

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
**c a m p i n a s**

**ELITE RESOLVE**

**IME 2008**

**FÍSICA**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**

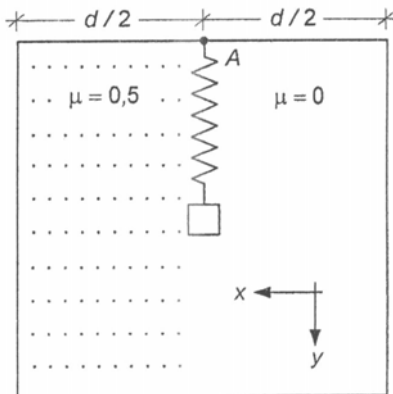
**(19) 3251 1012**

**FÍSICA**

**QUESTÃO 1**

A figura abaixo ilustra um pequeno bloco e uma mola sobre uma mesa retangular de largura  $d$ , vista de cima. A mesa é constituída por dois materiais diferentes, um sem atrito e outro com coeficiente de atrito cinético  $\mu$  igual a 0,5. A mola tem uma de suas extremidades fixada no ponto A e a outra no bloco. A mola está inicialmente comprimida de 4 cm, sendo liberada para que o bloco oscile na região sem atrito na direção  $y$ . Depois de várias oscilações, ao passar pela posição na qual tem máxima velocidade, o bloco é atingido por uma bolinha que se move com velocidade 2 m/s na direção  $x$  e se aloja nele. O sistema é imediatamente liberado da mola e se desloca na parte áspera da mesa. Determine:

- a) o vetor quantidade de movimento do sistema bloco + bolinha no instante em que ele é liberado da mola;
- b) a menor largura e o menor comprimento da mesa para que o sistema pare antes de cair.



mesa vista de cima

Dados: comprimento da mola = 25 cm;  
constante elástica da mola = 10 N/cm;  
massa da bolinha = 0,2 kg;  
massa do bloco = 0,4 kg;  
aceleração da gravidade = 10 m/s<sup>2</sup>

**Resolução**

a) A energia armazenada na mola é convertida totalmente em energia cinética do bloco, nos pontos onde sua velocidade é máxima. Assim, temos:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{(10 \cdot 10^2) \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2}{2} = \frac{0,4 \cdot v^2}{2};$$

De onde obtemos  $v = \pm 2$  m/s. O sinal  $\pm$  indica a possibilidade de o movimento estar a favor do referencial  $y$  ou contra, ambas possíveis para a deformação nula.

No choque entre a bolinha e o bloco, a quantidade de movimento total do sistema se conserva. Assim, a quantidade de movimento inicial é igual à final para ambos os eixos, pois não há impulso externo.

Adotando os versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  como os versores do eixo  $x$  e  $y$  de acordo com a figura, temos que a quantidade de movimento é dada por:

**Eixo x** (só a bolinha se movimenta neste eixo inicialmente):

$$\vec{Q}_{xf} = \vec{Q}_{xi} \Rightarrow \vec{Q}_{xf} = m_{bolinha} \cdot \vec{v}_{x(bolinha)} \Rightarrow \vec{Q}_{xf} = 0,2 \cdot 2\hat{i} = 0,4\hat{i} \frac{kg \cdot m}{s}$$

**Eixo y** (só o bloco se movimenta neste eixo inicialmente):

$$\vec{Q}_{yf} = \vec{Q}_{yi} \Rightarrow \vec{Q}_{yf} = m_{bloco} \cdot \vec{v}_{y(bloco)} \Rightarrow \vec{Q}_{yf} = 0,4 \cdot (\pm 2\hat{j}) = \pm 0,8\hat{j} \frac{kg \cdot m}{s}$$

Note que nada é dito sobre o sentido do movimento do bloco no instante do choque, o que valida o sinal ( $\pm$ )

$$\text{Assim, } \vec{Q}_f = \vec{Q}_{xf} + \vec{Q}_{yf} = (0,4\hat{i} + \pm 0,8\hat{j}) \frac{kg \cdot m}{s}$$

b) Após o choque, temos que

$$v_{0x} = \frac{Q_x}{m_{total}} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \text{ m/s e } v_{0y} = \frac{Q_y}{m_{total}} = \pm \frac{0,8}{0,6} = \pm \frac{4}{3} \text{ m/s}.$$

O módulo da velocidade resultante é dada por:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\pm \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ m/s}$$

A aceleração a partir do momento que o corpo é solto da mola é dada pela força resultante (devido à força de atrito):

$$F_{at} = \mu \cdot N = \mu \cdot (m \cdot g) = 0,5 \cdot (m_{total} \cdot 10) = 5 \cdot m_{total}$$

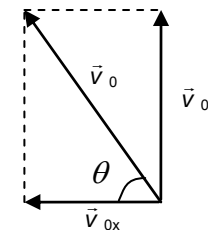
$$F_{res} = m_{total} \cdot a = F_{at} = 5 \cdot m_{total}$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

Pela equação de Torricelli, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-a) \cdot \Delta s \Rightarrow 0 = \frac{20}{9} - 2 \cdot 5 \cdot \Delta s \Rightarrow \Delta s = \frac{2}{9} \text{ m}$$

Analisando os deslocamentos nos eixos e representando o caso que a mola estava no sentido contrário ao eixo  $y$  (o caso oposto é análogo) temos:



Note que representamos a direção do movimento formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ . Chegamos então que:

$$\cos \theta = \frac{v_{0x}}{v} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como a trajetória segue uma linha reta, num movimento uniformemente acelerado na direção indicada, temos:

$$\cos \theta = \frac{\Delta x}{\Delta s} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{45} \text{ m}$$

Note que  $2 \cdot \Delta x = \Delta y$ , pois  $2 \cdot v_{0x} = v_{0y}$ . Assim  $\Delta y = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{45} \text{ m}$

Portanto, após o choque, o deslocamento em  $x$  é  $\frac{2\sqrt{5}}{45} \text{ m}$  de modo

que, da figura do enunciado, o mínimo pode ser calculado a partir de  $\frac{d}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{45} \Rightarrow d = \frac{4\sqrt{5}}{45} \text{ m}$  (menor largura).

O comprimento da mola não distendida é 25 cm, que é a distância do ponto A a partir de onde o sistema é liberado da mola. Como o enunciado não é específico, consideremos que o deslocamento em  $y$  pode ocorrer no sentido do eixo  $y$  ou contra o mesmo. Assim, a partir da posição de compressão nula, temos que o sistema se desloca

$$\Delta y = \pm \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{45} \approx \pm 0,20 \text{ m}$$

Portanto, caso a mola esteja se comprimindo (contra o eixo  $y$ ) no momento do rompimento, temos que o bloco não cairá. Caso a mola esteja se distendendo (a favor do eixo  $y$ ), a mesa deverá ter um

$$\text{tamanho de } \left(0,25 + \frac{4\sqrt{5}}{45}\right) \text{ m}.$$

Para abranger ambos os casos, temos como resposta:

$$\text{Comprimento mínimo: } \left(0,25 + \frac{4\sqrt{5}}{45}\right) \text{ m}$$

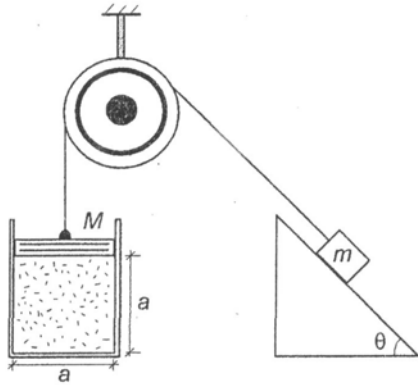
$$\text{Largura mínima, de acordo com a figura: } d = \frac{4\sqrt{5}}{45}$$

**Nota:** Ainda verifica-se que com estas medidas, a oscilação (de amplitude 4 cm) o bloco permanece sobre a mesa.

**QUESTÃO 2**

Em um recipiente, hermeticamente fechado por uma tampa de massa  $M$ , com volume interno na forma de um cubo de lado  $a$ , encontram-se  $n$  mols de um gás ideal a uma temperatura absoluta  $T$ . A tampa está presa a uma massa  $m$  por um fio que passa por uma roldana, ambos ideais. A massa  $m$  encontra-se na iminência de subir um plano inclinado de ângulo  $\theta$  com a horizontal e coeficiente de atrito estático  $\mu$ . Considerando que as variáveis estejam no Sistema Internacional e

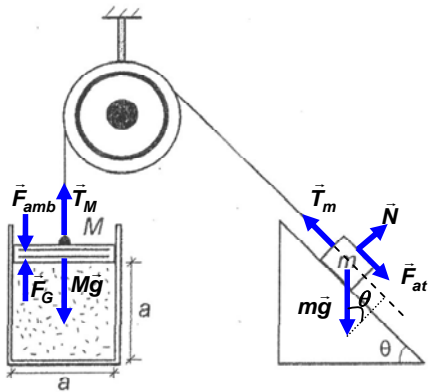
que não exista atrito entre a tampa  $M$  e as paredes do recipiente, determine  $m$  em função das demais variáveis.



Dados: aceleração da gravidade =  $g$ ;  
Constante universal dos gases perfeitos =  $R$ .

**Resolução**

Note as forças que atuam no pistão de massa  $M$  e no bloco de massa  $m$ :



Sabendo que o bloco de massa  $m$  está na iminência do escorregamento, temos:

a) Na direção perpendicular ao plano inclinado:

$$|\vec{N}| = m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos \theta$$

b) Na direção do plano inclinado:

$$|\vec{F}_{at}| = \mu \cdot |\vec{N}| = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos \theta, \text{ assim:}$$

$$|\vec{T}_m| = \mu \cdot |\vec{N}| + m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin \theta \Rightarrow |\vec{T}_m| = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos \theta + m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin \theta$$

$$|\vec{T}_m| = m \cdot |\vec{g}| \cdot (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta)$$

Observando o equilíbrio do pistão, temos:

$$|\vec{T}_M| + |\vec{F}_G| = |\vec{F}_{amb}| + M \cdot |\vec{g}|$$

Mas, pelo acoplamento com o fio, temos  $|\vec{T}_M| = |\vec{T}_m|$

Assim:

$$m \cdot |\vec{g}| \cdot (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta) + |\vec{F}_G| = |\vec{F}_{amb}| + M \cdot |\vec{g}|$$

$$m = \frac{|\vec{F}_{amb}| - |\vec{F}_G| + M \cdot |\vec{g}|}{|\vec{g}| (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta)}$$

A força causada pela pressão ambiente é calculada por

$$|\vec{F}_{amb}| = p_{amb} \cdot a^2 \text{ e por sua vez, a força do gás por } |\vec{F}_G| = p_G \cdot a^2$$

Como o gás dentro do pistão pode ser considerado ideal, temos que:

$$p_G \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p_G \cdot a^3 = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p_G = \frac{n \cdot R \cdot T}{a^3}$$

$$\text{Portanto, } |\vec{F}_G| = \frac{n \cdot R \cdot T}{a^3} \cdot a^2 = \frac{n \cdot R \cdot T}{a}$$

Assim, substituindo, na expressão da massa, temos:

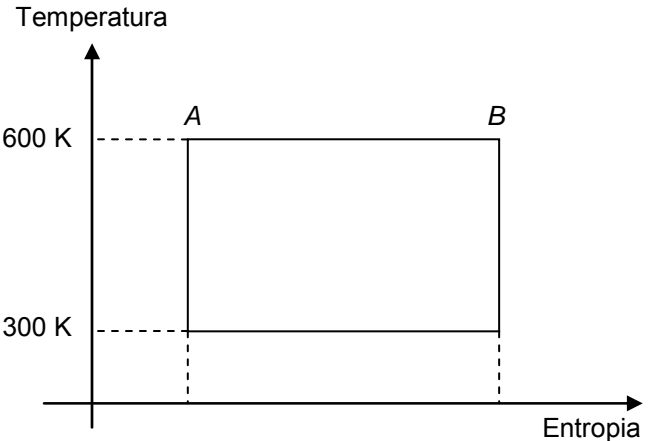
$$m = \frac{p_{amb} \cdot a^2 - \frac{n \cdot R \cdot T}{a} + M \cdot |\vec{g}|}{|\vec{g}| (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta)} = \frac{p_{amb} \cdot a^3 - n \cdot R \cdot T + a \cdot M \cdot g}{a \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta)}$$

**Nota:** Como o enunciado não fala sobre a pressão ambiente, supõe-se que a mesma deva ser desprezada (experimento efetuado no vácuo). Assim, acredita-se que a resposta esperada pela banca seja

$$m = \frac{a \cdot M \cdot g - n \cdot R \cdot T}{a \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos \theta + \sin \theta)}$$

**QUESTÃO 3**

Uma máquina térmica opera a 6000 ciclos termodinâmicos por minuto, executando o ciclo de *Carnot* mostrado na figura abaixo. O trabalho desta máquina térmica é utilizado para elevar verticalmente uma carga de 1000 kg com velocidade constante de 10 m/s. Determine a variação de entropia no processo AB, representado na figura. Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s<sup>2</sup> e os processos termodinâmicos reversíveis.



**Resolução**

**Solução 1:**

A potência necessária para elevar 1000 kg a 10m/s é dada por:

$$P = F \cdot v = (M \cdot g) \cdot v = 1000 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 \frac{J}{s}$$

A máquina opera a 6000 ciclos por minuto (100 ciclos por segundo). Assim, temos que o trabalho realizado em cada ciclo é dado por:

$$\begin{aligned} 100 \text{ ciclos} & \text{--- } 10^5 \text{ J} \\ 1 \text{ ciclo} & \text{--- } \tau_{\text{ciclo}} \\ \tau_{\text{ciclo}} & = 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

A partir do conhecimento do trabalho no ciclo, sabendo que o rendimento do ciclo de *Carnot* é

$$\eta = 1 - \frac{T_{FRIA}}{T_{QUENTE}} = 1 - \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Portanto } \eta = \frac{1}{2} = \frac{\tau_{\text{ciclo}}}{Q_{QUENTE}} \Rightarrow Q_{QUENTE} = 2 \cdot \tau_{\text{ciclo}} = 2 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Sabemos que  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ . Para trechos em que a temperatura é

constante, esta equação pode ser simplificada para  $\Delta S = \frac{Q}{T}$ .

$$\text{Assim, } \Delta S_{AB} = \frac{Q_{QUENTE}}{T} = \frac{2 \cdot 10^3}{600} \approx 3,33 \text{ J/K}$$

**Solução 2:**

Do gráfico acima, como temos temperatura constante no momento onde ocorrem as duas trocas de calor, então:

$$\Delta S_{300K} = \frac{Q_{FRIA}}{300} \text{ e } \Delta S_{600K} = \frac{Q_{QUENTE}}{600}$$

$$\text{Portanto, } |Q_{QUENTE}| - |Q_{FRIA}| = 600 \cdot |\Delta S_{600K}| - 300 \cdot |\Delta S_{300K}|$$

$$\text{Ainda pelo gráfico, temos } |\Delta S_{600K}| = |\Delta S_{300K}|, \text{ assim:}$$

$$|Q_{QUENTE}| - |Q_{FRIA}| = (600 - 300) \cdot |\Delta S_{600K}| = 300 \cdot |\Delta S_{600K}|$$

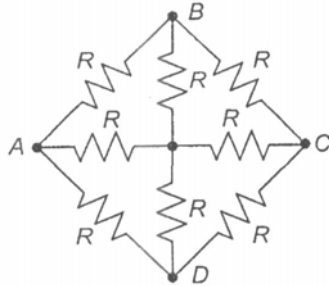
Como  $|Q_{QUENTE}| - |Q_{FRIA}| = \tau_{\text{ciclo}}$ , temos

$$300 \cdot |\Delta S_{600K}| = 10^3 \Rightarrow |\Delta S_{600K}| \approx 3,33 \text{ J/K}$$

Do gráfico, temos  $\Delta S_{AB} > 0 \Rightarrow \Delta S_{AB} = +3,33 \text{ J/K}$

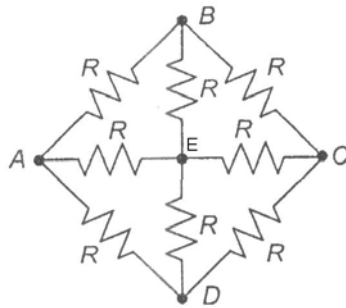
**QUESTÃO 4**

A malha de resistores apresentada na figura ao lado é conectada pelos terminais A e C a uma fonte de tensão constante. A malha é submersa em um recipiente com água e, após 20 minutos, observa-se que o líquido entra em ebulição. Repetindo as condições mencionadas, determine o tempo que a água levaria para entrar em ebulição, caso a fonte tivesse sido conectada aos terminais A e B.

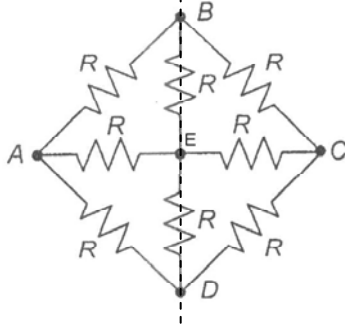


**Resolução**

Chamemos de E o ponto no meio do circuito.

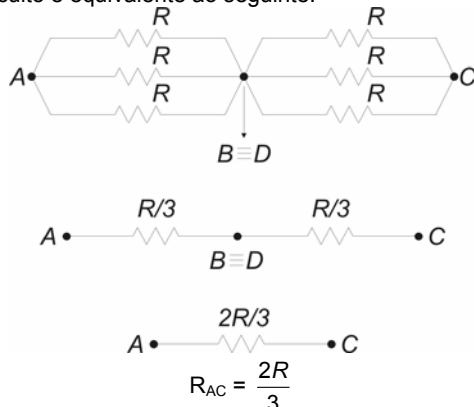


a) Resistência equivalente entre A e C:

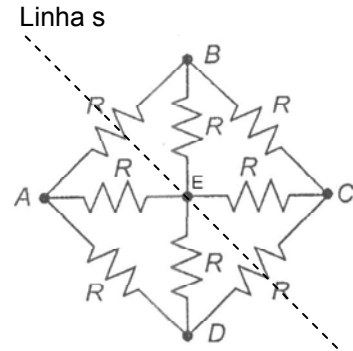


Observando a simetria existente em relação à reta BD, o lado esquerdo e o lado direito são idênticos. Portanto, os pontos B, D e E têm o mesmo potencial.

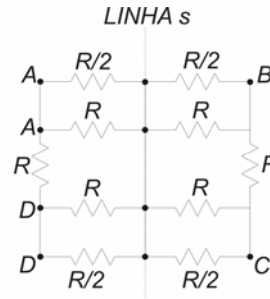
Assim, as duas resistências, entre B e E, e entre D e E, não são atravessadas por corrente, e podem ser removidas do circuito. Desse modo, o circuito é equivalente ao seguinte:



b) Resistência equivalente entre A e B:



Observando novamente a simetria indicada na figura acima (em relação à linha s), atribuir aos pontos sobre a linha s o mesmo potencial:



Temos que a resistência equivalente entre os pontos AB pode ser calculada por:

$$R_{AB} = 2 \cdot \left( \left( \left( \frac{R}{2} // R \right) + R \right) // \left( \frac{R}{2} // R \right) \right)$$

Calculando:

- 1)  $\left( \frac{R}{2} // R \right) = \frac{\frac{R}{2} \cdot R}{\frac{R}{2} + R} = \frac{R}{3}$
- 2)  $\left( \frac{R}{2} // R \right) + R = \frac{R}{3} + R = \frac{4R}{3}$
- 3)  $\left( \left( \frac{R}{2} // R \right) + R \right) // \left( \frac{R}{2} // R \right) = \frac{\frac{4R}{3} \cdot \frac{R}{3}}{\frac{4R}{3} + \frac{R}{3}} = \frac{4R}{15}$
- 4)  $R_{AB} = 2 \cdot \left( \left( \left( \frac{R}{2} // R \right) + R \right) // \left( \frac{R}{2} // R \right) \right) = \frac{8R}{15}$

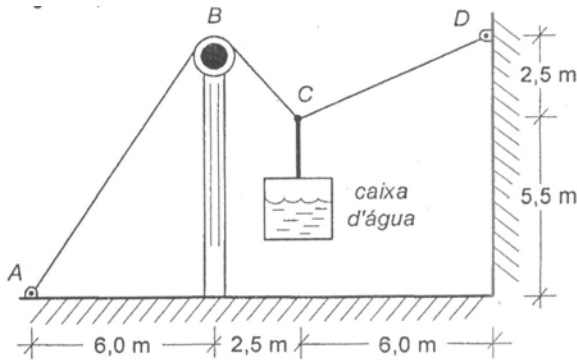
Agora passemos à comparação entre os tempos utilizados no primeiro e no segundo processo para vaporizar a água. Em ambos os casos, a quantidade de calor fornecida deve ser a mesma, bem como a tensão aplicada.

Como a potência é dada por  $P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{U^2}{R}$ , temos que:

$$\frac{R_{AC}}{\Delta t_1} = \frac{R_{AB}}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}R}{20 \text{ min}} = \frac{\frac{8}{15}R}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 16 \text{ min}$$

**QUESTÃO 5**

A figura abaixo mostra uma caixa d'água vazia, com peso de 125 kgf, sustentada por um cabo inextensível e de massa desprezível, fixado nos pontos A e D. A partir de um certo instante, a caixa d'água começa a ser enchida com uma vazão constante de 500 L/h. A roldana em B possui atrito desprezível. Sabendo que o cabo possui seção transversal circular com 1 cm de diâmetro e que admite força de tração por unidade de área de no máximo 750 kgf/cm<sup>2</sup>, determine o tempo de entrada de água na caixa, em minutos, até que o cabo se rompa.



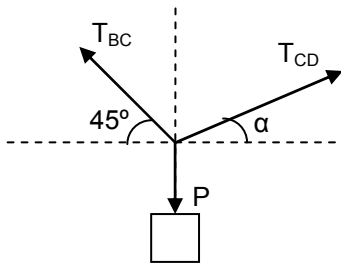
Dado: peso específico da água =  $1000 \text{ kgf/m}^3$ ;  
 $\pi = 3,14$

**Resolução**

O cabo suportará uma tensão máxima de:

$$T_{\text{máx}} = 750 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cdot 3,14 \cdot (0,5\text{cm})^2 = 588,75 \text{ kgf}$$

Analisando o equilíbrio a figura teremos os vetores com os módulos assinalados:



Da figura do enunciado, temos que:

$$\text{tg} \alpha = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} \alpha = \frac{5}{13} \\ \text{cos} \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$$

Na direção horizontal, temos:

$$T_{BC} \cdot \cos 45^\circ = T_{CD} \cdot \cos \alpha \Rightarrow T_{BC} = \frac{12\sqrt{2}}{13} \cdot T_{CD} \quad (1)$$

Na direção vertical, temos:

$$T_{BC} \cdot \text{sen} 45^\circ + T_{CD} \cdot \text{sen} \alpha = P \Rightarrow T_{BC} \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{CD} \frac{5}{13} = P \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$\left( \frac{12\sqrt{2}}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \right) T_{CD} = P \Rightarrow T_{CD} = \frac{13}{17} \cdot P \quad (3)$$

$$T_{BC} = \frac{12\sqrt{2}}{13} \cdot \frac{13}{17} \cdot P \Rightarrow T_{BC} = \frac{12\sqrt{2}}{17} \cdot P \cong 0,998 \cdot P \quad (4)$$

Analisando as equações (3) e (4), obtemos que, a todo momento:

$$P > T_{BC} > T_{CD}$$

Portanto se romperá primeiro o cabo onde está o vetor de módulo P (atinge o limite da resistência primeiro). Teremos no momento do rompimento do cabo  $P + P_A = T_{\text{máx}}$

Logo:

$$125 \text{ kgf} + P_A = 588,75 \text{ kgf} \Rightarrow P_A = 588,75 - 125 = 463,75 \text{ kgf}$$

Assim temos o tempo de enchimento, dado por:

$$463,75 \text{ kgf} \Rightarrow 463,75 L \leftrightarrow \Delta t$$

$$500 L \leftrightarrow 60 \text{ min}$$

$$\Delta t = \frac{463,75}{500} \cdot 60 = 55,65 \text{ min} = 55 \text{ min } 39 \text{ s}$$

**Nota:** O enunciado está impreciso em relação a qual cabo admite força de tração por unidade de área de no máximo  $750 \text{ kgf/cm}^2$ . Caso consideremos apenas o cabo BCD (assumindo que o cabo que sustenta diretamente a caixa d'água seja suficientemente resistente), teremos que o segmento da corda que se romperá será o segmento

BC, pois  $P > T_{BC} > T_{CD}$ . Assim, como  $T_{BC} = \frac{12\sqrt{2}}{17} \cdot P$ , teremos rompimento para:

$$588,75 = \frac{12\sqrt{2}}{17} \cdot P \Rightarrow P = 588,75 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{24} \cong 589,77 \text{ kgf}$$

Logo:

$$125 \text{ kgf} + P_A = 589,77 \text{ kgf} \Rightarrow P_A = 589,77 - 125 = 464,77 \text{ kgf}$$

Assim teríamos o tempo de enchimento, dado por:

$$464,77 \text{ kgf} \Rightarrow 464,77 L \leftrightarrow \Delta t$$

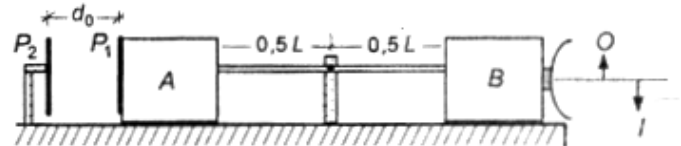
$$500 L \leftrightarrow 60 \text{ min}$$

$$\Delta t = \frac{464,77}{500} \cdot 60 = 55,77 \text{ min} = 55 \text{ min } 46 \text{ s}$$

**QUESTÃO 6**

Em certa experiência, ilustrada na figura abaixo, uma fina barra de latão, de comprimento  $L=8 \text{ m}$ , inicialmente à temperatura de  $20^\circ \text{C}$ , encontra-se fixada pelo ponto médio a um suporte preso à superfície e pelas extremidades a dois cubos idênticos A e B, feitos de material isolante térmico e elétrico. A face esquerda do cubo A está coberta por uma fina placa metálica quadrada  $P_1$ , distante  $d_0 = 5 \text{ cm}$  de uma placa idêntica  $P_2$  fixa, formando um capacitor de  $12 \mu\text{F}$ , carregado com  $9 \mu\text{C}$ . Na face direita do cubo B está fixado um espelho côncavo distante  $11 \text{ cm}$  de um objeto O, cuja imagem I está invertida. Aquece-se a barra até a temperatura T em  $^\circ\text{C}$ , quando então a distância entre O e I se torna igual a 24 cm e a imagem I, ainda invertida, fica com quatro vezes o tamanho do objeto O. Considerando a superfície sob os cubos sem atrito, determine:

- a) a distância focal do espelho;
- b) a tensão elétrica entre as placas ao ser atingida a temperatura T;
- c) a temperatura T.



Dados: coeficiente de dilatação linear do latão ( $\alpha = 1,8 \times 10^{-5} \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ )

**Resolução**

a) Na situação final a imagem é invertida e 4 vezes maior que o objeto.

$$A = \frac{i}{o} = -4 = -\frac{p_2'}{p_2} \Rightarrow p_2' = 4p_2, \text{ sendo que } p_2 \text{ e } p_2' \text{ são ambos positivos}$$

(objeto e imagem reais).

A distância final entre O e I é de 24 cm, com  $p_2' > p_2 > 0$ , já que tanto o objeto quanto a imagem são reais e a imagem está mais distante do espelho do que o objeto. Assim:

$$p_2' - p_2 = 24 \Rightarrow 4p_2 - p_2 = 24 \Rightarrow p_2 = 8 \text{ cm}.$$

$$\text{Então: } p_2' = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}$$

Usando a equação de conjugação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \Rightarrow f = 6,4 \text{ cm}$$

b) Do enunciado temos que  $p_1 = 11 \text{ cm}$ . Como  $p_2 = 8 \text{ cm}$ , então houve um deslocamento de 3 cm, que corresponde à metade da variação de comprimento da barra (pois a barra está fixa por seu ponto médio), ou seja, este deslocamento de 3 cm também ocorrerá do lado esquerdo. Assim a distância final d entre as placas  $P_1$  e  $P_2$  será calculada por:  $d' = d_0 - 3 = 5 - 3 = 2 \text{ cm}$

Como a capacitância é dada por:  $C = \frac{\epsilon A}{d}$ , onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio, A é a área das placas e d é a distância entre elas. Como a área não varia, pois há isolamento térmico, temos que:

$$C_1 d_0 = C_2 d' \Rightarrow (12 \cdot 10^{-6}) \cdot (5 \cdot 10^{-2}) = C_2 \cdot (2 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow$$

$$C_2 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 30 \mu\text{F}. \text{ Portanto, como } Q = C_2 \cdot U_2, \text{ então:}$$

$$9 \cdot 10^{-6} = 30 \cdot 10^{-6} \cdot U_2 \Rightarrow U_2 = 0,3 \text{ V}$$

c) A barra sofreu uma dilatação de 3 cm para cada lado, logo sua dilatação total foi de 6 cm. Assim:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \Rightarrow 6 \cdot 10^{-2} = 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot (T - 20) \Rightarrow$$

$$T = 20 + \frac{1250}{3} \approx 437^\circ \text{C}$$



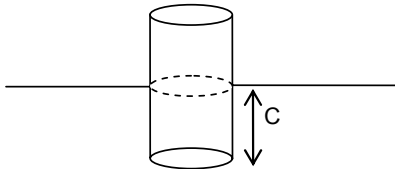
**QUESTÃO 7**

Considere uma pequena bola de gelo de massa  $M$  suspensa por um fio de densidade linear de massa  $\rho$  e comprimento  $L$  à temperatura ambiente. Logo abaixo deste fio, há um copo de altura  $H$  e diâmetro  $D$  boiando na água. Inicialmente o copo está em equilíbrio com um comprimento  $C$  submerso. Este fio é mantido vibrando em sua frequência natural à medida que a bola de gelo derrete e a água cai no copo. Determine a frequência de vibração do fio quando o empuxo for máximo, ou seja, quando o copo perder sua flutuabilidade.

Dados: aceleração da gravidade =  $g$ ;  
massa específica da água =  $\mu$ .

**Resolução**

Para situação inicial, em que o comprimento submerso é  $C$ , temos:

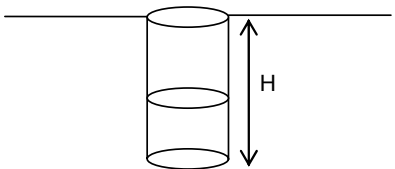


O equilíbrio ocorre para:

$$P_{\text{copo}} = E \Rightarrow m_{\text{copo}} \cdot g = \mu \cdot V_{\text{desloc}} \cdot g \Rightarrow m_{\text{copo}} \cdot g = \mu \cdot \left( \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot C \right) \cdot g \Rightarrow$$

$$m_{\text{copo}} = \mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot C}{4}$$

No final, quando o empuxo for máximo, teremos a situação:



Cujo equilíbrio ocorre para

$$P_{\text{copo}} + P_{\text{água}} = E \Rightarrow (m_{\text{copo}} + m_{\text{água}}) \cdot g = \mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H \cdot g$$

Daí a massa de água (que derreteu) no copo, será:

$$m_{\text{água}} = \mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (H - C)$$

E a massa de gelo restante na bola será:

$$m_{\text{gelo}} = M - m_{\text{água}} = M - \mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (H - C)$$

Através da equação de Taylor, onde a massa de gelo restante está em equilíbrio, temos:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{m_{\text{gelo}} \cdot g}{\rho}}$$

Assumindo que o fio vibra em sua frequência fundamental (primeiro harmônico), temos que:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = (2 \cdot L) \cdot f$$

Substituindo na equação anterior:

$$\sqrt{\frac{M - \mu \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (H - C) \cdot g}{\rho}} = 2 \cdot L \cdot f$$

Portanto a frequência de vibração do fio será:

$$f = \frac{1}{4 \cdot L} \sqrt{\frac{4 \cdot M - \mu \cdot \pi \cdot D^2 \cdot (H - C) \cdot g}{\rho}}$$

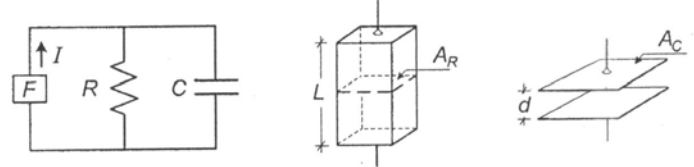
**Nota:** Foi considerado na resolução que a frequência natural de vibração em questão seria a frequência fundamental. Entretanto, as frequências naturais são múltiplos inteiros da frequência fundamental, ou seja,

$$f_n = \frac{n}{4 \cdot L} \sqrt{\frac{4 \cdot M - \mu \cdot \pi \cdot D^2 \cdot (H - C) \cdot g}{\rho}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

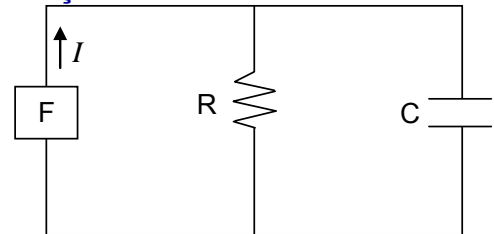
Se tivesse sido especificado qual o harmônico que corresponde à vibração da massa de gelo, poderíamos encontrá-la pela fórmula acima.

**QUESTÃO 8**

O circuito ilustrado na figura representa um dispositivo  $F$  capaz de gerar uma corrente contínua e constante  $I$ , independentemente dos valores da resistência  $R$  e capacitância  $C$ . Este circuito encontra-se sujeito a variações na temperatura ambiente  $\Delta\theta$ . O calor dilata apenas as áreas  $A_C$  das placas do capacitor e  $A_R$  da seção reta do resistor. Considere que não variem com a temperatura a distância  $d$  entre as placas do capacitor, a permissividade  $\epsilon$  do seu dielétrico, o comprimento  $L$  do resistor e sua resistividade  $\rho$ . Determine a relação entre os coeficientes de dilatação superficial  $\beta_C$  das placas do capacitor e  $\beta_R$  da seção reta do resistor, para que a energia armazenada pelo capacitor permaneça constante e independente da variação da temperatura  $\Delta\theta$ . Despreze o efeito Joule no resistor e adote no desenvolvimento que  $(\beta_R \Delta\theta)^2 \ll 1$ .



**Resolução**



A capacitância inicial ( $C_0$ ) é dada por:

$$C_0 = \frac{\epsilon \cdot A_C}{d}$$

A resistência inicial  $R_0$  é expressa por:

$$R_0 = \frac{\rho \cdot L}{A_R}$$

A ddp entre os terminais do resistor ( $U$ ) é dada por:

$$U = Ri$$

Desta forma, a energia eletrostática armazenada nas placas do capacitor, é calculada por:

$$E_{\text{inicial}} = \frac{C_0 \cdot U_0^2}{2} = \frac{C_0 \cdot (R_0 i)^2}{2} = \frac{\epsilon \cdot A_C}{2d} \cdot \left( \frac{\rho L}{A_R} \right)^2 \cdot i^2$$

Após sofrer uma variação de temperatura  $\Delta\theta$ , os novos valores da resistência  $R$ , da capacitância  $C$  e da energia armazenada no capacitor serão:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A_C (1 + \beta_C \Delta\theta)}{d}$$

$$R = \frac{\rho L}{A_R (1 + \beta_R \Delta\theta)}$$

$$E_{\text{final}} = \frac{\epsilon \cdot A_C (1 + \beta_C \Delta\theta)}{2d} \cdot \left( \frac{\rho L}{A_R (1 + \beta_R \Delta\theta)} \right)^2 \cdot i^2$$

Como a energia eletrostática armazenada no capacitor permanece a mesma, temos

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

$$\frac{\epsilon \cdot A_C}{2d} \cdot \left( \frac{\rho L}{A_R} \right)^2 \cdot i^2 = \frac{\epsilon \cdot A_C (1 + \beta_C \Delta\theta)}{2d} \cdot \left( \frac{\rho L}{A_R (1 + \beta_R \Delta\theta)} \right)^2 \cdot i^2$$

$$\frac{(1 + \beta_C \Delta\theta)}{(1 + \beta_R \Delta\theta)^2} = 1$$

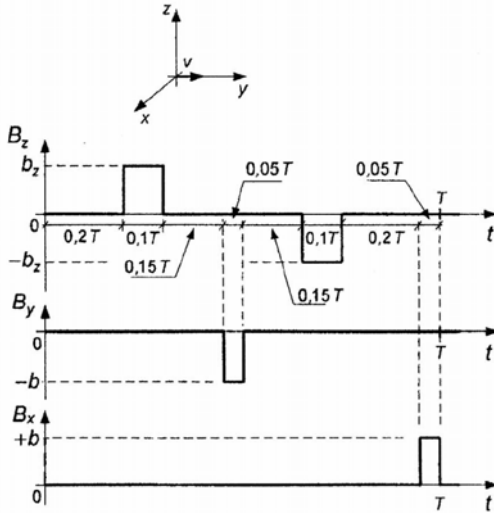
Como  $(\beta_R \Delta\theta)^2 \ll 1$ , então:

$$(1 + \beta_R \Delta\theta)^2 = 1 + 2\beta_R \Delta\theta + (\beta_R \Delta\theta)^2 \approx 1 + 2\beta_R \Delta\theta, \text{ logo:}$$

$$1 = \frac{(1 + \beta_C \Delta\theta)}{(1 + \beta_R \Delta\theta)^2} \approx \frac{1 + \beta_C \Delta\theta}{1 + 2\beta_R \Delta\theta} \Rightarrow \beta_C \approx 2\beta_R$$

**QUESTÃO 9**

Uma partícula com carga elétrica positiva  $q$  e massa  $M$  apresenta velocidade inicial  $v$  na direção  $y$  em  $t = 0$ , de acordo com a figura ao lado. A partícula está submetida a um campo magnético variável e periódico, cujas componentes estão mostradas na figura em função do tempo. Verifica-se que, durante o primeiro pulso da componente  $B_z$ , a partícula realiza uma trajetória de um quarto de circunferência, enquanto que no primeiro pulso da componente  $B_y$  realiza uma trajetória de meia circunferência.

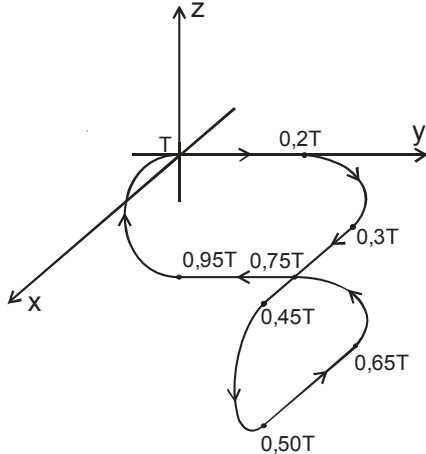


Determine:

- a) o período  $T$  em função de  $M$ ,  $q$  e  $b_z$ ;
- b) a relação  $b/b_z$ ;
- c) o gráfico da componente  $x$  da velocidade da partícula em função do tempo durante um período.

**Resolução**

Inicialmente, traçaremos o gráfico da trajetória percorrida pela partícula:



- a) Considerando que a partícula descreve  $\frac{1}{4}$  de circunferência durante  $0,1T$ , devido a  $B_z$ , temos:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{2} R_1}{0,1T}, \text{ onde } R_1 \text{ é o raio da circunferência descrita pela partícula sob a ação de } B_z.$$

Sabemos que  $R = \frac{Mv}{qb \text{sen}\theta}$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre a velocidade da

partícula e o campo magnético  $B$  (esta equação pode ser facilmente deduzida considerando que a força magnética atua como resultante centrípeta), portanto,

$$v = \frac{\frac{\pi}{2} \left( \frac{Mv}{qb_z \text{sen}90^\circ} \right)}{0,1T} \Rightarrow T = \frac{5\pi \left( \frac{Mv}{qb_z} \right)}{v} \Rightarrow T = \frac{5\pi M}{qb_z}$$

- b)  $B_y$  ( $-b$ ) atua sobre a partícula por um intervalo de  $0,05T$  e provoca uma variação de direção de  $180^\circ$ , enquanto  $B_z$  atuando por um intervalo de  $0,1T$  provoca uma variação de direção de  $90^\circ$ , assim, considerando os raios das circunferências nos dois casos, temos, sob a ação de  $B_z$ :

$$v = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{\frac{\pi R_1}{2}}{0,1T} = \frac{\pi R_2}{0,05T} \Rightarrow R_1 = 4R_2$$

$$\frac{Mv}{qb_z} = 4 \frac{Mv}{qb} \Rightarrow \frac{b}{b_z} = 4$$

c) A componente  $x$  da velocidade dependerá do intervalo considerado, assim:

**De 0 a 0,2T:**

O movimento é no eixo  $y$ , portanto,  $v_x = 0$ ;

**De 0,2T a 0,3T:**

O movimento é um arco de circunferência no plano  $xy$ , portanto,  $v_x$  é uma senóide de amplitude  $v$ ;

**De 0,3T a 0,45T:**

O movimento é na direção do eixo  $x$ , com velocidade  $v$ , assim,  $v_x = v$ ;

**De 0,45T a 0,50T:**

O movimento é paralelo ao plano  $xz$  e é uma semi-circunferência, sendo a velocidade em  $x$  máxima no início ( $v_x = v$ ), zero no meio do intervalo e mínima no final ( $v_x = -v$ ), assim  $v_x$  é uma senóide que passa por estes 3 pontos;

**De 0,50T a 0,65T:**

O movimento é na direção do eixo  $x$ , no sentido decrescente de  $x$ , com velocidade  $v$ , assim,  $v_x = -v$ ;

**De 0,65T a 0,75T:**

O movimento é um arco de circunferência no plano  $xy$ , portanto,  $v_x$  é uma senóide com valor inicial  $-v$  e final zero;

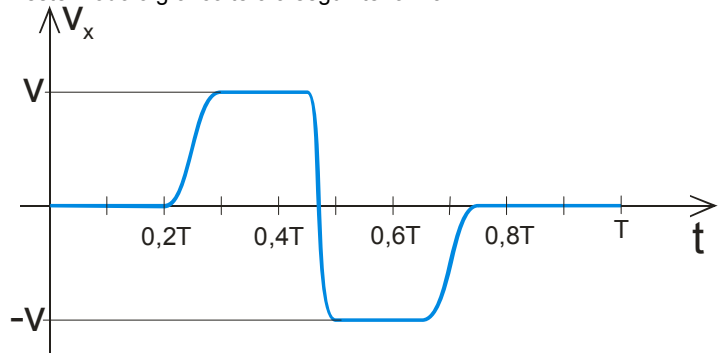
**De 0,75T a 0,95T:**

O movimento é paralelo ao eixo  $y$ , portanto,  $v_x = 0$ ;

**De 0,95T a T:**

O movimento é no plano  $yz$ , portanto,  $v_x = 0$ ;

Deste modo o gráfico terá a seguinte forma:

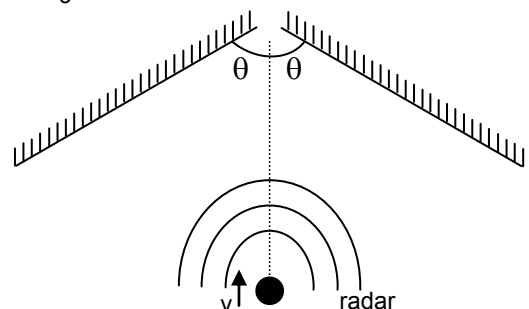


**QUESTÃO 10**

Um radar *Doppler* foi projetado para detectar, simultaneamente, diversos alvos com suas correspondentes velocidades radiais de aproximação. Para isso, ele emite uma onda eletromagnética, uniformemente distribuída em todas as direções e, em seguida, capta os ecos refletidos que retornam ao radar.

Num experimento, o radar é deslocado com velocidade constante  $v$  em direção a um par de espelhos, conforme ilustra a figura abaixo. Calcule os vetores de velocidade relativa (módulo e direção) de aproximação dos quatro alvos simulados que serão detectados pelo radar após as reflexões no conjunto de espelhos, esboçando para cada um dos alvos a trajetória do raio eletromagnético no processo de detecção.

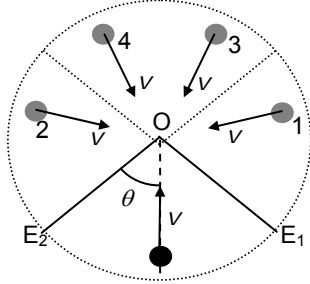
Dado:  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$



**Resolução**

**Observações:**

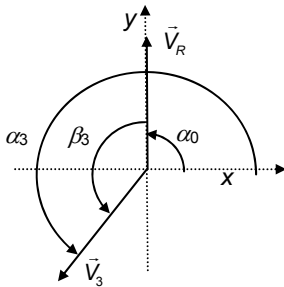
- i) O radar não será capaz de detectar os quatro alvos simulados (imagens).
  - ii) Não há trajetórias possíveis que permitam a detecção simultânea dos quatro alvos pelo radar.
  - iii) O maior número de alvos que poderão ser detectados simultaneamente será três. Essa situação ocorrerá para valores de  $\theta$  muito próximos de  $\pi/4$  e para um radar de dimensões não desprezíveis.
  - iv) A configuração mais comum permitirá a detecção de apenas dois alvos simulados.
- Alvos simulados em cinza e radar em preto. As velocidades têm mesma intensidade,  $V$ , e são concorrentes em  $O$ .



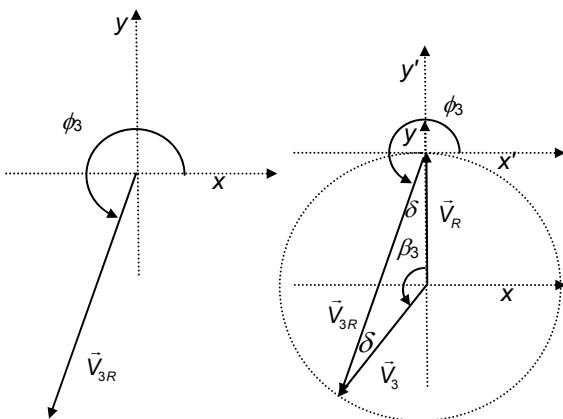
Velocidades	Cálculo de velocidade relativa
	<p>Exemplo: <math>\vec{V}_{1R} = \vec{V}_1 - \vec{V}_{Radar}</math></p>

Ângulo entre o vetor velocidade da imagem e o vetor velocidade do radar:  $\beta_i = \alpha_i - \alpha_0$

Como exemplo geométrico: alvo 3.



Exemplo de cálculo da velocidade relativa, alvo 3:

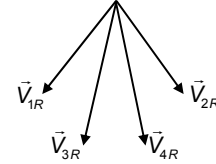


$$2\delta + \beta_3 = \pi \Rightarrow \delta = \frac{\pi - \beta_3}{2}; \phi_i = \frac{3\pi}{2} - \delta \Rightarrow \phi_i = \pi + \frac{\beta_i}{2}$$

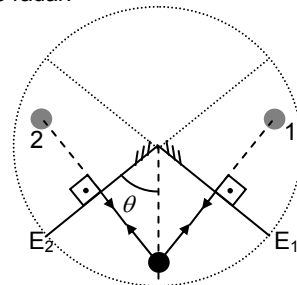
Velocidades relativas (ângulos medidos conforme convenção no ciclo trigonométrico):

$l$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$ \vec{V}_{iR} $	$\phi_i$
1	$\pi/2 + 2\theta$	$2\theta$	$\sqrt{V_R^2 + V_1^2 - 2V_R V_1 \cos 2\theta}$	$\pi + \theta$
2	$\pi/2 - 2\theta$	$-2\theta$	$\sqrt{V_R^2 + V_2^2 - 2V_R V_2 \cos 2\theta}$	$2\pi - \theta$
3	$\pi/2 - 4\theta$	$4\theta$	$\sqrt{V_R^2 + V_3^2 - 2V_R V_3 \cos 4\theta}$	$\pi + 2\theta$
4	$\pi/2 + 4\theta$	$-4\theta$	$\sqrt{V_R^2 + V_4^2 - 2V_R V_4 \cos 4\theta}$	$2\pi - 2\theta$

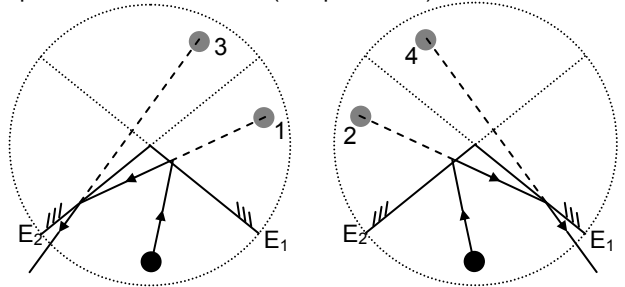
Representação geométrica



Trajetórias dos raios eletromagnéticos relativos aos alvos que podem ser percebidos pelo radar:



Trajetórias dos raios eletromagnéticos que permitem percepção de alvos por outros observadores (não pelo radar)



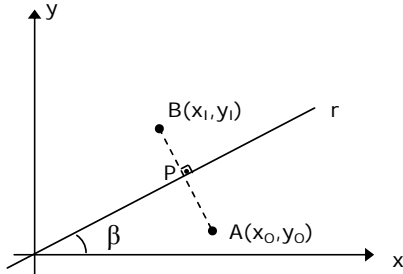


## Resolução Alternativa

### Base Teórica

#### Matriz de Reflexão

Considere uma reta  $r$  passando pela origem do plano cartesiano, formando um ângulo  $\beta$  com o eixo  $x$ , como indicado na figura. Queremos determinar a imagem de um ponto de coordenadas  $(x_0, y_0)$  do plano mediante reflexão especular através da reta  $r$ . Ou seja, se  $r$  fosse um espelho e tivéssemos um objeto puntiforme localizado no ponto  $(x_0, y_0)$ , onde estaria localizada a imagem  $(x_i, y_i)$  refletida desse objeto pelo espelho?



Procedemos da seguinte maneira: Sejam A e B os pontos onde estão localizados o objeto e a imagem, respectivamente, e seja P o ponto de intersecção do segmento AB com a reta  $r$ . Como o segmento AB é perpendicular à reta  $r$ , seus coeficientes angulares estão relacionados por:

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\text{tg } \beta} = -\text{cotg } \beta$$

Portanto, a reta suporte do segmento AB tem por equação:

$$y - y_0 = m_{AB} \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = y_0 - \text{cotg } \beta \cdot (x - x_0)$$

O ponto P, sendo a intersecção da reta suporte do segmento AB com a reta  $r$ , é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \text{tg } \beta \cdot x \\ y = y_0 - \text{cotg } \beta \cdot (x - x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p = (\cos^2 \beta) \cdot x_0 + (\text{sen } \beta \cdot \cos \beta) \cdot y_0 \\ y_p = (\text{sen } \beta \cdot \cos \beta) \cdot x_0 + (\text{sen}^2 \beta) \cdot y_0 \end{cases}$$

Agora, como A e B são equidistante do espelho, P é ponto médio do segmento AB, portanto:

$$\begin{cases} x_p = \frac{x_0 + x_i}{2} \\ y_p = \frac{y_0 + y_i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = (2 \cdot \cos^2 \beta - 1) \cdot x_0 + (2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta) \cdot y_0 \\ y_i = (2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta) \cdot x_0 + (2 \cdot \text{sen}^2 \beta - 1) \cdot y_0 \end{cases}$$

Finalmente, usando as identidades trigonométricas de arco duplo e colocando o sistema acima sob a forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \text{sen } 2\beta \\ \text{sen } 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

A matriz quadrada  $\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \text{sen } 2\beta \\ \text{sen } 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$  é chamada **matriz de reflexão**

ao longo da reta  $r$ .

De posse dessa matriz, passemos à resolução da questão propriamente dita:

### Resolução

O espelhos fazem ângulos de  $(270^\circ + \theta)$  e  $(270^\circ - \theta)$  com o eixo  $x$ . O vetor velocidade do objeto (radar) que se aproxima do espelho é  $(0, v)$ , já que o movimento se dá exclusivamente na direção vertical, no sentido positivo do eixo  $y$ . Assim, as duas primeiras imagens obtidas pela reflexão do objeto por cada um dos espelhos têm velocidades vetoriais dadas por:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) & \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \\ \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) & -\cos 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) & \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \\ \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) & -\cos 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

As outras duas imagens serão obtidas refletindo essas duas primeiras imagens:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \cos 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) & \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \\ \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) & -\cos 2\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot \text{sen } 4\theta \\ v \cdot \cos 4\theta \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 4\theta \\ \cos 4\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} \cos 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) & \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \\ \text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) & -\cos 2\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \cdot \text{sen } 4\theta \\ v \cdot \cos 4\theta \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 4\theta \\ \cos 4\theta \end{bmatrix}$$

As velocidades relativas em questão são dadas por:

$$\vec{v}_{1R} = \vec{v}_1 - \vec{v}_R = \begin{bmatrix} -v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 2\theta \\ \cos 2\theta - 1 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 2\theta \\ -2 \cdot \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{2R} = \vec{v}_2 - \vec{v}_R = \begin{bmatrix} v \cdot \text{sen } 2\theta \\ v \cdot \cos 2\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 2\theta \\ \cos 2\theta - 1 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 2\theta \\ -2 \cdot \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{3R} = \vec{v}_3 - \vec{v}_R = \begin{bmatrix} v \cdot \text{sen } 4\theta \\ v \cdot \cos 4\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 4\theta \\ \cos 4\theta - 1 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } 4\theta \\ -2 \cdot \text{sen}^2 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{4R} = \vec{v}_4 - \vec{v}_R = \begin{bmatrix} -v \cdot \text{sen } 4\theta \\ v \cdot \cos 4\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 4\theta \\ \cos 4\theta - 1 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -\text{sen } 4\theta \\ -2 \cdot \text{sen}^2 2\theta \end{bmatrix}$$

(Aqui foram usadas as identidades trigonométricas:  $\cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \theta$  e  $\cos 4\theta = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 2\theta$ )

Então:

$$|\vec{v}_{1R}| = |\vec{v}_{2R}| = \sqrt{v^2 \cdot (\mp \text{sen}^2 2\theta) + v^2 \cdot (-2 \cdot \text{sen}^2 \theta)^2} = 2 \cdot v \cdot \text{sen } \theta$$

$$|\vec{v}_{3R}| = |\vec{v}_{4R}| = \sqrt{v^2 \cdot (\pm \text{sen}^2 4\theta) + v^2 \cdot (-2 \cdot \text{sen}^2 2\theta)^2} = 2 \cdot v \cdot \text{sen } 2\theta$$

Agora, observe que, como  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{2\pi}{3}$ , e também

$\pi < 4\theta < \frac{4\pi}{3}$ , de modo que:  $\text{sen } 4\theta < 0 < \text{sen } 2\theta$ . Portanto, os vetores

$\vec{v}_{1R}$  e  $\vec{v}_{3R}$  estão no 3º quadrante, já que têm ambas as coordenadas negativas, enquanto os vetores  $\vec{v}_{2R}$  e  $\vec{v}_{4R}$  estão no 4º quadrante, pois têm abscissa positiva e ordenada negativa.

Logo, as direções são dadas por:

$$\text{tg } \phi_1 = \frac{-2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{-\text{sen } 2\theta} = \text{tg } \theta \Rightarrow \phi_1 = \pi + \theta$$

$$\text{tg } \phi_2 = \frac{-2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } 2\theta} = -\text{tg } \theta \Rightarrow \phi_2 = -\theta \text{ (ou } 2\pi - \theta \text{, se preferir)}$$

$$\text{tg } \phi_3 = \frac{-2 \cdot \text{sen}^2 2\theta}{\text{sen } 4\theta} = -\text{tg } 2\theta \Rightarrow \phi_3 = -2\theta \text{ (ou } 2\pi - 2\theta \text{, se preferir)}$$

$$\text{tg } \phi_4 = \frac{-2 \cdot \text{sen}^2 2\theta}{-\text{sen } 4\theta} = \text{tg } 2\theta \Rightarrow \phi_4 = \pi + 2\theta$$