ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Resolve

IME 2009
FÍSICA

www.elitecampinas.com.br

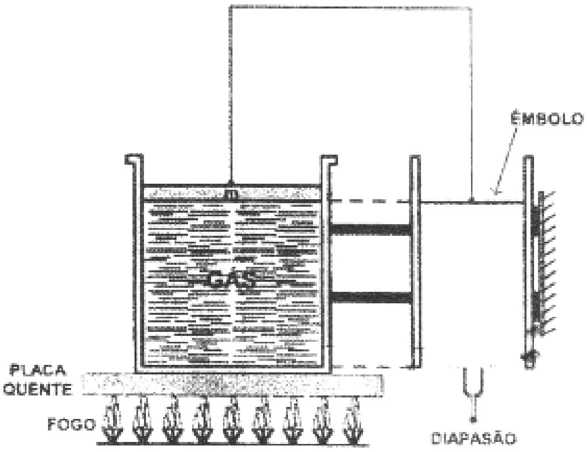
FÍSICA

QUESTÃO 01

Considere o sistema mostrado abaixo onde um recipiente cilíndrico com gás ideal é mantido a uma temperatura T por ação de uma placa quente. A tampa do recipiente, com massa m, é equilibrada pela ação do gás. Esta tampa está conectada, por meio de uma haste não deformável, ao êmbolo de um tudo de ar, aberto na extremidade inferior. Sabendo-se que existe um diapasão vibrando a uma freqüência f na extremidade aberta, determine o menor número de mols do gás necessário para que seja observado o modo fundamental de ressonância do tubo de ar.

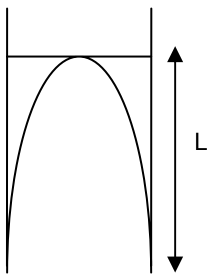
Dado: velocidade de propagação do som no ar: v

Observação: o conjunto haste-êmbolo possui massa desprezível.



Resolução

O modo de vibração da onda estacionária formada no tubo fechado ao emitir o som fundamental (ou 1º harmônico) é ilustrado abaixo:



Sendo λ o comprimento de onda correspondente a esse harmônico, pela figura, temos:

$$L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4 \cdot L$$

Da equação fundamental da Ondulatória, vem que:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = 4L \cdot f \Rightarrow L = \frac{v}{4 \cdot f}$$

A partir desse ponto, somos obrigados a assumir quatro informações que não constam no enunciado.

(I) Admitiremos como conhecido o módulo aceleração da gravidade no local, a que chamaremos $|\vec{g}|$.
(II) Admitiremos como conhecida a constate universal dos gases perfeitos, que denotaremos por R.
(III) Admitiremos ainda como conhecida a área da tampa do recipiente, que será denotada por A.
(IV) Admitiremos ainda a presença de uma pressão atmosférica p_{ATM} ao redor do sistema, pois caso contrário o sistema estaria imerso no vácuo, e não faria sentido falar na propagação de ondas sonoras, já que sendo estas ondas mecânicas, necessitam de meio material para se propagarem. Observe que o próprio enunciado informa a velocidade de propagação do som (v) **no ar**.

O volume de gás (V) pode ser calculado por:

$$V = A \cdot L \Rightarrow V = A \cdot \frac{v}{4 \cdot f}$$

Para que o sistema fique em equilíbrio, a força exercida pelo gás sobre a tampa do recipiente deve equilibrar a força exercida pela atmosfera e o peso da própria tampa:

$$p \cdot A = p_{ATM} \cdot A + m \cdot |\vec{g}| \Rightarrow p = \frac{p_{ATM} \cdot A + m \cdot |\vec{g}|}{A}$$

Admitindo que a temperatura T esteja na escala Kelvin, pela equação de Clapeyron, temos:

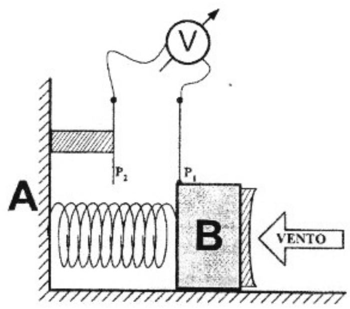
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow \left(\frac{p_{ATM} \cdot A + m \cdot |\vec{g}|}{A} \right) \cdot A \cdot \frac{v}{4 \cdot f} = n \cdot R \cdot T \Rightarrow$$

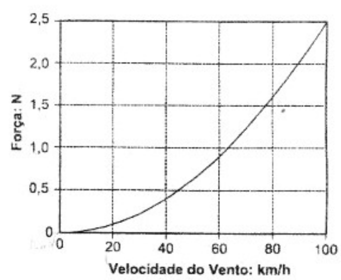
$$\boxed{n = \frac{(p_{ATM} \cdot A + m \cdot |\vec{g}|) \cdot v}{4 \cdot f \cdot R \cdot T}}$$

Como comentário, gostaríamos de enfatizar que dada a inexistência, no enunciado, de quatro das nove informações necessárias para a expressão da resposta, sugerimos a anulação da questão.

QUESTÃO 02

Um bloco B, de material isolante elétrico, sustenta uma fina placa metálica P_1, de massa desprezível, distante $8\,cm$ de outra placa idêntica, P_2, estando ambas com uma carga $Q = 0{,}12\,\mu C$. Presa à parede A e ao bloco está uma mola de constante $K = 80\,N/m$, inicialmente não deformada. A posição de equilíbrio do bloco depende da força exercida pelo vento. Esta força é uma função quadrática da velocidade do vento, conforme apresenta o gráfico abaixo. Na ausência do vento, a leitura do medidor de tensão ideal é de 16 mV. Calcule a velocidade do vento quando o bloco estiver estacionário e a leitura do medidor for de 12 mV. Despreze o atrito.





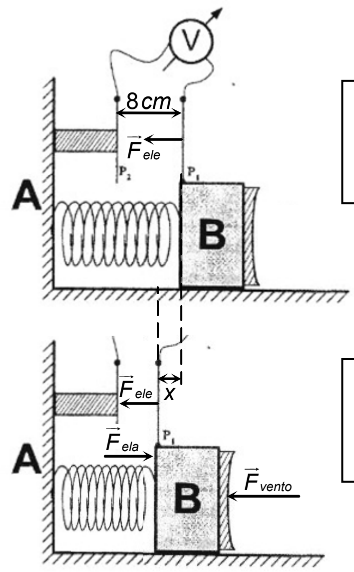
Resolução

O enunciado menciona que ambas as placas apresentam uma carga $Q = 0{,}12\,\mu C$. Se fosse este o caso, a diferença de potencial entre as placas (positivas) seria nula. Para a resolução, assumiremos que o valor apresentado é o módulo da carga, estando uma placa carregada positivamente e a outra negativamente.

Desta forma, analisando o capacitor de placas paralelas carregado, com a carga e a área das placas constantes:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \frac{Q}{U} \Rightarrow \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} = cte$$

Ou seja, a relação entre a diferença de potencial e a distância entre as placas é constante.
Devemos analisar duas situações:



SITUAÇÃO 1:
- Mola não deformada
- Ausência de vento

SITUAÇÃO 2:
- Mola comprimida
- Presença de vento

Comparando as duas situações, temos $\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$

Como U_1 = 16mV, U_2 = 12mV e d_1 = 8 cm, temos:

$$\frac{16}{8} = \frac{12}{d_2} \Rightarrow d_2 = 6\,cm$$

Logo, a compressão da mola na **situação 2** é de 2 cm.

Como na situação 2 o bloco se encontra estacionário (com força resultante nula e parado) segue que:

$$\left|\vec{F}_{vento}\right| + \left|\vec{F}_{ele}\right| = \left|\vec{F}_{ela}\right| \Rightarrow \left|\vec{F}_{vento}\right| = \left|\vec{F}_{ela}\right| - \left|\vec{F}_{ele}\right| = k \cdot x - \frac{k_{ele} \cdot Q^2}{{d_2}^2}$$

Substituindo os valores conhecidos e considerando a constante eletrostática do vácuo $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$:

$$\left|\vec{F}_{vento}\right| = 80 \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right) - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(0{,}12 \cdot 10^{-6}\right)^2}{\left(6 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 1{,}6 - 0{,}036 \approx 1{,}6 \text{ N}$$

Como a expressão para a dependência da força do vento com a velocidade é quadrática e passa pela origem, consideremos que é da forma $F = a \cdot v^2$.

Do ponto onde F = 2,5N e V = 100 km/h:

$$2{,}5 = a \cdot 100^2 \Rightarrow a = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow F = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot v^2$$

Assim, $1{,}6 = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{16}{25} \cdot 10^4 \Rightarrow v = \frac{400}{5} = \boxed{80\ km/h}$

QUESTÃO 03

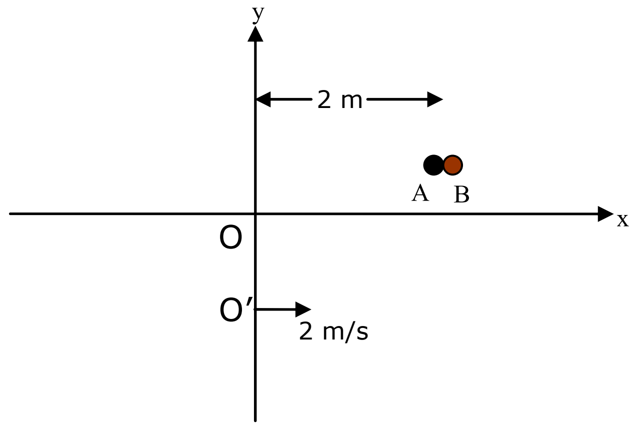
Dois corpos A e B encontram-se sobre um plano horizontal sem atrito. Um observador inercial O está na origem do eixo x. Os corpos A e B sofrem colisão frontal perfeitamente elástica, sendo que, inicialmente, o corpo A tem velocidade $v_A = 2$ m/s (na direção x com sentido positivo) e o corpo B está parado na posição $x = 2$ m. Considere um outro observador inercial O', que no instante da colisão tem a sua posição coincidente com a do observador O. Se a velocidade relativa de O' em relação a O é $v_{O'} = 2$ m/s (na direção x com sentido positivo), determine em relação a O':

a) as velocidades dos corpos A e B após a colisão;
b) a posição do corpo A dois segundos após a colisão.

<u>Dados:</u>
- massa de A = 100 g;
- massa de B = 200 g.

Resolução

Na colisão temos a seguinte situação (sistemas de eixos O e O' sobrepostos):



a) Como não há ação de forças externas, a quantidade de movimento se conserva, e com o referencial positivo para a direita, podemos escrever:

$$\vec{Q}_{antes} = \vec{Q}_{depois} \Rightarrow$$
$$m_A v_{Ao} + m_B v_{Bo} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \Rightarrow$$
$$0{,}1 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}1 \cdot v_{Af} + 0{,}2 \cdot v_{Bf} \Rightarrow$$
$$v_{Af} + 2 \cdot v_{Bf} = 2 \qquad \text{(I)}$$

Como a colisão é perfeitamente elástica, o coeficiente de restituição é igual a 1:

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ao} + v_{Bo}} \Rightarrow \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{2 - 0} = 1 \Rightarrow$$
$$v_{Bf} - v_{Af} = 2 \qquad \text{(II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), vem que:

$$\begin{cases} v_{Af} + 2 \cdot v_{Bf} = 2 \\ v_{Bf} - v_{Af} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{Af} = \frac{4}{3} \text{ m/s} \\ v_{Bf} = -\frac{2}{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

Tais velocidades são dadas em relação ao observador O. Para determiná-las em relação ao observador O', fazemos:

$$v_{Af}' = v_{Af} - v_{O'} = \frac{4}{3} - 2 \Rightarrow \boxed{v_{Af}' = -\frac{2}{3} \text{ m/s}}$$

$$v_{Bf}' = v_{Bf} - v_{O'} = -\frac{2}{3} - 2 \Rightarrow \boxed{v_{Bf}' = -\frac{8}{3} \text{ m/s}}$$

b) Para determinar a posição de A em relação ao referencial O', depois de 2 segundos, basta fazer $x(t) = x_0 + vt$, sendo todas as grandezas relativas ao referencial O'.

$$x'(2) = 2 - \frac{8}{3} \cdot 2 \Rightarrow \boxed{x'(2) = -\frac{10}{3} m}$$

QUESTÃO 04

Um dispositivo fotovoltaico circular de raio α produz uma tensão proporcional à intensidade de luz incidente. Na experiência da figura 1, um feixe espesso de luz, bem maior que a área do dispositivo fotovoltaico, incide ortogonalmente sobre o mesmo, provocando a tensão V_1 entre os terminais do resistor.

Na experiência da figura 2, mantendo-se as mesmas condições de iluminação da primeira experiência, uma lente convergente de distância focal f é colocada a uma distância p do dispositivo fotovoltaico, provocando um aumento da tensão sobre o resistor.

Calcule a corrente que circulará pelo resistor durante a segunda experiência nos seguintes casos:

a) $p < f$;
b) $f < p < 2f$.

Observações:

- o feixe de luz incide paralelamente ao eixo óptico da lente da segunda experiência;
- o feixe de luz tem intensidade uniformemente distribuída no plano incidente.

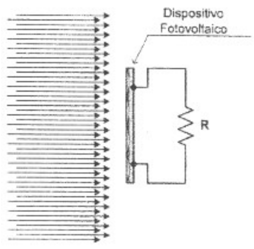


figura 1

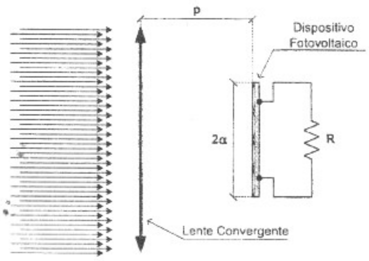


figura 2

Resolução

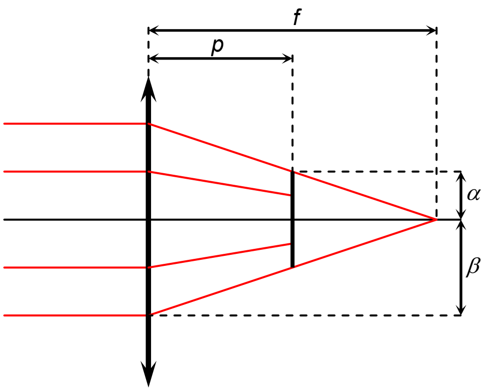
Na experiência 1, a tensão gerada no dispositivo é proporcional à área do mesmo, uma vez que o feixe incidente é ortogonal ao elemento fotovoltaico.

Assim, $V_1 = k \cdot \pi\alpha^2$

Para a experiência 2:

a) $p < f$

A figura a seguir ilustra a situação em que $p < f$, destacando os raios luminosos que tangenciam o sensor.



Por semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\frac{f}{f-p} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = \alpha \cdot \frac{f}{f-p}$$

O raio β corresponde, na lente, à região do feixe incidente que irá efetivamente incidir sobre o dispositivo. Assim, a área desta região será dada por:

$$S_A = \pi \cdot \beta^2 = \pi \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{f}{f-p}\right)^2$$

A tensão gerada no dispositivo será proporcional à intensidade de luz incidente (quantidade de raios luminosos que atinge uma mesma área na célula fotovoltaica) e, desta forma, é proporcional à área $S_A = \pi \cdot \beta^2$. Logo:

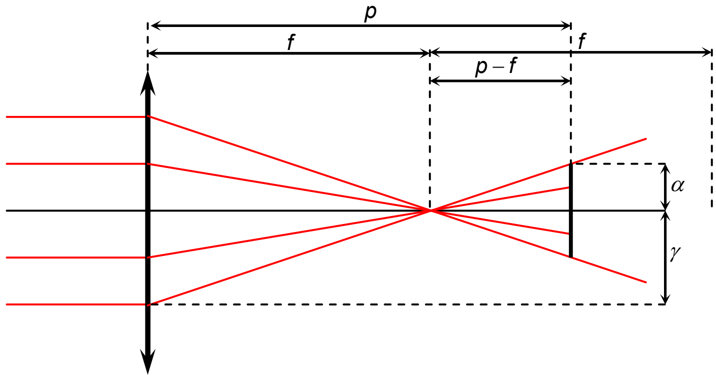
$$V_A = k \cdot S_A = k \cdot \pi \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{f}{f-p}\right)^2 = V_1 \cdot \left(\frac{f}{f-p}\right)^2$$

A corrente que circula pelo resistor será:

$$i_A = \frac{V_A}{R} = \frac{V_1}{R} \cdot \left(\frac{f}{f-p}\right)^2$$

b) $f < p < 2f$

A figura a seguir ilustra a situação em que $f < p < 2f$, destacando os raios luminosos que tangenciam o sensor:



Por semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\frac{f}{p-f} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \frac{f}{p-f}$$

O raio γ corresponde, na lente, à região do feixe incidente que irá efetivamente incidir sobre o dispositivo. Assim, a área desta região será dada por:

$$S_B = \pi \cdot \gamma^2 = \pi \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{f}{p-f}\right)^2$$

Analogamente ao caso anterior, a tensão gerada no dispositivo será proporcional à área. Logo:

$$V_B = k \cdot S_B = k \cdot \pi \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{f}{p-f}\right)^2 = V_1 \cdot \left(\frac{f}{p-f}\right)^2$$

A corrente que circula pelo resistor será:

$$i_B = \frac{V_B}{R} = \frac{V_1}{R} \cdot \left(\frac{f}{p-f}\right)^2$$

QUESTÃO 05

Os pontos A e B da malha de resistores da figura 2 são conectados aos pontos x e y do circuito da figura 1. Nesta situação, observa-se uma dissipação de P watts na malha. Em seguida, conecta-se o ponto C ao ponto F e o ponto E ao ponto H, o que produz um incremento de 12,5% na potência dissipada na malha. Calcule a resistência R dos resistores que compõem a malha

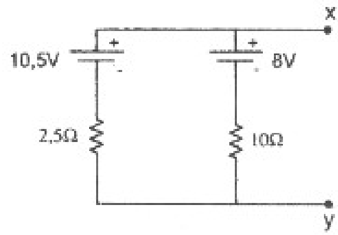


figura 1

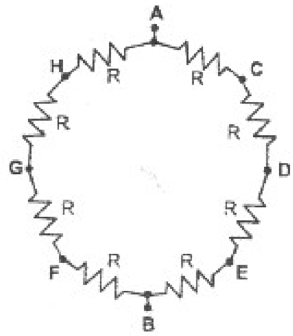
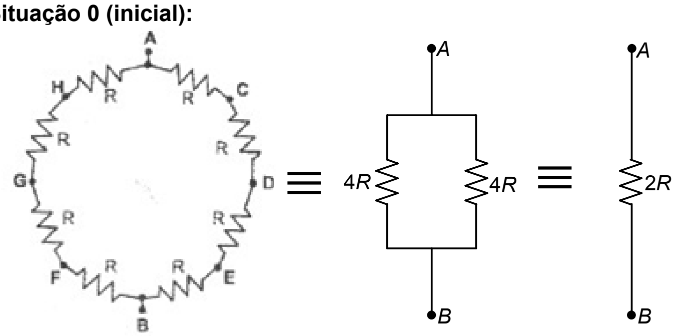


figura 2

Resolução

Vamos inicialmente calcular as resistências equivalentes da malha na situação inicial e depois de ligar os pontos pedidos:

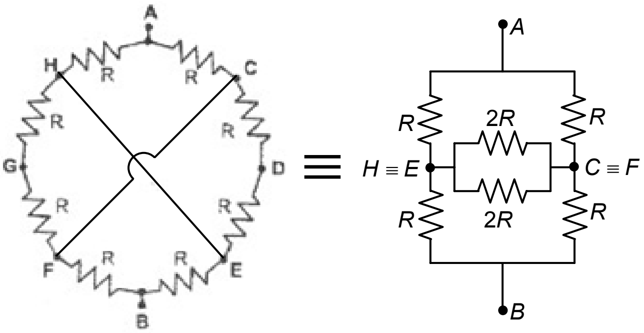
Situação 0 (inicial):



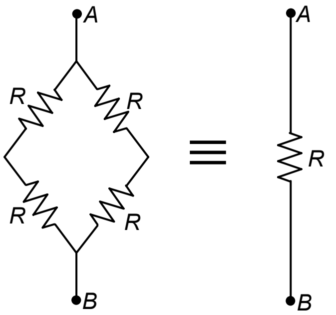
Pode-se observar que de A a B temos dois ramos em paralelo, cada um com 4 resistências R em série, assim a resistência equivalente é $R_{EQ0} = 4R//4R = 2R$.

Situação 1:

Na segunda situação, a malha é equivalente ao circuito abaixo:



Observe que temos uma Ponte de Wheatstone equilibrada, e por isso podemos ignorar a resistência central, e a resistência equivalente pode agora ser calculada por $R_{EQ_1} = 2R//2R = R$.



Tomando agora as potências dissipadas em ambas as situações, sendo a segunda 12,5% maior que a primeira ($P_{dissipada} = R_{EQ} i^2$):

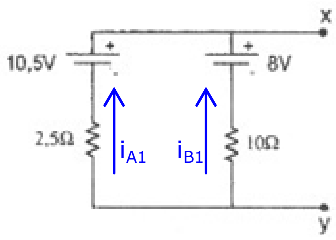
$$(2R)i_0^{\,2} = P \quad (1)$$

$$Ri_1^{\,2} = \frac{9P}{8} \quad (2)$$

Dividindo a equação (1) pela (2):

$$\frac{2i_0^{\,2}}{i_1^{\,2}} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{i_0^{\,2}}{i_1^{\,2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{i_0}{i_1} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

Analisando a segunda situação (quando C é ligado a F e E a H):



A ddp entre os pontos X e Y pode ser escrita de várias formas:

$$U_{XY_1} = 10{,}5 - 2{,}5i_{A_1} \quad (4)$$

$$U_{XY_1} = 8 - 10i_{B_1} \quad (5)$$

$$U_{XY_1} = Ri_1 \quad (6)$$

A corrente total é:

$$i_1 = i_{A_1} + i_{B_1} \quad (7)$$

Calculando $4\times(4) + 1\times(5)$:

$$4U_{XY_1} + U_{XY_1} = 42 - 10i_{A_1} + 8 - 10i_{B_1}$$

$$5U_{XY_1} = 50 - 10(i_{A_1} + i_{B_1})$$

Substituindo a (7) nesta última equação:

$$U_{XY_1} = 10 - 2i_1 \quad (8)$$

Substituindo a (8) na (6):

$$10 - 2i_1 = Ri_1 \Rightarrow i_1(2+R) = 10 \quad (9)$$

Voltando a analisar o caso inicial (em que não há interligação de H com E e de C com F), novamente escrevemos a ddp entre os pontos X e Y nesta outra situação:

$$U_{XY_0} = 10{,}5 - 2{,}5i_{A_0} \quad (10)$$

$$U_{XY_0} = 8 - 10i_{B_0} \quad (11)$$

$$U_{XY_0} = 2Ri_0 \quad (12)$$

Analogamente ao caso anterior, temos:

$$U_{XY_0} = 10 - 2i_0 \Rightarrow 2i_0(1+R) = 10 \quad (13)$$

Finalmente, dividindo a (13) pela (9) temos:

$$\frac{2i_0(1+R)}{i_1(2+R)} = \frac{10}{10} = 1$$

$$2\left(\frac{i_0}{i_1}\right)\cdot(1+R) = 2+R$$

Substituindo a equação (3) na expressão anterior:

$$2\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+R) = 2+R \Rightarrow 4+4R = 6+3R \Rightarrow \boxed{R = 2\Omega}$$

QUESTÃO 06

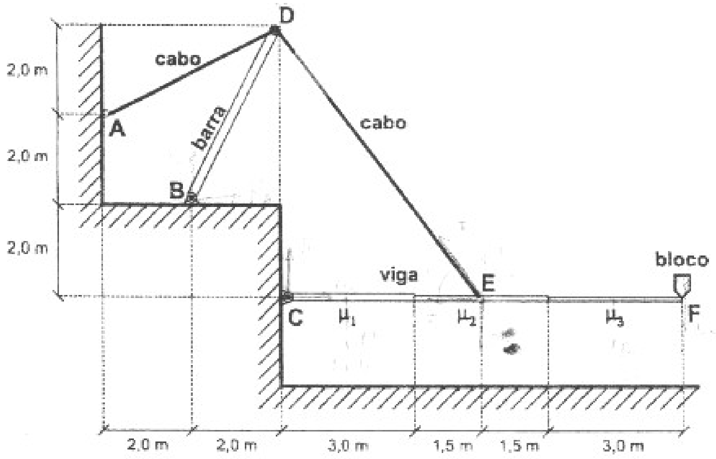
A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra BD, dois cabos AD e DE, e uma viga horizontal CF. A barra é fixada em B. Os cabos, de secção transversal circular de 5 mm de diâmetro, são inextensíveis e fixados nos pontos A, D e E. A viga de material uniforme e homogêneo é apoiada em C e sustentada pelo cabo DE. Ao ser colocado um bloco de 100 Kg de massa na extremidade F da viga, determine:

a) a força no trecho ED do cabo;

b) as reações horizontal e vertical no apoio C da viga;

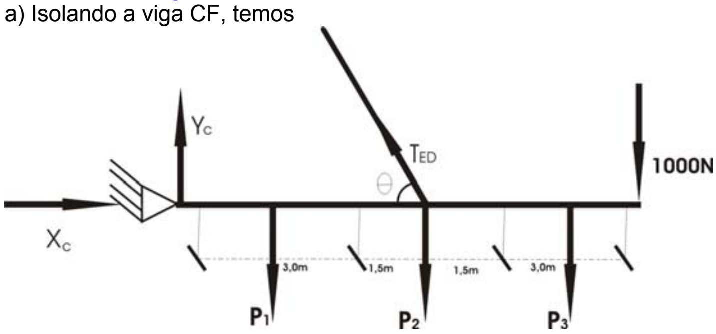
c) as reações horizontal e vertical no apoio B da barra.

<u>Dados:</u> aceleração da gravidade: $10\ m/s^2$; densidades lineares de massa: $\mu_1 = 30\ Kg/m$, $\mu_2 = 20\ Kg/m$, $\mu_3 = 10\ Kg/m$; $\sqrt{20} \approx 4{,}5$.



Resolução

a) Isolando a viga CF, temos



Onde:

$$P_1 = \mu_1 \cdot g \cdot 3 = 900N$$

$$P_2 = \mu_2 \cdot g \cdot 3 = 600N$$

$$P_3 = \mu_3 \cdot g \cdot 3 = 300N$$

Considerando que a viga está em equilíbrio estático:

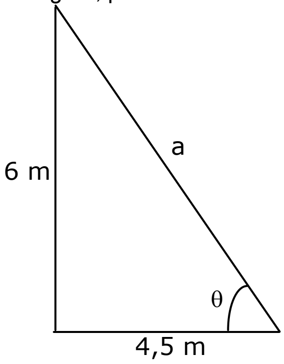
$$\sum M(c) = 0$$

$$\Rightarrow P_1.1{,}5 + P_2.4{,}5 - T_{ED}.sen\theta.4{,}5 + P_3.7{,}5 + 1000.9 = 0$$

$$\Rightarrow 900.1{,}5 + 600.4{,}5 - T_{ED}.sen\theta.4{,}5 + 300.7{,}5 + 1000.9 = 0$$

$$\Rightarrow T_{ED}.sen\theta.4{,}5 = 1350 + 2700 + 2250 + 9000 = 15300$$

Da figura, podemos obter senθ e cosθ:



$$a = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = 7{,}5\ m$$

$$\text{sen}\theta = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8$$

$$\cos\theta = \frac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6$$

Assim:

$$T_{ED}.sen\theta.4{,}5 = \frac{15300}{4{,}5 \cdot 0{,}8} \Rightarrow \boxed{T_{ED} = 4.250N}$$

b) Novamente na viga CF, temos;

$$\sum F_x = 0$$

$$\therefore T_{ED}.\cos\theta = X_C$$

$$X_C = 4250 \cdot 0{,}6 \implies \boxed{X_C = 2550N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\therefore Y_C + T_{ED}sen\theta = P_1 + P_2 + P_3 + 1000$$

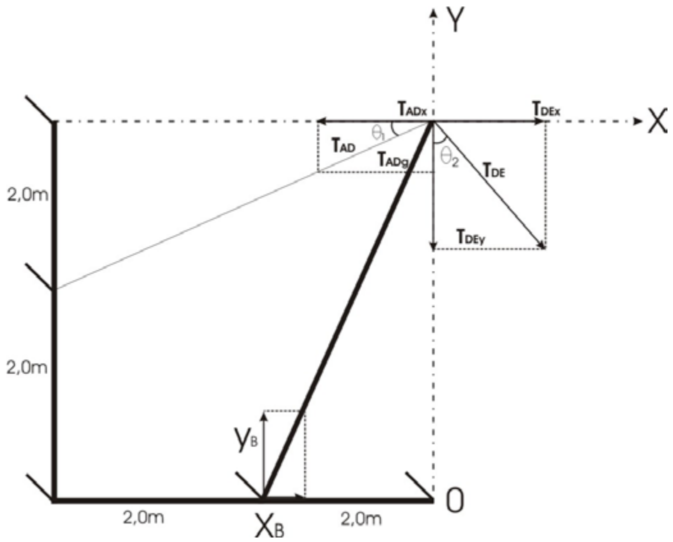
$$\Rightarrow Y_C = P_1 + P_2 + P_3 + 1000 - T_{ED}sen\theta$$

$$\Rightarrow Y_C = 900 + 600 + 300 + 1000 - 4250 \cdot 0{,}8$$

$$\boxed{Y_C = -600N}$$

Obs: Sentido contrário ao mostrado no diagrama

c)



Na Barra BD, temos;

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow T_{AD_x} = T_{DE_x} + X_B$$

$$\Leftrightarrow T_{AD}.\cos\theta_1 = T_{DE}.sen\theta_2 + X_B \quad (I)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B = T_{ADy} + T_{DEy}$$

$$\Leftrightarrow Y_B = T_{AD}sen\theta_1 + T_{DE}\cos\theta_2 \quad (II)$$

Sendo:

$$sen\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx \frac{2}{4{,}5} \qquad \cos\theta_1 = \frac{4}{\sqrt{20}} \approx \frac{4}{4{,}5}$$

$$sen\theta_2 = 0{,}6 \qquad \cos\theta_2 = 0{,}8$$

$$\sum M(B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$T_{ADx} \cdot 4 - T_{DEx} \cdot 4 - T_{DEy} \cdot 2 - T_{ADy} \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{AD} \cdot 4 \cdot \cos\theta_1 - T_{DE} \cdot 4 \cdot sen\theta_2 - T_{DE} \cdot 2 \cdot \cos\theta_2 - T_{AD} \cdot 2 \cdot sen\theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{AD} \cdot (4 \cdot \cos\theta_1 - 2 \cdot sen\theta_1) = T_{DE} \cdot (4 \cdot sen\theta_2 + 2 \cdot \cos\theta_2) \Rightarrow$$

$$T_{AD} = T_{DE} \cdot \frac{(4 \cdot sen\theta_2 + 2 \cdot \cos\theta_2)}{(4 \cdot \cos\theta_1 - 2 \cdot sen\theta_1)} = 4250 \cdot \frac{(4 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}8)}{(4 \cdot \frac{4}{4{,}5} - 2 \cdot \frac{2}{4{,}5})}$$

$$T_{AD} = 6375N$$

Substituindo o resultado de T_{AD} em (I), temos:

$$X_B = T_{AD}.\cos\theta_1 - T_{DE}.sen\theta_2 = 6375 \cdot \frac{4}{4{,}5} - 4250 \cdot 0{,}6$$

$$\boxed{X_B = 3.116{,}67N} \text{ ou } \boxed{X_B = \frac{9350}{3}N}$$

Substituindo o resultado de T_{AD} em (II), temos:

$$Y_B = T_{AD}sen\theta_1 + T_{DE}\cos\theta_2 = 6375 \cdot \frac{2}{4{,}5} + 4250 \cdot 0{,}8$$

$$\boxed{Y_B = 6.233{,}34N} \text{ ou } \boxed{Y_B = \frac{18700}{3}N}$$

QUESTÃO 07

Um industrial possui uma máquina térmica operando em um ciclo termodinâmico, cuja fonte de alimentação advém da queima de óleo combustível a 800 K. Preocupado com os elevados custos do petróleo, ele contrata os serviços de um inventor. Após estudo, o inventor afirma que o uso do óleo combustível pode ser minimizado através do esquema descrito a seguir: um quarto do calor necessário para acionar a máquina seria originado da queima de bagaço de cana a 400 K, enquanto o restante seria proveniente da queima de óleo combustível aos mesmos 800 K. Ao ser inquirido sobre o desempenho da máquina nesta nova configuração, o inventor argumenta que a queda no rendimento será inferior a 5%. Você julga esta afirmação procedente? Justifique estabelecendo uma análise termodinâmica do problema para corroborar seu ponto de vista. Considere que, em ambas as situações, a máquina rejeita parte da energia para o ar atmosférico, cuja temperatura é 300 K.

Resolução

O rendimento η de uma máquina térmica que absorve uma quantidade de calor Q_H da fonte quente e realiza um trabalho τ é dado por:

$$\eta = \frac{\tau}{Q_H}$$

O máximo rendimento que uma maquina térmica pode apresentar é aquele correspondente ao ciclo do Carnot, operando entre as temperaturas T_H (fonte quente) e T_C (fonte fria), e é dado por:

$$\eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Sendo o máximo rendimento possível, vale sempre que:

$$\eta \le \eta_{CARNOT} \Rightarrow \frac{\tau}{Q_H} \le 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Para a máquina inicial, temos:

$$\eta_0 = \frac{\tau_0}{Q_H} \le 1 - \frac{300}{800} \Rightarrow \eta_0 \le \frac{5}{8}$$

Para a segunda máquina, construída como uma associação de duas máquinas, o rendimento de cada uma delas satisfaz:

$$\begin{cases} \eta_1 \le 1 - \dfrac{300}{400} \Rightarrow \dfrac{\tau_1}{\frac{1}{4}Q_H} \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{\tau_1}{Q_H} \le \dfrac{1}{16} \\ \eta_2 \le 1 - \dfrac{300}{800} \Rightarrow \dfrac{\tau_2}{\frac{3}{4}Q_H} \le \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{\tau_2}{Q_H} \le \dfrac{15}{32} \end{cases}$$

Assim, o rendimento dessa máquina será dado por:

$$\eta = \frac{\tau_1+\tau_2}{Q_H} = \frac{\tau_1}{Q_H} + \frac{\tau_2}{Q_H} \Rightarrow \eta \le \frac{1}{16} + \frac{15}{32} \Rightarrow \eta \le \frac{17}{32}$$

Se cada uma das máquinas envolvidas executasse um ciclo de Carnot, teríamos:

$$\eta = \frac{17}{32}(=53{,}125\%) \text{ e } \eta_0 = \frac{5}{8}(=62{,}5\%)$$

Nesse caso, a variação percentual do rendimento é dada por:

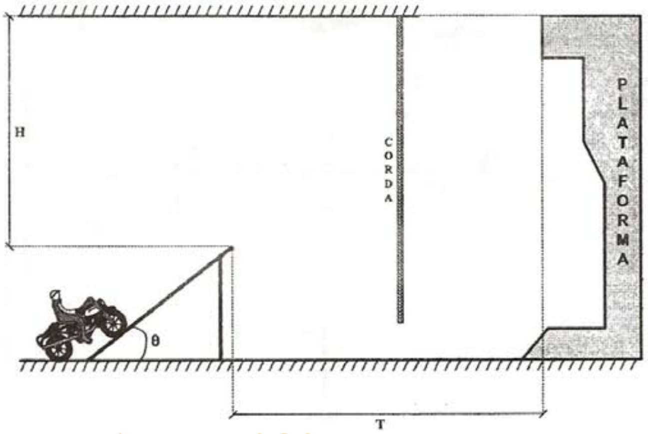
$$\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0} = \frac{\frac{17}{32}-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = -0{,}15 = -15\%$$

Assim, é possível passar da primeira situação para a segunda tendo uma queda de rendimento de 15%. Como o inventor afirmou que a queda seria de no máximo 5%, podemos julgar que essa afirmação é falsa, no sentido de que é possível construir um contra-exemplo que viola a afirmação feita.

Por outro lado, deve-se ressaltar que como o enunciado não afirma que alguma das máquinas executa de fato um ciclo de Carnot, as máquinas construídas nem sempre violarão a afirmação feita.

QUESTÃO 08

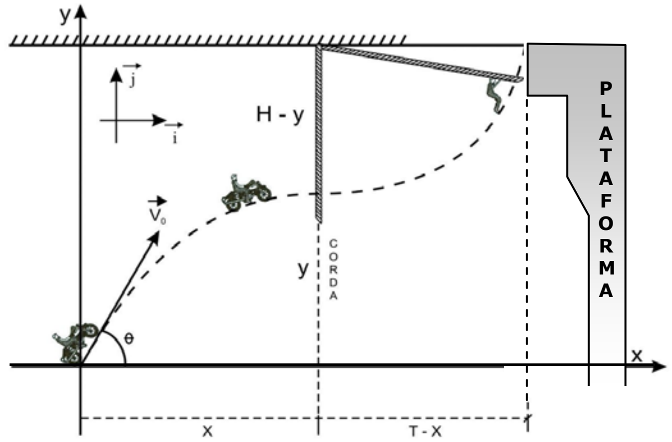
Um motociclista de massa m_1 deseja alcançar o topo de uma plataforma. Para isso, ele faz uso de uma moto de massa m_2, uma corda inextensível de massa desprezível e uma rampa de inclinação θ. Ao saltar da rampa, o motociclista atinge a corda na situação em que esta permanece esticada e o esforço despendido por ele é o menor possível. Para evitar ruptura por excesso de peso, o motociclista libera a moto no momento do contato com a corda, que o conduz para o topo da plataforma.
Nestas condições e considerando os parâmetros H e T indicados na figura, determine o vetor velocidade do motociclista na saída da rampa.



Resolução

O movimento do motociclista é um lançamento oblíquo de um ângulo de inclinação θ. Foi considerado que, para realizar o menor esforço e ao mesmo tempo manter a corda esticada, o motociclista deverá atingir a corda ao passar pelo vértice da trajetória parabólica.
Até atingir a corda, o sistema (moto + motociclista) percorreu na horizontal a distância x e na vertical a distância y.
Sendo x a metade do alcance horizontal tem-se:

$$x = \frac{V_0^2 \text{sen}2\theta}{2g} = \frac{(V_x^2 + V_{0y}^2)\text{sen}2\theta}{2g} \qquad (1)$$



Aplicando a conservação de energia ao sistema (homem + moto), desde o instante em que o motociclista sai da rampa, até quando ele se agarra à corda, temos:

$$\frac{(m_1+m_2)V_{0y}^2}{2} = (m_1+m_2)gy \Rightarrow V_{0y}^2 = 2gy \qquad (2)$$

Do instante em que o motociclista atinge a corda e se agarra a ela, até o momento em que ele atinge o topo da plataforma (com velocidade nula, para que seu esforço seja mínimo), podemos aplicar novamente a conservação de energia, agora apenas ao homem:

$$\frac{m_1V_x^2}{2} = m_1g(H-y) \Rightarrow V_x^2 = 2g(H-y) \qquad (3)$$

Substituindo V_x^2 e V_{0y}^2, das equações (3) e (2), na expressão (1), vem que:

$$x = \frac{2gH\text{sen}2\theta}{2g} = H\text{sen}2\theta$$

O raio da trajetória circular desenvolvida pelo motociclista pode ser escrito como:

$$R = T - x = H - y \Rightarrow y = H - T + x$$
$$y = H - T + H\text{sen}2\theta$$

Assim,

$$V_{0y}^2 = 2gy \Rightarrow V_{0y}^2 = 2g(H-T+H\text{sen}2\theta)$$
$$V_x^2 = 2g(H-y) \Rightarrow V_x^2 = 2g(T - H\text{sen}2\theta)$$

Das expressões acima tiramos que:

$$V_x = \sqrt{2g(T-H\text{sen}2\theta)}$$
$$V_{0y} = \sqrt{2g(H-T+H\text{sen}2\theta)}$$

Sendo assim, a velocidade inicial é:

$$\vec{V_0} = \left(\sqrt{2g(T-H\text{sen}2\theta)}\right)\cdot\vec{i} + \left(\sqrt{2g(H-T+H\text{sen}2\theta)}\right)\cdot\vec{j}$$

Prosseguindo por outros caminhos, poderíamos ter obtido ainda uma outra expressão para o vetor velocidade:

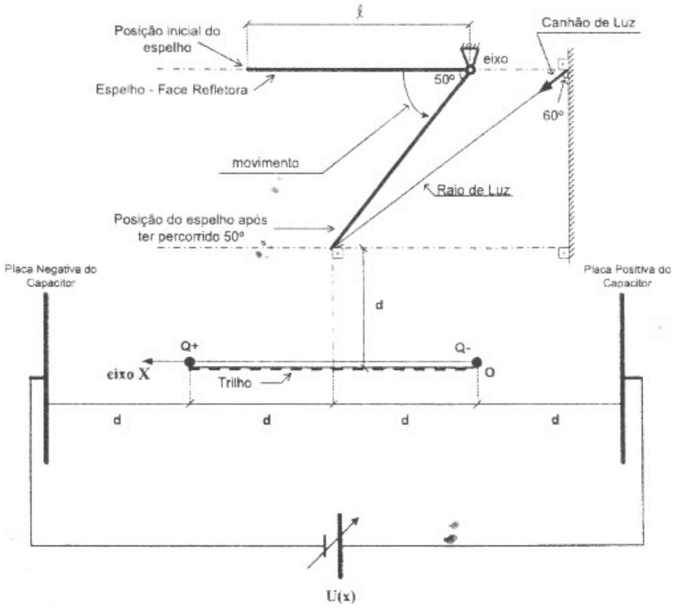
$$\vec{V_0} = \left(\sqrt{\frac{2gT}{1+2tg\theta}}\right)\cdot\vec{i} + \left(\sqrt{\frac{2gH(1+2tg\theta)-2gT}{1+2tg\theta}}\right)\cdot\vec{j}$$

Naturalmente, ambas são verdadeiras e equivalentes.

QUESTÃO 09

Na figura abaixo, há um espelho com a face refletora para baixo, tendo uma de suas extremidades presa a um eixo que permite um movimento pendular, e um canhão, que emite concomitantemente um raio de luz. Abaixo do espelho existem dois corpos de massa m e cargas de mesmo módulo e sinais opostos. Os corpos estão apoiados sobre um trilho sem atrito, fixados em suas extremidades e no mesmo plano vertical que o canhão de luz. Os corpos estão imersos no campo

elétrico uniforme existente entre as placas de um capacitor, que é energizado por uma fonte variável U(x).
No momento em que o espelho inicia o movimento, a partir da posição inicial e com aceleração tangencial de módulo constante, o corpo de carga negativa é liberado. Para que a aceleração deste corpo seja constante e máxima no sentido do eixo X, determine:
a) a expressão de U(x), onde x representa a posição do corpo de carga negativa relativa à origem O do eixo X;
b) o módulo da aceleração tangencial da extremidade livre do espelho, para que o raio de luz atinja a carga de prova negativa no momento em que o deslocamento angular do espelho seja de 50º.
Dados: $Q = 10^{-4}\,C$; $m = 20\,g$; $\ell = 1{,}0\,m$; $d = 0{,}5\,m$; $g = 10\,m/s^2$.



Resolução

a) A carga deve se movimentar com aceleração constante apontada para a esquerda e, portanto, temos que a força resultante é constante.
A partir do diagrama de corpo livre:

$$\vec{F}_{CARGA} \longleftarrow \bullet \longrightarrow \vec{F}_{CAPACITOR}$$

Temos o módulo da força resultante por $|\vec{F}_R| = |\vec{F}_{carga}| - |\vec{F}_{capacitor}|$. Logo, para uma determinada posição x:

$$m \cdot |\vec{a}| = \frac{kQ^2}{(2d-x)^2} - Q \cdot |\vec{E}| = \frac{kQ^2}{(2d-x)^2} - Q \cdot \left[\frac{U(x)}{4d}\right] \quad (1)$$

Como a aceleração deve ser constante, podemos dizer que para x = 0 também temos a igualdade.

$$m \cdot |\vec{a}| = \frac{kQ^2}{(2d-0)^2} - Q \cdot \left[\frac{U(0)}{4d}\right] = \frac{kQ^2}{(2d)^2} - Q \cdot \left[\frac{U(0)}{4d}\right] \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) temos:

$$\frac{kQ^2}{(2d-x)^2} - Q \cdot \left[\frac{U(x)}{4d}\right] = \frac{kQ^2}{(2d)^2} - Q \cdot \left[\frac{U(0)}{4d}\right]$$

$$\frac{kQ}{(2d-x)^2} - \left[\frac{U(x)}{4d}\right] = \frac{kQ}{(2d)^2} - \left[\frac{U(0)}{4d}\right]$$

$$U(x) - U(0) = 4d \cdot kQ\left[\frac{1}{(2d-x)^2} - \frac{1}{(2d)^2}\right]$$

Como a aceleração deve ser máxima, devemos ter no ponto inicial (x = 0) a maior força resultante, que ocorre quanto $|\vec{E}| = 0 \Rightarrow U(0) = 0$ (não existe diferença de potencial entre as placas no momento inicial). Note ainda que quanto menor a distância, maior será $|\vec{F}_{carga}|$ e consequentemente maior será $|\vec{F}_{capacitor}|$, o que mantém a resultante constante.
Portanto temos:

$$U(x) = 4d \cdot kQ \cdot \left[\frac{1}{(2d-x)^2} - \frac{1}{(2d)^2}\right]$$

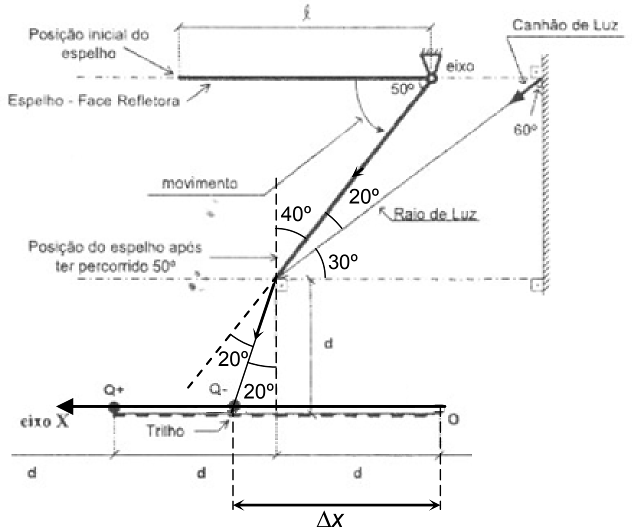
Substituindo os valores do enunciado, e considerando a constante eletrostática do vácuo $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ temos:

$$U(x) = 4 \cdot 0{,}5 \cdot \left(9 \cdot 10^9\right) \cdot 10^{-4}\left[\frac{1}{(2 \cdot 0{,}5 - x)^2} - \frac{1}{(2 \cdot 0{,}5)^2}\right]$$

$$U(x) = 18 \cdot 10^5 \cdot \left[\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right] = 18 \cdot 10^5 \frac{1-(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{U(x) = 1{,}8 \cdot 10^6 \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}}$$

b) Quando o espelho está com o ângulo de 50º, temos a seguinte representação do raio luminoso que deve atingir a carga negativa:



Sabendo que a aceleração da massa é constante e que no ponto x = 0 temos $U(0) = 0$ temos:

$$m \cdot |\vec{a}| = \frac{k \cdot Q^2}{(2d)^2} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{k \cdot Q^2}{4 \cdot m \cdot d^2}$$

Assim, a partir do repouso, podemos relacionar o deslocamento da carga com o tempo de acordo com:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \frac{k \cdot Q^2}{4 \cdot m \cdot d^2} \cdot t^2 \quad (3)$$

Como a aceleração tangencial da extremidade livre é constante, podemos dizer, a partir do repouso:

$$\Delta S_{extremidade} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}_T| \cdot t^2 \Rightarrow \Delta\theta_{extremidade} \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}_T| \cdot t^2 \quad (4)$$

Temos, num mesmo intervalo de tempo, dividindo (3) por (4):

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta_{extremidade} \cdot \ell} = \frac{\frac{k \cdot Q^2}{4 \cdot m \cdot d^2}}{|\vec{a}_T|} \Rightarrow |\vec{a}_T| = \frac{\Delta\theta_{extremidade} \cdot \ell}{\Delta x} \cdot \frac{k \cdot Q^2}{4 \cdot m \cdot d^2}$$

Como $\Delta\theta_{extremidade} = 50^\circ = \frac{5\pi}{18}$ e $\Delta x = d + d \cdot tg\frac{\pi}{9} = d\left(1 + tg\frac{\pi}{9}\right)$, temos:

$$|\vec{a}_T| = \frac{\frac{5\pi}{18} \cdot \ell}{d\left(1 + tg\frac{\pi}{9}\right)} \cdot \frac{k \cdot Q^2}{4 \cdot m \cdot d^2} = \frac{5\pi}{72} \cdot \frac{\ell}{1 + tg\frac{\pi}{9}} \cdot \frac{k \cdot Q^2}{m \cdot d^3}$$

Substituindo os valores informados no enunciado, temos:

$$|\vec{a}_T| = \frac{5\pi}{72} \cdot \frac{1}{1 + tg\frac{\pi}{9}} \cdot \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(10^{-4}\right)^2}{\left(2 \cdot 10^{-2}\right) \cdot 0{,}5^3} = \frac{5\pi}{72} \cdot \frac{36 \cdot 10^{-5}}{1 + tg\frac{\pi}{9}} = \frac{5\pi}{2 \cdot \left(1 + tg\frac{\pi}{9}\right)} \cdot 10^3\,m/s^2$$

QUESTÃO 10

A figura apresenta um plano inclinado, sobre o qual estão dois blocos, e, em sua parte inferior, uma mola com massa desprezível. A superfície deste plano apresenta coeficiente de atrito estático $\mu_e = 5\sqrt{3}/13$ e coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}3\sqrt{3}$. O bloco A está fixado na superfície. O bloco B possui massa de 1Kg e encontra-se solto. Sabe-se que a superfície abaixo da mola não possui atrito e que os blocos A e B estão eletricamente carregados com, respectivamente, $+40x10^{-4}C$ e $-\left(\sqrt{3}/39\right)x10^{-3}C$. Desconsiderando as situações em que, ao atingir o equilíbrio, o bloco B esteja em contato com o bloco A ou com a mola, determine:

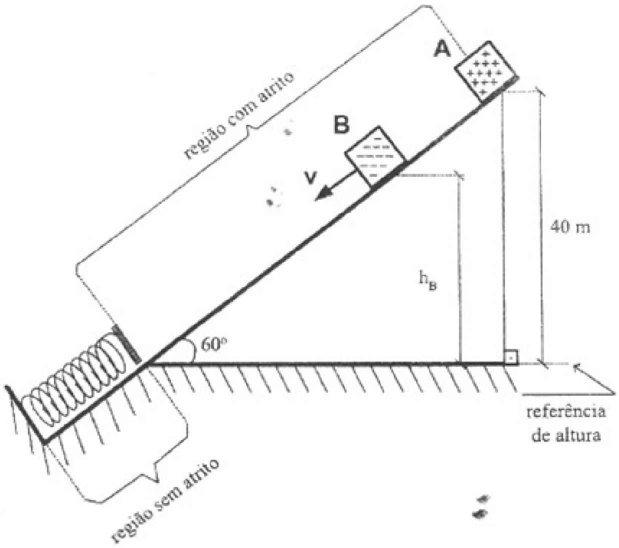
a) as alturas máxima e mínima, em relação à referência de altura, que determinam a faixa em que é possível manter o bloco B parado em equilíbrio;

b) a velocidade inicial máxima v com que o bloco B poderá ser lançado em direção a mola, a partir da altura $h_B = 20m$, para que, após começar a subir o plano inclinado, atinja uma posição de equilíbrio e lá permaneça.

Dados:

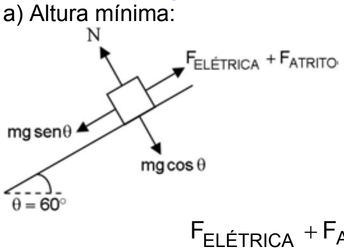
- aceleração da gravidade: $10\ m/s^2$
- constante eletrotática: $9x10^9\ Nm^2/C^2$.

Observação: desconsidere as dimensões dos blocos para os cálculos.



Resolução

a) Altura mínima:



Na altura mínima teremos a menor força elétrica e a maior força de atrito estático (com sentido de acordo com a figura) tais que o bloco permanece em equilíbrio. Assim:

$$F_{ELÉTRICA} + F_{ATRITO} = mgsen\theta.$$

Além disso:

$$N = mg\cos\theta,\ F_{ELÉTRICA} = \frac{K|Q_A||Q_B|}{\left(\frac{(40-h_B)}{sen\theta}\right)^2} \text{ e } F_{ATRITO} = \mu_e N. \text{ Logo:}$$

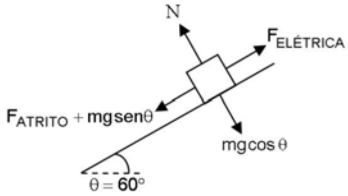
$$\frac{K|Q_A||Q_B|}{\left(\frac{(40-h_B)}{sen\theta}\right)^2} + \mu_e mg\cos\theta = mgsen\theta \Rightarrow$$

$$\left(\frac{(40-h_B)}{sen\theta}\right)^2 = \frac{K|Q_A||Q_B|}{mgsen\theta - \mu_e mg\cos\theta} \Rightarrow$$

$$h_B = 40 - \sqrt{\frac{K|Q_A||Q_B|sen^2\theta}{mg(sen\theta - \mu_e\cos\theta)}} = 40 - \sqrt{\frac{9.10^9.40x10^{-4}.\left(\sqrt{3}/39\right)x10^{-3}.3/4}{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{13}\cdot\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{BMÍN} = 25m}$$

Altura máxima:



Na altura máxima teremos a maior força elétrica e a maior força de atrito estático (com sentido de acordo com a figura) tais que o bloco permanece em equilíbrio. Assim:

$$F_{ELÉTRICA} = mgsen\theta + F_{ATRITO}.$$

Além disso,

$$N = mg\cos\theta,\ F_{ELÉTRICA} = \frac{K|Q_A||Q_B|}{\left(\frac{(40-h_B)}{sen\theta}\right)^2} \text{ e } F_{ATRITO} = \mu_e N. \text{ Logo:}$$

$$\frac{K|Q_A||Q_B|}{\left(\frac{(40-h_B)}{sen\theta}\right)^2} = mgsen\theta + \mu_e N \Rightarrow$$

$$h_B = 40 - \sqrt{\frac{K|Q_A||Q_B|sen^2\theta}{mg(sen\theta + \mu_e\cos\theta)}} = 40 - \sqrt{\frac{9.10^9.40x10^{-4}.\left(\sqrt{3}/39\right)x10^{-3}.3/4}{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{13}\cdot\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{BMAX} = 30m}$$

b) O bloco desce $\frac{20}{sen60°} = \frac{40}{\sqrt{3}}$ metros (ao longo do plano) e depois sobe $\frac{30}{sen60°} = \frac{60}{\sqrt{3}}$ metros (também ao longo do plano), uma vez que as condições do enunciado (somadas aos resultados do item a) nos permitem concluir que, na situação limite, o bloco estacionará, na subida, a uma altura de 30m.

Assim a força de atrito consumirá, em joules:

$$\tau_{ATRITO} = \mu_C Nd = \mu_C mg\cos\theta d$$

$$\tau_{ATRITO} = 0{,}3\sqrt{3}\cdot 1\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{40}{\sqrt{3}} + \frac{60}{\sqrt{3}}\right) = 150\,J$$

Além disso, o trabalho da força de atrito é o que torna o sistema não conservativo, reduzindo sua energia mecânica:

$$\tau_{ATRITO} = -\Delta E_M = E_{Minicial} - E_{Mfinal} \Rightarrow E_{Minicial} - \tau_{ATRITO} = E_{Mfinal}$$

A energia mecânica, por sua vez, é composta pela energia cinética, energia potencial gravitacional e energia potencial elétrica, assim:

$$E_{cinicial} + E_{pgrav,inicial} + E_{peletrica,inicial} - \tau_{ATRITO} = E_{cfinal} + E_{pgrav,final} + E_{peletrica,final}$$

$$\frac{1}{2}mV^2 + mgh_{B0} + \frac{KQ_AQ_B}{\left(\frac{40-h_{B0}}{sen\theta}\right)} - 150 = 0 + mgh_{BF} + \frac{KQ_AQ_B}{\left(\frac{40-h_{BF}}{sen\theta}\right)}$$

$$mV^2 = 300 + 2mg(h_{BF} - h_{B0}) + 2KQ_AQ_Bsen\theta\left(\frac{1}{40-h_{BF}} - \frac{1}{40-h_{B0}}\right)$$

$$V^2 = 300 + 2\cdot 10\cdot(30-20) +$$

$$+2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\left(40\cdot 10^{-4}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{39}\cdot 10^{-3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{40-30} - \frac{1}{40-20}\right)$$

$$V^2 = 500 - \frac{1800}{13} \Rightarrow \boxed{v = 10\cdot\sqrt{\frac{47}{13}}\ m/s} \text{ ou } \boxed{v \approx 19m/s}$$