidade de movimento da bola precisamos determinar a velocidade com que ela é lançada. Para isso, aplicamos a conservação da energia mecânica no sistema. Dessa forma, no referencial do carrinho, temos:

$$\left(E_{\text{pot elastica}} + E_{\text{pot gravitacional}} + E_{\text{cin}}\right)_{\text{inicial}} = \left(E_{\text{pot elastica}} + E_{\text{pot gravitacional}} + E_{\text{cin}}\right)_{\text{final}}$$

Adotando o referencial para a energia potencial gravitacional a partir do ponto de máxima compressão da mola, temos:

$$\frac{k\cdot x^2}{2} + 0 + 0 = 0 + m\cdot g\cdot h + \frac{m\cdot v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{k\cdot x^2}{2} = m\cdot g\cdot x\cdot\text{sen}30° + \frac{m\cdot v^2}{2} \Rightarrow$$

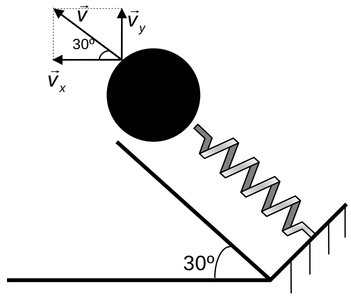
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(\frac{k\cdot x^2}{2} - m\cdot g\cdot x\cdot\text{sen}30°\right)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{0{,}2}\cdot\left(\frac{100\cdot 0{,}10^2}{2} - 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}10\cdot\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10\cdot(0{,}5 - 0{,}1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = 2{,}0 \text{ m/s}}$$

Dessa forma, a velocidade horizontal e vertical, para o referencial do carrinho será:

$$\begin{cases} v_x = 2\cdot\cos 30° \\ v_y = 2\cdot\text{sen}30° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \sqrt{3} \text{ m/s} \\ v_y = 1 \text{ m/s} \end{cases}$$



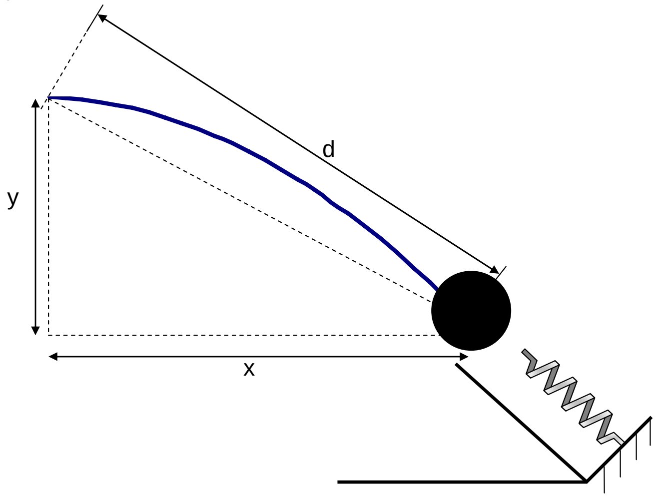
Logo, mudando para o referencial da Terra, os valores das velocidades passam a ser:

$$\begin{cases} v'_x = \left(5 - \sqrt{3}\right) \text{ m/s} \\ v'_y = 1 \text{ m/s} \end{cases}$$

Portanto, o vetor quantidade de movimento para um referencial no solo será:

$$\vec{Q} = m\cdot\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = 0{,}200\cdot\left[\left(5 - \sqrt{3}\right)\vec{i} + 1\vec{j}\right]\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}}$$

b) Para calcularmos a distância entre o ponto de lançamento e a altura máxima, podemos realizar os cálculos para o referencial do carrinho, uma vez que ele é um referencial inercial (velocidade constante). Assim, seja *y* o alcance vertical e *x* o alcance horizontal, conforme esquematizado.



Para a vertical, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S \Rightarrow 0 = v_y^2 - 2 \cdot g \cdot y \Rightarrow y = 0{,}05 \text{ m}$$

Na horizontal, o valor de *x* é: $x = v_x \cdot t_{subida}$. Calculando o t_{subida}:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow y = v_y t_{sub} + \frac{g \cdot t_{sub}^2}{2} \Rightarrow$$

$$0{,}05 = t_{sub} - 5 \cdot t_{sub}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{sub} = 0{,}1 \text{ s}}$$

Logo,

$$x = 0{,}1\sqrt{3} \text{ m/s}$$

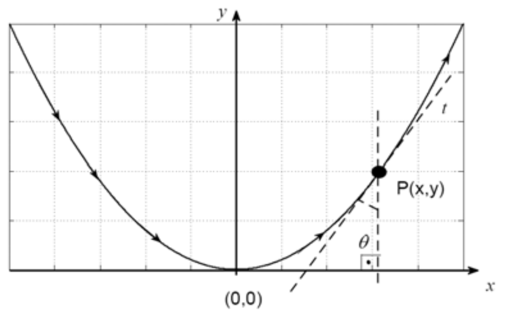
Portanto, a distância *d* será dada por:

$$d^2 = x^2 + y^2 = \left(0{,}1 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 0{,}05^2 \Rightarrow d = \sqrt{0{,}0325} \text{ m}$$

Como $18^2 = 324$, podemos aproximar *d* para 0,18 m, isto é:

$$\boxed{d \approx 18 \text{ cm}}$$

QUESTÃO 06



A figura acima mostra a trajetória parabólica de um raio luminoso em um meio não homogêneo. Determine o índice de refração n desse meio, que é uma função de y, sabendo que a trajetória do raio é descrita pela equação $y = ax^2$, onde $a > 0$.

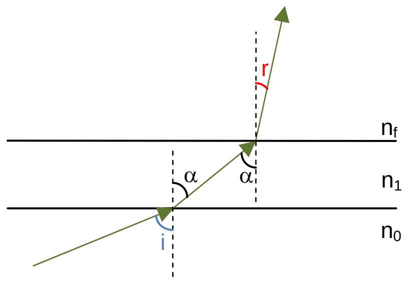
Dados:

- cotg θ = 2ax;
- n(0) = n_o.

Observação:
P(x,y) é o ponto de tangência entre a reta t e a parábola.

Resolução

Antes de começar a resolver este exercício, vale lembrar uma simples propriedade da refração: independentemente de por quantos meios diferentes uma onda refrate, a Lei de Snell pode ser aplicada considerando apenas as características da primeira incidência e da última refração:



Entre n_0 e n_1:
$$n_0 \,\text{sen}\, i = n_1 \,\text{sen}\, \alpha$$

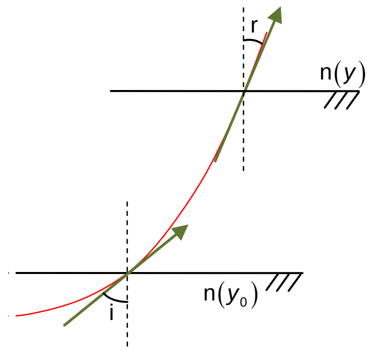
Entre n_1 e n_f:
$$n_1 \,\text{sen}\, \alpha = n_f \,\text{sen}\, r$$

E portanto:
$$n_0 \,\text{sen}\, i = n_f \,\text{sen}\, r$$

Tomando então pontos (x_0,y_0) e P(x,y) quaisquer da parábola e usando a ideia acima:

$$\text{n}(y_0) \cdot \text{sen}\, i = \text{n}(y) \cdot \text{sen}\, r$$

Vamos então olhar para o gráfico abaixo:



Sabemos pelo enunciado que $\text{cotg}\, i = 2a \cdot x_0$ e $\text{cotg}\, r = 2a \cdot x$. Vamos então reescrever a Lei de Snell em função das cotangentes dos ângulos, usando a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{cotg}^2\,\theta}} \quad (\text{para } 0 < \theta < \pi/2)$$

Reescrevendo então a Lei de Snell e substituindo valores:

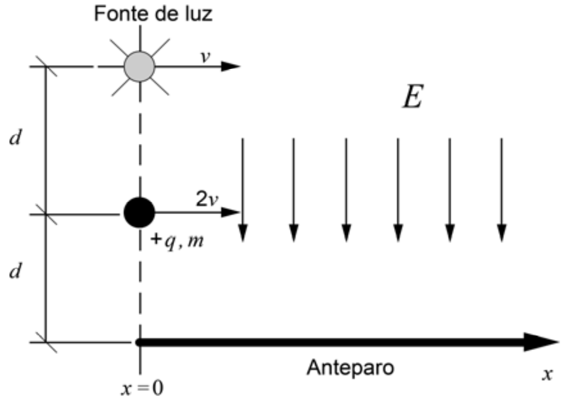
$$\text{n}(y_0) \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \text{cotg}^2\, i}} = \text{n}(y) \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \text{cotg}^2\, r}}$$

$$\text{n}(y_0) \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + 4a^2 x_0^2}} = \text{n}(y) \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + 4a^2 x^2}}$$

Se tomarmos o ponto (x_0,y_0) como sendo (0,0). Podemos usar $\text{n}(0) = n_0$ e daí chegamos em $\text{n}(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4a^2 x^2}$. Como a função pedida pela questão tem que depender de y, substituímos aqui $x^2 = y/a$ da equação da parábola, e chegamos à solução final:

$$\boxed{\text{n}(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4ay}}$$

QUESTÃO 07



A figura apresenta uma fonte de luz e um objeto com carga +*q* e massa *m* que penetram numa região sujeita a um campo elétrico *E* uniforme e sem a influência da força da gravidade. No instante *t* = 0, suas velocidades horizontais iniciais são v e $2v$, respectivamente. Determine:

a) o instante t em que o objeto se choca com o anteparo;
b) a equação da posição da sombra do objeto no anteparo em função do tempo;
c) a velocidade máxima da sombra do objeto no anteparo;
d) a equação da velocidade da sombra do objeto no anteparo em função do tempo caso o campo elétrico esteja agindo horizontalmente da esquerda para a direita.

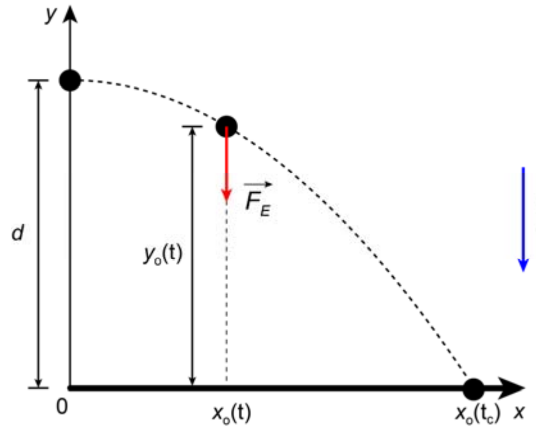
Resolução

a) A força elétrica será a força resultante agindo sobre o objeto. Logo:

$$\vec{F_E} = \vec{F_{RES}} \Rightarrow |q|\cdot|\vec{E}| = m\cdot|\vec{a}| \Leftrightarrow |\vec{a}| = \frac{q\cdot E}{m}$$

Adotando a orientação positiva do eixo vertical para cima e sua origem ($y = 0$) coincidente com a origem do eixo horizontal ($x = 0$), temos que a aceleração escalar γ do objeto, na direção vertical, será dada por:

$$\gamma = -|\vec{a}| = -\frac{q\cdot E}{m}$$



A trajetória do objeto será um arco de parábola, sendo que a projeção do movimento na direção horizontal (x) será um movimento retilíneo e uniforme, enquanto a projeção do movimento na direção vertical (y) será um movimento retilíneo uniformemente variado.

As equações do movimento projetado em cada uma das direções serão dadas por:

$$x_O(t) = x_O(0) + v_O\cdot t = 0 + (2\cdot v)\cdot t \Leftrightarrow x_O(t) = 2\cdot v\cdot t$$

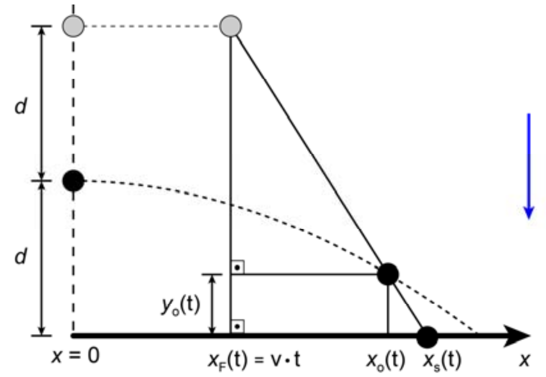
$$y_O(t) = y_O(0) + v_{O,y}(0)\cdot t + \frac{\gamma\cdot t^2}{2} = d + 0\cdot t + \left(-\frac{q\cdot E}{m}\right)\cdot\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$y_O(t) = d - \frac{q\cdot E\cdot t^2}{2\cdot m}$$

O instante t_C em que o objeto se choca com o chão pode ser obtido a partir de:

$$y_O(t_C) = 0 \Leftrightarrow d - \frac{q\cdot E\cdot t_C^{\,2}}{2\cdot m} = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_C = \sqrt{\frac{2\cdot m\cdot d}{q\cdot E}}}$$

b) Observe a figura a seguir, que descreve, num instante t qualquer (anterior à colisão do objeto com o solo), as posições da fonte de luz, do objeto e da sua sombra no anteparo.



Da semelhança entre os triângulos retângulos vem que:

$$\frac{x_S(t) - x_F(t)}{x_O(t) - x_F(t)} = \frac{2\cdot d}{2\cdot d - y_O(t)} \Leftrightarrow \frac{x_S(t) - v\cdot t}{2\cdot v\cdot t - v\cdot t} = \frac{2\cdot d}{2\cdot d - \left(d - \dfrac{q\cdot E\cdot t^2}{2\cdot m}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_S(t) - v\cdot t}{v\cdot t} = \frac{2\cdot d}{d + \dfrac{q\cdot E\cdot t^2}{2\cdot m}} \Leftrightarrow \boxed{x_S(t) = v\cdot t + \frac{4\cdot m\cdot d\cdot v\cdot t}{2\cdot m\cdot d + q\cdot E\cdot t^2}}$$

c) A velocidade da sombra em função do tempo será dada por:

$$v_S(t) = \frac{dx_S}{dt}(t) \Leftrightarrow$$

$$v_S(t) = v + \frac{4\cdot m\cdot d\cdot v\cdot(2\cdot m\cdot d + q\cdot E\cdot t^2) - 4\cdot m\cdot d\cdot v\cdot t\cdot(2\cdot q\cdot E\cdot t)}{(2\cdot m\cdot d + q\cdot E\cdot t^2)^2} \Leftrightarrow$$

$$v_S(t) = v + \frac{4\cdot m\cdot d\cdot v\cdot(2\cdot m\cdot d - q\cdot E\cdot t^2)}{(2\cdot m\cdot d + q\cdot E\cdot t^2)^2}$$

Observe que para $t \geq 0$, essa função é estritamente decrescente, pois à medida que t aumenta, tanto o numerador decresce (devido à presença do termo $-q\cdot E\cdot t^2$) como o denominador cresce (devido à presença do termo $+q\cdot E\cdot t^2$).

Sendo assim, o máximo da função, para $t \geq 0$, ocorre para o menor instante de tempo, que, no caso, é justamente $t = 0$. Logo:

$$v_{S(MÁX)} = v_S(0) = v + \frac{4\cdot m\cdot d\cdot v\cdot(2\cdot m\cdot d)}{(2\cdot m\cdot d)^2} \Leftrightarrow \boxed{v_{S(MÁX)} = 3\cdot v}$$

d) Se o campo elétrico age horizontalmente da esquerda para a direita, o objeto executará um movimento retilíneo uniformemente variado na direção horizontal, com a ordenada constante $y_O = d$.

Sua aceleração (vetorial) terá o mesmo módulo que aquela calculada no item (a), mas como agora ela apontará na direção horizontal no seu sentido positivo, temos:

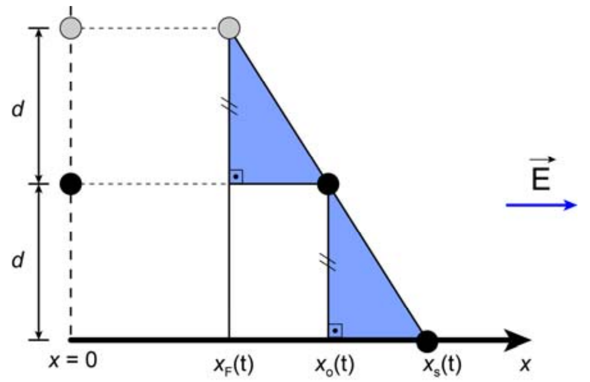
$$\gamma = +|\vec{a}| = \frac{q\cdot E}{m}$$

Consequentemente, a equação horária do movimento será dada por:

$$x_O(t) = x_O(t) + v_{O,x}(0)\cdot t + \frac{\gamma\cdot t^2}{2} = 0 + (2\cdot v)\cdot t + \frac{q\cdot E}{m}\cdot\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_O(t) = 2\cdot v\cdot t + \frac{q\cdot E\cdot t^2}{2\cdot m}$$

Observe agora a disposição da fonte de luz, do objeto e de sua sombra projetada para um instante de tempo t qualquer:



Da congruência dos triângulos retângulos assinalados, vem que:

$$x_O(t) - x_F(t) = x_S(t) - x_O(t) \Leftrightarrow x_S(t) = 2\cdot x_O(t) - x_F(t) \Leftrightarrow$$

$$x_S(t) = 2\cdot\left(2\cdot v\cdot t + \frac{q\cdot E\cdot t^2}{2\cdot m}\right) - v\cdot t \Leftrightarrow x_S(t) = 3\cdot v\cdot t + \frac{q\cdot E\cdot t^2}{m}$$

Assim, a velocidade $v_S(t)$ da sombra nessa nova situação será dada por:

$$v_S(t) = \frac{dx_S}{dt}(t) \Leftrightarrow \boxed{v_S(t) = 3\cdot v + \frac{2\cdot q\cdot E\cdot t}{m}}$$

QUESTÃO 08

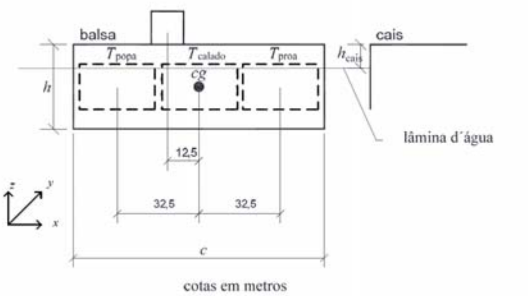


Figura 1

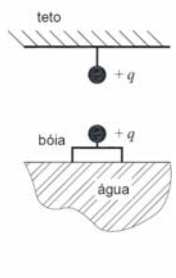


Figura 2

Uma balsa de $2\cdot10^6$ kg encontra-se ancorada em um cais realizando uma operação de carregamento. O alinhamento horizontal da balsa é controlado por dois tanques denominados tanque de proa e tanque de popa (T_{proa} e T_{popa}). Cada um desses tanques possui uma bomba que realiza a transferência da água contida em seu interior para o outro tanque. Além desses dois tanques, existe o tanque de calado, denominado T_{calado}, que controla a profundidade (posição vertical) da balsa, captando ou rejeitando a água do mar, de modo que seu plano de embarque permaneça no nível do cais. Um corpo de massa $400\cdot10^3$ kg está embarcado na balsa, a uma distância de 12,5 m à esquerda do centro de gravidade da balsa (cg) e centralizada em relação ao eixo *y*. Toda situação descrita acima se encontra representada na Figura 1.
Para a determinação do volume de água contido no tanque de calado, foi idealizado um dispositivo composto por duas cargas positivas iguais a 1 μC, que é capaz de medir a força de repulsão entre as cargas. A primeira carga se localiza em uma bóia no interior do tanque e a segunda carga se localiza no teto, conforme apresentado na Figura 2.
Sabendo-se que: a massa total de água dos tanques de proa e de popa é $1{,}4\cdot10^6$ kg; a altura do cais (h_{cais}) medida a partir da lâmina d´água é 4 m; a balsa encontra-se nivelada com o cais; e em equilíbrio mecânico, determine:
a) A massa de água em cada um dos três tanques.
b) O módulo da força de repulsão entre as cargas.
Dados:

- Densidade da água $\rho = 1000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Permissividade do vácuo $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Dimensões da balsa: - Comprimento: *c* = 100 m; - Altura: *h* = 10 m; e - Largura: 10 m.
- Dimensões do taque de calado: - Comprimento: 30 m; - Altura: 9 m; e - Largura: 9 m.

Observações:

- O corpo possui dimensões desprezíveis quando comparado à balsa;
- Só é permitida a rotação da balsa em torno de seu eixo *y* (ver Figura 1).

Resolução

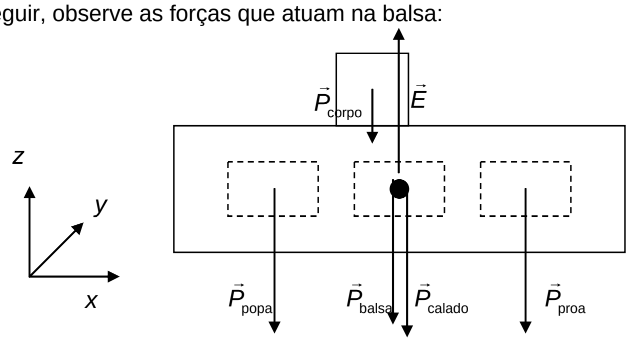
a) Primeiramente, para calcularmos a massa de água no interior da balsa, uma vez que ela está em equilíbrio estático, fazemos:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow E=P_{balsa}+P_{corpo}+P_{água}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{água}\cdot V_{submerso}\cdot\cancel{g}=2\cdot10^6\cdot\cancel{g}+4\cdot10^5\cdot\cancel{g}+m_{água}\cdot\cancel{g}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^3\cdot100\cdot10\cdot6=2{,}4\cdot10^6+m_{água}\Rightarrow m_{água}=3{,}6\cdot10^6\ \text{kg}$$

Sendo $m_{água}$ a massa total contida no interior da balsa. Na figura a seguir, observe as forças que atuam na balsa:



A massa de água contida no tanque de calado m_{calado} é a massa total menos a contida nos tanques de proa e popa:

$$m_{calado}=m_{água}-1{,}4\cdot10^6\Rightarrow\boxed{m_{calado}=2{,}2\cdot10^6\ \text{kg}}$$

Para determinar a massa de água contida nos tanques de popa e proa, fazemos $\Sigma M=0$, adotando *M* > 0 para o sentido anti-horário e *M* < 0 para o sentido horário. Escolhendo o centro de massa da balsa como ponto de aplicação para o momento, temos (observe as medidas na figura 1 do enunciado*):

$$\Sigma M_{\text{Anti-Horário}}+\Sigma M_{\text{Horário}}=0\Rightarrow P_{popa}\cdot32{,}5+P_{corpo}\cdot12{,}5-P_{proa}\cdot32{,}5=0\Rightarrow$$

$$m_{popa}\cdot\cancel{g}\cdot32{,}5+4\cdot10^5\cdot\cancel{g}\cdot12{,}5-m_{proa}\cdot\cancel{g}\cdot32{,}5=0\Rightarrow$$

$$m_{proa}-m_{popa}=0{,}154\cdot10^6\ \text{kg}$$

Pelo enunciado, temos que:

$$m_{proa}+m_{popa}=1{,}4\cdot10^6\ \text{kg}$$

Resolvendo estas duas equações, obtemos

$$m_{proa}\approx\frac{1{,}554}{2}\cdot10^6\ \text{kg}\Rightarrow\boxed{m_{proa}\approx7{,}77\cdot10^5\ \text{kg}}$$

$$m_{popa}\approx\frac{1{,}246}{2}\cdot10^6\ \text{kg}\Rightarrow\boxed{m_{popa}\approx6{,}23\cdot10^5\ \text{kg}}$$

Sendo m_{popa} a massa de água contida no interior do tanque de popa e m_{proa} a contida no tanque de proa.

Assim, as massas solicitadas são: $\boxed{m_{popa}\approx6{,}23\cdot10^5\ \text{kg}}$, $\boxed{m_{calado}=2{,}2\cdot10^6\ \text{kg}}$ e $\boxed{m_{proa}\approx7{,}77\cdot10^5\ \text{kg}}$.

* Cabe observar aqui que não está explícito no enunciado que a medida de 32,5 m na figura é a distância horizontal do centro de gravidade do tanque de popa (ou proa) ao centro de gravidade da balsa e nem que o centro de gravidade da balsa esteja alinhado com o centro de gravidade do tanque de calado. Para resolvermos este problema, assumimos essas medidas como sendo as distâncias entre centros de gravidade.

b) Nesta questão caberia informar no enunciado que as duas cargas deveriam estar alinhadas, respectivamente, com a superfície da água e com o teto, pois **conforme sugere a figura 2, a distância entre as cargas é menor que a distância entre as superfícies (da água e do teto)**. Acreditamos que a situação da figura 2 tenha atrapalhado muitos candidatos, devido à falta da informação acima, ou das distâncias d_1 e d_2 da figura a seguir, assim acreditamos que este item deva ser anulado.

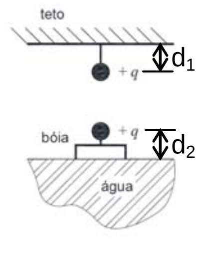


Figura 2

Assumindo que a distância entre as cargas é a distância entre o nível da água e o teto, podemos determinar esta distância pelo volume de água no tanque de calado:

$$V=30\cdot9\cdot h=\frac{m}{\rho}\Rightarrow h=\frac{2{,}2\cdot10^6}{270\cdot10^3}\ \text{m}\Rightarrow h\approx8{,}148\ \text{m}$$

Assim, a distância entre as cargas será:

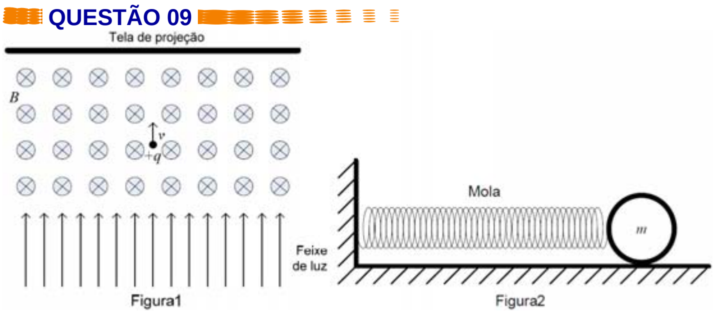
$$d=9-h\Rightarrow d\approx0{,}852\ \text{m}$$

Pela Lei de Coulomb, temos:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q}{d^2}\Rightarrow F\approx\frac{1}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\cdot\left(\frac{10^{-6}}{0{,}852}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{F\approx1{,}24\cdot10^{-2}\ \text{N}}$$

QUESTÃO 09



Na Figura 1 é apresentado um corpo de massa *m* e carga +*q* imerso em um campo magnético *B*. O corpo possui uma velocidade *v* perpendicular ao campo magnético. Nele incide um feixe de luz paralela que o ilumina, projetando a sua sombra em uma tela onde executa um movimento equivalente ao de um corpo com massa *m* preso a uma mola, conforme apresentado na Figura 2. Determine:

a) o valor da constante elástica da mola;
b) a energia potencial elástica máxima;
c) a velocidade máxima do corpo;
d) a frequência do movimento.

Observação: Despreze a ação da gravidade.

Resolução

Na figura 1, o corpo de massa *m* ficará sujeito apenas à ação da força magnética, já que a ação da gravidade é desprezível. Essa força magnética atuará como resultante de natureza centrípeta, fazendo com que o corpo descreva um movimento circular uniforme num plano paralelo ao feixe de luz incidente.
Consequentemente, a projeção desse movimento na tela será um movimento harmônico simples (MHS), que também é o movimento do sistema massa-mola oscilando na ausência de atrito.

a) Sendo o raio da circunferência que corresponde à trajetória do corpo carregado, temos que:

$$\vec{F_m} = \vec{F_{cp}} \Rightarrow q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}90° = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{q \cdot B}{m} \Rightarrow \omega = \frac{q \cdot B}{m}$$

Já do MHS, sabemos que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \left(\frac{q \cdot B}{m}\right)^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{(q \cdot B)^2}{m}}$$

b) Pela conservação da energia mecânica, a energia potencial elástica máxima (quando a energia cinética é nula, nos pontos de retorno) deve ser igual à energia cinética máxima, que ocorre quando o bloco do sistema massa-mola passa pela posição de equilíbrio (centro da oscilação) do MHS. No caso da projeção do movimento da partícula carregada, isso acontece quando toda a velocidade *v* do movimento circular uniforme se encontra paralela à tela, de modo que a projeção dessa velocidade na tela também tem módulo *v*. Assim:

$$E_{EL(MÁX)} = E_{C(MÁX)} \Leftrightarrow \boxed{E_{EL(MÁX)} = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

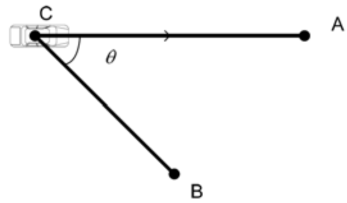
c) Pelos argumentos apresentados no item anterior, temos:

$$\boxed{v_{MÁX} = v}$$

d) Temos que:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \boxed{f = \frac{q \cdot B}{2\pi \cdot m}}$$

QUESTÃO 10



A figura apresenta um carro C que está se movendo a uma velocidade de 36 km/h em direção a um observador situado no ponto A e que passa próximo de um observador situado no ponto B. A reta CB forma um ângulo θ com a reta CA. A buzina do carro, cuja frequência é 440Hz, é acionada no momento em que $\theta = 60°$. Sabendo que a frequência ouvida pelo observador situado em A é igual à frequência fundamental de um tubo de 0,19 m de comprimento aberto em uma das extremidades, determine:

a) a velocidade do som no local;
b) a frequência ouvida pelo observador situado em B.

Observação:
O tubo encontra-se no mesmo local dos observadores.

Resolução

a) No tubo descrito (de comprimento $L = 0{,}19m$):

$$\lambda = 4 \cdot L = 4 \cdot 0{,}19$$
$$\lambda = 0{,}76m$$

Logo:

$$v_{som} = \lambda \cdot f_A = 0{,}76 \cdot f_A$$
$$f_A = \frac{v_{som}}{0{,}76}$$

Pelo efeito Doppler (fonte C, $v_C = 36km/h = 10m/s$, observador A):

$$\frac{f_C}{v_{som} - v_C} = \frac{f_A}{v_{som} + v_A} \Rightarrow \frac{440}{v_{som} - 10} = \frac{\left(\frac{v_{som}}{0{,}76}\right)}{v_{som} + 0}$$
$$\boxed{v_{som} = 344{,}4m/s}$$

b) Novamente usaremos a equação do efeito Doppler. Desta vez, no entanto, a velocidade de aproximação da fonte v_C' é a projeção da velocidade do carro na reta $\overline{BC}$, com $\theta = 60º$:

$$v_C' = v_C \cdot \cos\theta = 10 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ m/s}$$

Logo:

$$\frac{f_C}{v_{som} - v_C'} = \frac{f_B}{v_{som} + v_B} \Rightarrow \frac{440}{344{,}4 - 5} = \frac{f_B}{344{,}4 + 0} \Leftrightarrow$$
$$\boxed{f_B \approx 446{,}5Hz}$$

Equipe desta resolução

Física

Danilo José de Lima
Felipe Costa Mercadante
Vinício Merçon Poltronieri

Revisão

Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani
Vagner Figueira de Faria

Digitação, Diagramação e Publicação

Guilherme Magalhães Itacarambi Peneluppi