ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

Resolve

IME 2009
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Sabe-se que:

$a=[a]+\{a\}, \forall a\in\mathbb{R}$, onde $[a]$ é a parte inteira de a

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4{,}2 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}6 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}, \text{ com } x,\ y \text{ e } z\in\mathbb{R}$$

Determine o valor de $x-y+z$.

Resolução

Somando as três equações, membro a membro, temos:

$$x+[x]+\{x\}+y+[y]+\{y\}+z+[z]+\{z\}=4{,}2+3{,}6+2=9{,}8$$

Como $a=[a]+\{a\}$:

$$2\cdot(x+y+z)=9{,}8\Rightarrow x+y+z=4{,}9$$

Subtraindo sucessivamente esta equação da primeira, da segunda e da terceira e lembrando de que $a=[a]+\{a\}$, vem que:

$$\underbrace{y-[y]}_{\{y\}}+\underbrace{z-\{z\}}_{[z]}=0{,}7\Rightarrow\{y\}+[z]=0{,}7\Rightarrow\begin{cases}[z]=0\\ \{y\}=0{,}7\end{cases}$$

$$\underbrace{z-[z]}_{\{z\}}+\underbrace{x-\{x\}}_{[x]}=1{,}3\Rightarrow\{z\}+[x]=1{,}3\Rightarrow\begin{cases}[x]=1\\ \{z\}=0{,}3\end{cases}$$

$$\underbrace{x-[x]}_{\{x\}}+\underbrace{y-\{y\}}_{[y]}=2{,}9\Rightarrow\{x\}+[y]=2{,}9\Rightarrow\begin{cases}[y]=2\\ \{x\}=0{,}9\end{cases}$$

Assim, determinamos *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x=[x]+\{x\}=1+0{,}9=1{,}9\\ y=[y]+\{y\}=2+0{,}7=2{,}7\\ z=[z]+\{z\}=0+0{,}3=0{,}3\end{cases}$$

Conseqüentemente:

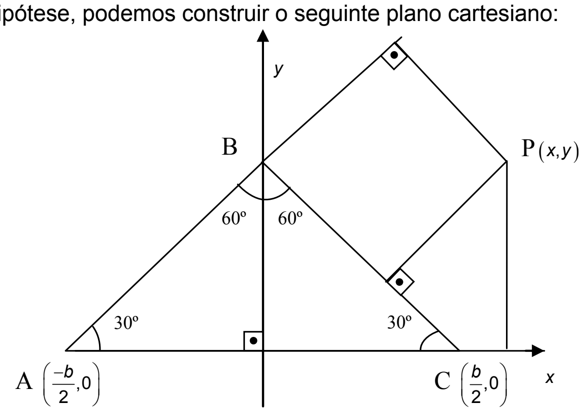
$$x-y+z=1{,}9-2{,}7+0{,}3\Rightarrow\boxed{x-y+z=-0{,}5}$$

QUESTÃO 02

Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B}=120°$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias as outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

Resolução

Por hipótese, podemos construir o seguinte plano cartesiano:



Para determinar as retas AB e BC, sabemos que:

a) o coeficiente angular é dado por tg α, onde α é o ângulo que a reta forma com o eixo x no sentido anti-horário;
b) usando tg 30°, temos que a intersecção das retas com o eixo y é dada por n, onde:

$$tg30^o=\frac{n}{\frac{b}{2}}\Rightarrow 3n=\sqrt3.\frac{b}{2}\Rightarrow n=\frac{b\sqrt3}{6}.$$

Com isso, temos as seguintes retas:

$$(AB)\ \ y=\frac{\sqrt3}{3}x+\frac{b\sqrt3}{6}\Leftrightarrow\frac{\sqrt3}{3}x-y+\frac{b\sqrt3}{6}=0$$

$$(BC)\ \ y=-\frac{\sqrt3}{3}x-\frac{b\sqrt3}{6}\Leftrightarrow\frac{\sqrt3}{3}x+y-\frac{b\sqrt3}{6}=0$$

O lugar geométrico dos pontos P(x,y) pedido é dado por:
$(d_{P,\ eixo\ x})^2=d_{P,AB}.d_{P,BC}$.
Assim:

$$y^2=\frac{\left|\frac{\sqrt3}{3}x-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)\right|\left|\frac{\sqrt3}{3}x+\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)\right|}{\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2+1^2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$y^2=\frac{\left|\left(\frac{\sqrt3}{3}x\right)^2-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2\right|}{\left(\sqrt{\frac43}\right)^2}\Rightarrow\left|\left(\frac{\sqrt3}{3}x\right)^2-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2\right|=\frac43y^2\Rightarrow$$

$$\pm\frac43y^2=\left(\frac{\sqrt3}{3}x\right)^2-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2$$

Com isso, temos as seguintes possibilidades:

1) para o sinal de "+":

$$\frac43y^2=\left(\frac{\sqrt3}{3}x\right)^2-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2\Rightarrow\frac13x^2-\frac73y^2+\frac{\sqrt3}{3}by-\frac{b^2}{12}=0\Rightarrow$$

$$\frac13\left(x^2-7\left(y^2-\frac{\sqrt3}{7}by+\frac{3}{196}b^2\right)\right)=\frac{b^2}{12}-\frac{b^2}{28}\Rightarrow$$

$$\frac13\left(x^2-7\left(y-\frac{\sqrt3}{14}b\right)^2\right)=\frac{b^2}{12}-\frac{b^2}{28}=\frac{4b^2}{84}=\frac{b^2}{21}\Rightarrow$$

$$x^2-7\left(y-\frac{\sqrt3}{14}b\right)^2=\frac{b^2}{7}\Rightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{b}{\sqrt7}\right)^2}-\frac{\left(y-\frac{\sqrt3}{14}b\right)^2}{\left(\frac{b}{7}\right)^2}=1,$$ que é uma hipérbole de centro $\left(0,\frac{\sqrt3b}{14}\right)$, semi-eixo real em x medindo $\frac{b}{\sqrt7}$ e semi-eixo imaginário y medindo $\frac{b}{7}$.

2) Para o sinal de " –" :

$$-\frac43y^2=\left(\frac{\sqrt3}{3}x\right)^2-\left(y-\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2\Rightarrow\frac13x^2+\frac13y^2+\frac{\sqrt3}{3}by-\frac{b^2}{12}=0\Rightarrow$$

$$\frac13\left(x^2+y^2+\sqrt3by-\frac{b^2}{4}\right)=0\Rightarrow x^2+y^2+\sqrt3by-\frac{b^2}{4}=0\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+\sqrt3by+\frac{3b^2}{4}=\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}=b^2\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{b\sqrt3}{2}\right)^2=b^2,$$ que é uma circunferência de centro $\left(0,-\frac{\sqrt3b}{2}\right)$ e raio b.

QUESTÃO 03

Sabe-se que $z_1\overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.

Obs.: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

Resolução

Inicialmente, temos:

$|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0 \Rightarrow |z_3 + z_4| = |z_3 - z_4|$

Dividindo por $|z_4|$ em ambos os lados ($|z_4| \neq 0$)

$$\left|\frac{z_3}{z_4} + 1\right| = \left|\frac{z_3}{z_4} - 1\right|$$

Como $z_1\overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$, temos:

$$|z_1\overline{z_2} + 1| = |z_1\overline{z_2} - 1|$$

Chamando $z_1\overline{z_2} = a + bi$ e tirando o módulo:

$$|z_1\overline{z_2} + 1| = |z_1\overline{z_2} - 1|$$
$$|(a+1) + bi| = |(a-1) + bi|$$
$$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

Logo:

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Desse modo fica claro que $z_1\overline{z_2}$ é um imaginário puro.

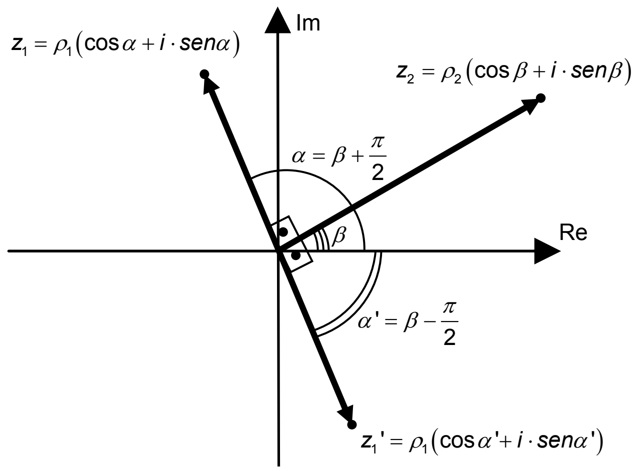
Chamando agora $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + isen\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\beta + isen\beta)$ (forma trigonométrica dos números complexos) temos:

$$\overline{z_2} = \rho_2(\cos(-\beta) + isen(-\beta))$$
$$z_1\overline{z_2} = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta))$$
$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = \rho_1\rho_2\cos(\alpha - \beta) = 0$$

Como ρ_1 e ρ_2 são diferentes de zero:

$$\cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Considerando a representação geométrica, e levando em consideração a primeira volta, a relação entre os argumentos de z_1 (α) e z_2 (β) é dada por $\alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2}$, o que prova a ortogonalidade.



QUESTÃO 04

Dada a função $F: IN^2 \to IN$ com as seguintes características:

$F(0,0) = 1$;
$F(n, m+1) = q \cdot F(n,m)$, onde q é um número real diferente de zero;
$F(n+1, 0) = r + F(n,0)$, onde r é um número real diferente de zero.

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i), i \in IN$.

Resolução

Pelo enunciado, temos:

$$F(1,0) = r + F(0,0) = r + 1$$
$$F(2,0) = r + F(1,0) = 2r + 1$$
$$F(3,0) = r + F(2,0) = 3r + 1$$

Por indução, temos que F(n,0) = nr + 1.

Da mesma maneira:

$$F(n,1) = q.F(n,0) = q.(nr + 1)$$
$$F(n,2) = q.F(n,1) = q^2.(nr + 1)$$
$$F(n,3) = q.F(n,2) = q^3.(nr + 1)$$

Aplicando novamente indução temos $F(n,m) = q^m.(nr+1)$.

Assim:

$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = \sum_{i=0}^{2009} q^i(i.r + 1) = \sum_{i=0}^{2009} q^i + r.\sum_{i=0}^{2009} i.q^i$$

$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{2009}}_{\text{progressão geométrica}} + r.(\underbrace{q + 2.q^2 + 3.q^3 + \ldots + 2009.q^{2009}}_{S})$$

Calculando separadamente os termos, temos, na primeira soma, os termos de uma progressão geométrica:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{2009} = \frac{1 - q^{2010}}{1 - q}$$

Na segunda soma, temos:

$$S = q + 2.q^2 + 3.q^3 + \ldots + 2009.q^{2009}$$
$$q.S = q^2 + 2.q^3 + 3.q^4 + \ldots + 2008.q^{2009} + 2009.q^{2010}$$
$$S - q.S = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{2009} - 2009.q^{2010}$$
$$S - q.S = \frac{q.(1 - q^{2009})}{1 - q} - 2009.q^{2010} \Rightarrow S = \frac{q.(1 - q^{2009})}{(1 - q)^2} - \frac{2009.q^{2010}}{1 - q}$$

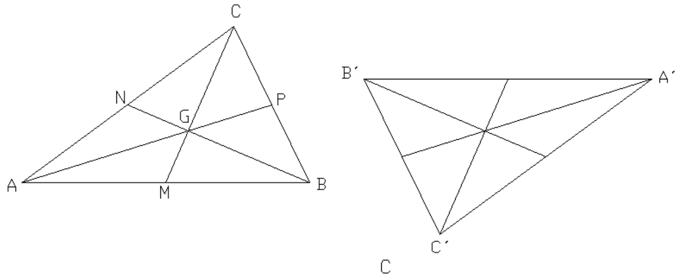
Substituindo, temos:

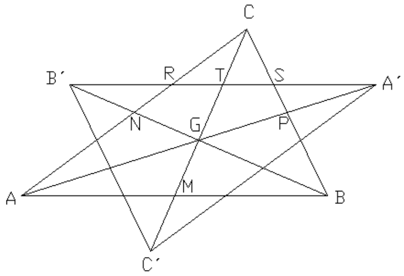
$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = \frac{1 - q^{2010}}{1 - q} + r.\left(\frac{q.(1 - q^{2009})}{(1 - q)^2} - \frac{2009.q^{2010}}{1 - q}\right)$$

QUESTÃO 05

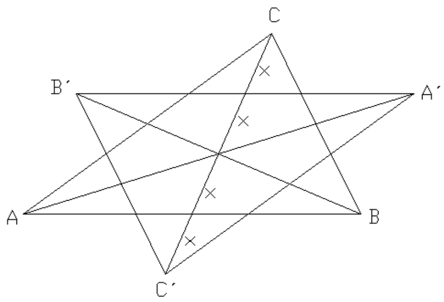
Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e A'B'C'.

Resolução

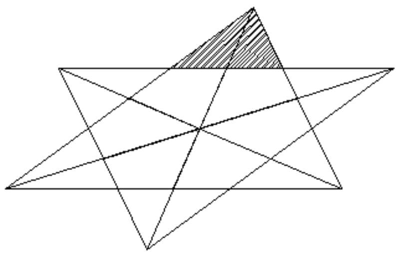




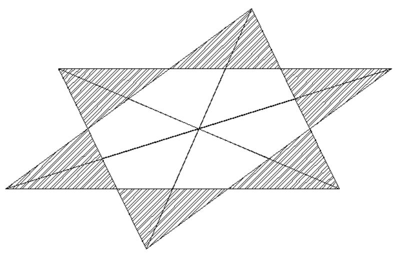
G é baricentro do ΔABC, logo CG = 2MG. Arbitrando MG = x, temos CG = 2x
Com a rotação G também é baricentro do ΔA'B'C' e C'G=2x, seguindo que C'M = x



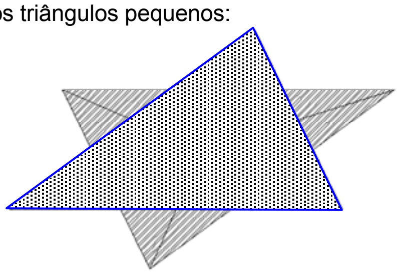
Deste modo temos que os triângulos ABG e A'B'G são congruentes (LLL).
Como GÂB = GÂ'B' temos que A'B' e AB são paralelos.
Assim ΔABC ~ ΔRSC e a razão de semelhança é MC/TC = 3x/x = 3.
Assim sendo a área do ΔRSC é $(1/3)^2$ da área do ΔABC. $S_{\Delta RSC} = S/9$



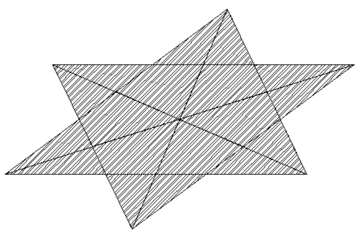
Por analogia, as áreas dos pequenos triângulos da figura também valem S/9.



Além disso, a área solicitada é a área do triângulo original somada a 3 vezes a área dos triângulos pequenos:



Assim, a área pedida vale $A = S + 3\cdot\frac{S}{9} = \frac{4S}{3}$



QUESTÃO 06

Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x + 4senx - (1+4\sqrt{2})senx\cos x + 4\cos x - (2+2\sqrt{2})}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Resolução

Rearranjando os termos do numerador, temos:

$$\frac{(3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2) + 2.(2senx - 2\sqrt{2}.senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2})}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Logo temos:

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} + 2 > 2$$

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{sen^2x + 2 - senx\cos x - 2}{2senx\left(1-\sqrt{2}\cos x\right) - \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

$$\frac{senx\left(senx - \cos x\right)}{\left(2senx - \sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

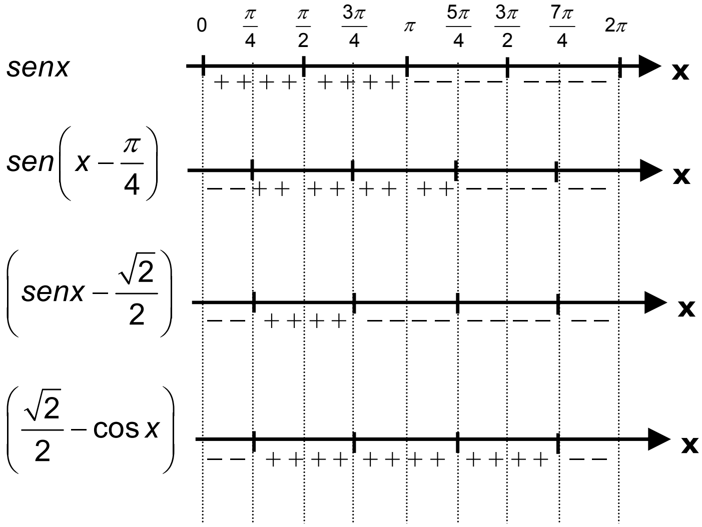
$$\frac{senx\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{2\sqrt{2}\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)} > 0$$

$$\frac{senx\cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)} > 0$$

Portanto,

$$\frac{senx\cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)} > 0$$

Analisando o sinal de $f(x) = \frac{senx\cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)}$



Logo o conjunto de valores de x no qual f(x) é positiva é:

$$\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[\; U \; \left]\pi,\frac{5\pi}{4}\right[\; U \; \left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right[$$

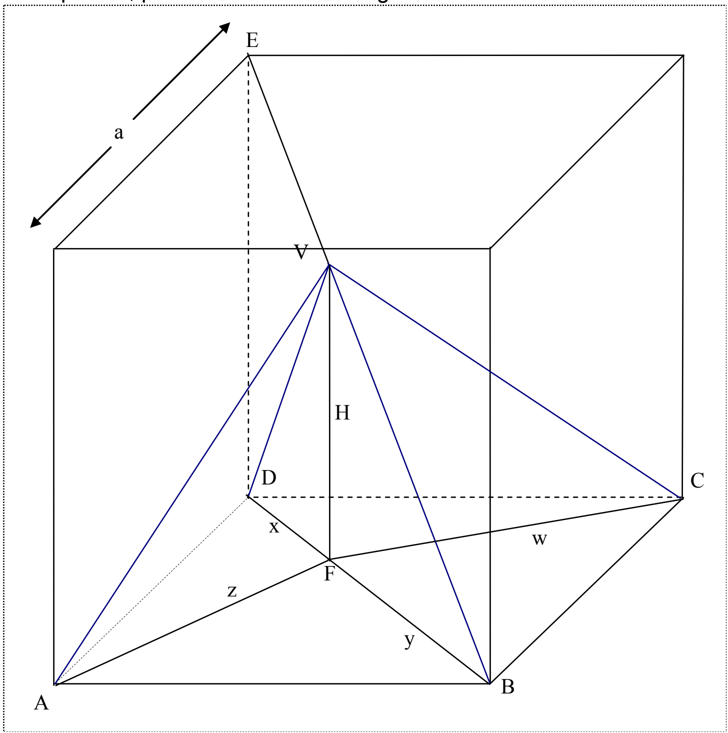
QUESTÃO 07

Seja um cubo de base ABCD com aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2, sendo k um número primo.

Obs.: as arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

Resolução

Por hipótese, podemos construir o seguinte cubo:



Usando Pitágoras nos triângulos retângulos FAV, FBV, FCV e FDV, temos:
$(VA)^2=z^2+H^2$
$(VB)^2=y^2+H^2$
$(VC)^2=w^2+H^2$
$(VD)^2=x^2+H^2$. Somando as quatro equações, temos:
$(VA)^2 + (VB)^2 + (VC)^2 + (VD)^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 + 4H^2$.
Do enunciado, $(VA)^2 + (VB)^2 + (VC)^2 + (VD)^2 = ka^2$, e assim:
$x^2 + y^2 + w^2 + z^2 + 4H^2 = ka^2$ **(*)**.
No quadrado ABCD, temos:
1. z = w, já que F é um ponto da diagonal BD;
2. $x+y= a\sqrt{2}$;
3. Considerando a semelhança entre os triângulos BDE e BFV, temos:
$\frac{a}{H}=\frac{a\sqrt{2}}{y} \Rightarrow y = H\sqrt{2}$.

De 2 e 3, temos: $x= a\sqrt{2} - H\sqrt{2} = \sqrt{2}(a-H)$
4. Usando a relação de Stewart no triângulo ABD, temos:
$a^2x+a^2y = z^2(x+y) + xy(x+y) \Leftrightarrow a^2 = xy + z^2 \Leftrightarrow$
$z^2 = a^2 - xy$
Substituindo x e y em 4, temos:
$z^2 = a^2 - \sqrt{2}(a-H) . H\sqrt{2} = a^2 - 2(aH - H^2)$.
Logo, substituindo x , y e z, a equação **(*)** fica:
$x^2 + y^2 + w^2 + z^2 + 4H^2 = ka^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2z^2 + 4H^2 = ka^2$
$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}(a-H)\right]^2 + 2H^2 + 2(a^2 - 2aH + 2H^2) + 4H^2 - ka^2 = 0 \Leftrightarrow$
$12H^2 - 8aH + 4a^2 - ka^2 = 0$.
Resolvendo a equação em H, temos:
$H=\frac{8a \pm \sqrt{48ka^2 - 128a^2}}{24} \Leftrightarrow H = a\frac{2 \pm \sqrt{3k-8}}{6}$.
Como k é primo, e H é um número entre 0 e a, temos:
i) $3k - 8 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 8/3$;
ii) $0 < a\frac{2\pm\sqrt{3k-8}}{6} < a \Leftrightarrow 0 < \frac{2\pm\sqrt{3k-8}}{6} < 1 \Leftrightarrow -2 < \pm\sqrt{3k-8} < 4$.
Analisando a segunda desigualdade, temos:
$\pm\sqrt{3k-8} < 4 \Rightarrow 3k - 8 < 16 \Rightarrow k < 8$;
Verificando as possibilidades, temos:
i) k=3: $-2 < \pm\sqrt{1} < 4 \Rightarrow -2 < \pm 1 < 4$ (verdadeiro)
ii) k=5: $-2 < \pm\sqrt{7} < 4 \Rightarrow -2 < \sqrt{7} < 4$, assim, para k = 5, somente podemos usar o sinal de "+" em H;
iii) k=7 : $-2 < \pm\sqrt{13} < 4 \Rightarrow -2 < \sqrt{13} < 4$. Para k = 7, somente podemos usar o sinal de "+" em H.
Portanto, temos:
k=3: $H = a\frac{2\pm 1}{6} \Rightarrow H = \frac{a}{2}$ ou $H = \frac{a}{6}$
k=5: $H = a\frac{2+\sqrt{7}}{6}$;
k=7: $H = a\frac{2+\sqrt{13}}{6}$.

QUESTÃO 08

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(x \cdot I - A) = 0$.

Resolução

Pela forma como estão definidas as matrizes, podemos escrever:

$$(xI-A)_{nxn} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{bmatrix}$$

Então, expandindo o determinante pelo teorema de Laplace na última coluna, temos:

$$\det(xI-A) = (-1)^{1+n}\cdot\binom{n}{n}\cdot\begin{vmatrix} -1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+n}\cdot\binom{n}{n-1}\cdot\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+\cdots+(-1)^{i+n}\cdot\binom{n}{n-i+1}\cdot\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} +\cdots+(-1)^{2n}\cdot\left[x+\binom{n}{1}\right]\cdot\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Observe agora que as matrizes acima (com exceção da última) são triangulares inferiores e, por isso, o determinante delas é o produto dos elementos da diagonal principal. A última matriz é triangular superior, de modo que seu determinante também é o produto dos elementos de sua diagonal principal.
Note também que o número de elementos iguais a –1 nas diagonais varia de $n-1$ até 0, ao mesmo tempo que o número de elementos iguais a x varia de 0 até $n-1$. Assim:

$$\det(xI-A) = (-1)^{1+n}\cdot\binom{n}{n}\cdot(-1)^{n-1} + (-1)^{2+n}\cdot\binom{n}{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot x^1 + \cdots +$$
$$+(-1)^{i+n}\cdot\binom{n}{n-i+1}\cdot x^{i-1}\cdot(-1)^{n-i} + \cdots + (-1)^{2n}\cdot\left[x+\binom{n}{1}\right]\cdot x^{n-1}$$

$$\det(xI-A)=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\cdot x^{1}+\cdots+\binom{n}{n-i+1}\cdot x^{i-1}+\cdots+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}+x\cdot x^{n-1}$$

$$\det(xI-A)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j}=(x+1)^{n}$$

A equação pedida é $\det(xI-A)=0$, então:

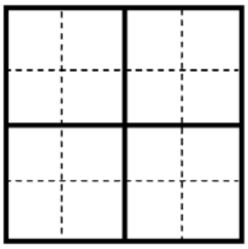
$$\det(xI-A)=(x+1)^{n}=0\Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Logo, a equação apresenta uma única raiz ($x=-1$) de multiplicidade n.

QUESTÃO 09

A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



Resolução

Há $4! = 24$ maneiras de preencher o quadrado A com os números 1, 2, 3, 4. Feito isso, vamos agora preencher o quadrado D. Colocamos o número 1 em qualquer posição do quadrado D (4 maneiras). Depois disso, teremos uma situação como a seguinte:

A	B
C	D

1	2		
3	4		x
		c	a
	y	b	1

Agora, o número a não pode ser 2, pois ficaríamos sem opção para x, e o número b não pode ser 3, pois ficaríamos sem opção para y. Assim, nosso próximo passo é escolher o valor de c entre os números 2, 3 e 4, o que determina imediatamente a e b devido às restrições que acabamos de observar. É fácil ver que, para as demais posições do número 1 em D, obtemos uma situação análoga. Logo há 4 × 3 = 12 maneiras de completar o quadrado D depois de preenchido o A.
Feito isso, todos os espaços que sobraram têm uma única maneira de serem preenchidos. Assim, o número total de maneiras de preencher os quadrados é $24\times 12=288$.

QUESTÃO 10

Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação $\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2+x^2}}=2\sqrt{2}x$, para $x\in\mathbb{R}$ e $0\le x\le a$.

Resolução

Desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a+a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$a\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3}a\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{x}{a}$$

Agora, como $0\le x\le a$, dividindo toda essa desigualdade por $a>0$ temos $0\le\frac{x}{a}\le 1$. Assim, para cada $a\ge x$, existe um único $\theta\in\mathbb{R}$, com $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, para o qual $\frac{x}{a}=\operatorname{sen}\theta$.

Como $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, vale que $\cos\theta\ge 0$. Portanto:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$$

A equação fica reduzida a:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\theta$$

Utilizando as relações de arco duplo, temos:

$$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\1-\cos\theta=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

Como $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\ge 0\\\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ge 0\end{cases}$, de modo que:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\theta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\theta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{sen}\theta\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{sen}\theta\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{sen}\theta$$

Como $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 + \frac{\pi}{6} \le \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{12}$$

Logo $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}$ pertence ao primeiro quadrante.

Assim, sendo θ e $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}$ dois ângulos do primeiro quadrante, tais que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right) = \text{sen}\,\theta$, a única possibilidade é que eles sejam iguais. Logo:

$$\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Temos então: $\frac{x}{a} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$