ELITE PRÉ-VESTIBULAR
campinas

ELITE RESOLVE

IME 2007

Física

www.elitecampinas.com.br
(19) 3251 1012

FÍSICA

QUESTÃO 1

No instante t = 0, uma fonte sonora que gera um tom com freqüência 500 Hz é arremessada verticalmente do solo com velocidade inicial 40 m/s. Pede-se:

a) a maior e a menor freqüência do som ouvido por um observador estacionário situado muito próximo do local do arremesso;

b) um esboço do gráfico da freqüência ouvida pelo observador em função do tempo após o lançamento para 0 < t < 10 s.

Dados: aceleração da gravidade (g) = 10 m/s^2
velocidade do som (v_s) = 340 m/s

Obs.: despreze o atrito da fonte sonora com o ar e suponha que a fonte permaneça imóvel após atingir o solo.

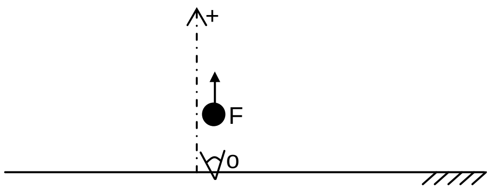
Resolução

a) As variações de freqüência são devidas ao efeito Doppler, assim:

- A **menor freqüência** é percebida no afastamento da fonte, no instante t=0 , em que a velocidade é máxima. Logo:

$$\frac{f_O}{V_S \pm V_O} = \frac{f_F}{V_S \pm V_F}$$

O sinal correto é determinado pela convenção de sinais da figura abaixo:



Assim:

$$\frac{f_O}{340+0} = \frac{500}{340+40} \Rightarrow f_O = \frac{340.500}{380} \Rightarrow f_O = 447 \text{ Hz}$$

- A **maior freqüência** é percebida na aproximação da fonte, no ponto onde a velocidade é máxima (no retorno da fonte à origem).

Sabendo que metade do tempo total é o tempo para a fonte chegar na altura máxima, onde a velocidade é nula, temos:

$v_{1/2} = v_0 - g.t_{1/2} \Rightarrow 0 = 40 - 10.t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2}=4s \Rightarrow t_{total}=8s$

Neste ponto o módulo da velocidade é igual ao da velocidade inicial, no sentido contrário.

$$\frac{f_O}{340+0} = \frac{500}{340-40} \Rightarrow f_O = \frac{340.500}{300} \Rightarrow f_O = 567 \text{ Hz}$$

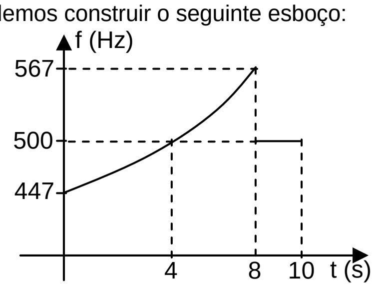
b) A fonte sonora se move num MUV, então sua velocidade é dada pela expressão:

$$V_F(t) = \text{40-10.t}$$

Assim:

$$\frac{f_O}{340+0} = \frac{500}{340+(\text{40-10.t})} \Rightarrow f_O = \frac{34.500}{\text{38-t}}$$

A partir daí, podemos construir o seguinte esboço:

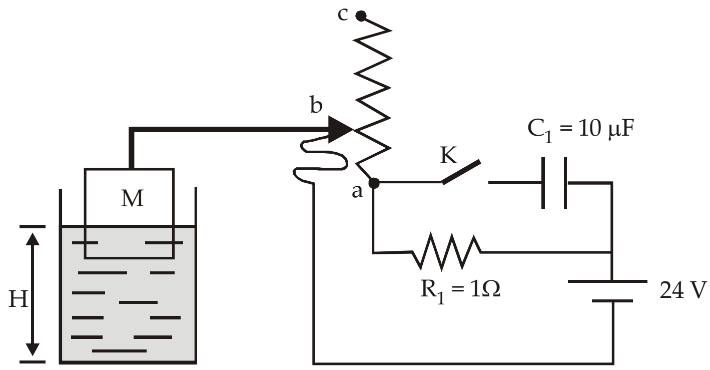


QUESTÃO 2

A figura ilustra um bloco M de madeira com formato cúbico, parcialmente submerso em água, ao qual está fixado um cursor metálico conectado a um circuito elétrico. Na situação inicial, a face do fundo do bloco se encontra a 48 cm da superfície da água, a chave K está aberta e o capacitor C_1 descarregado. O comprimento do fio resistivo entre a posição b do cursor metálico e o ponto a é 10 cm. A potência dissipada no resistor R_1 é 16 W.

Em determinado instante, a água é substituída por outro líquido mais denso, mantendo-se constante o nível H da coluna de água inicialmente existente. Fecha-se a chave K e observa-se que, após um longo intervalo de tempo, a energia armazenada em C_1 se estabiliza em 28,8 μJ. Considerando que a resistência por unidade de comprimento do fio resistivo é constante, determine a massa específica do líquido que substituiu a água.

Dados: aceleração da gravidade (g) = 10 m/s^2;
massa específica da água (μ_a) = 1 g/cm^3.



Resolução

Na primeira situação, com o tanque preenchido com água e a chave K aberta, temos um circuito com a fonte (E = 24 V) e dois resistores ($R_1 = 1\Omega$ e R_{ab}) associados em série. A corrente que percorre esse circuito é dada a partir da potência dissipada em 1:

$$Pot_1 = R_1 \cdot i_1^2 \Rightarrow 16 = 1 \cdot i_1^2 \Rightarrow i_1 = 4A\ .$$

Então, a resistência R_{ab} pode ser determinada por:

$$E = (R_1 + R_{ab}) \cdot i_1 \Rightarrow 24 = (1 + R_{ab}) \cdot 4 \Rightarrow R_{ab} = 5\Omega$$

Agora vamos substituir a água pelo líquido mais denso e fechar a chave K. Após um longo intervalo de tempo, quando o capacitor já estiver totalmente carregado, não haverá mais corrente passando através dele, e novamente teremos um circuito com a fonte e dois resistores ($R_1 = 1\Omega$ e R_{ab}') associados em série, onde R_{ab}' é a nova resistência determinada pelo cursor metálico.

Como o capacitor está em paralelo com o resistor R_1, ambos estarão submetidos à mesma diferença de potencial, que pode ser calculada pela energia acumulada no capacitor:

$$E = \frac{C \cdot U^2}{2} \Rightarrow 28{,}8 \cdot 10^{-6} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot U^2}{2} \Rightarrow U = 2{,}4V$$

Portanto, a nova corrente no circuito é calculada por:

$$U = R_1 \cdot i \Rightarrow 2{,}4 = 1 \cdot i \Rightarrow i = 2{,}4A$$

Assim, determinamos R:

$$E = (R_{ab}' + R_1) \cdot i \Rightarrow 24 = (R_{ab}' + 1) \cdot 2{,}4 \Rightarrow R_{ab}' = 9\Omega$$

Usando a informação do enunciado que a resistência por unidade de comprimento é constante, vem que:

$$\frac{R_{ab}}{\ell} = \frac{R_{ab}'}{\ell'} \Rightarrow \frac{5}{0{,}1} = \frac{9}{\ell'} \Rightarrow \ell' = 0{,}18\text{m}$$

Agora, analisando o empuxo em cada situação, observamos que em ambos os casos o empuxo deve equilibrar o peso do bloco. Como o peso do bloco não muda, os empuxos nas duas situações devem ser de mesma intensidade:

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \Rightarrow V_1 \cdot \rho_A \cdot |\vec{g}| = V_2 \cdot \rho_L \cdot |\vec{g}|$, onde ρ_A e ρ_L são respectivamente as densidades da água e do líquido mais denso. Chamando de S área da base do bloco e de h_1 e h_2 as alturas da parte submersa nas situações anterior e posterior respectivamente, temos:

$$(S \cdot h_1) \cdot \rho_A \cdot |\vec{g}| = (S \cdot h_2) \cdot \rho_L \cdot |\vec{g}| \Rightarrow \rho_L = \frac{h_1}{h_2} \cdot \rho_A$$

Para determinar a nova altura h_2 do cilindro, fazemos:

$$h_1 - h_2 = \ell' - \ell \Rightarrow 0{,}48 - h_2 = 0{,}18 - 0{,}10 \Rightarrow h_2 = 0{,}4\text{m}$$

Então, finalmente, $\rho_L = \frac{0{,}48}{0{,}4} \cdot 1{,}0 = 1{,}2 g/cm^3$

QUESTÃO 3

Um pequeno corpo é abandonado com velocidade inicial nula no ponto A de uma rampa, conforme ilustra a Figura 1. No instante em que esse corpo passa pelo ponto P, um dispositivo provoca o fechamento da chave S1 do circuito elétrico apresentado na Figura 2.

No instante em que o resistor R_1 desse circuito atinge o consumo de 0,05 W.h, um percussor é disparado, perpendicularmente ao trecho B-C, com o objetivo de atingir o corpo mencionado. Sabe-se que ao percorrer a distância *d* mostrada na Figura 1, o corpo tem sua velocidade reduzida a 1/3 da alcançada no ponto B. Considerando que os trechos A-B e P-C não possuem atrito e que o corpo permanece em contato com o solo até o choque, determine o ângulo de inclinação θ da rampa para que o corpo seja atingido pelo percussor.

Dado: aceleração da gravidade (g) = 10 m/s^2.

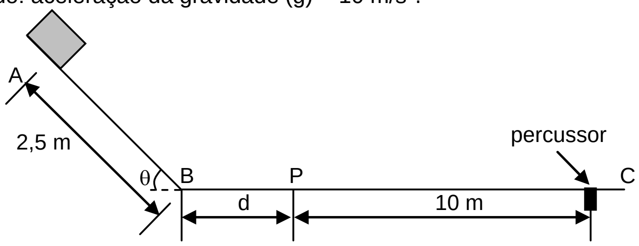


Figura 1

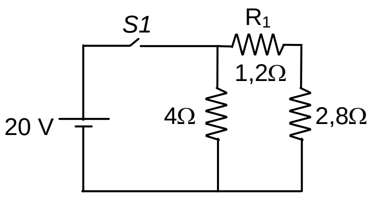


Figura 2

Resolução

No circuito, a resistência equivalente será

$$R_{EQ} = \frac{4\cdot(1,2+2,8)}{4+(1,2+2,8)} = 2\Omega$$

Ao fecharmos a chave S_1, a corrente que aparece no circuito é $i = \frac{E}{R_{EQ}} = \frac{20}{2} = 10A$. Como ambos os trechos em paralelo no circuito possuem uma resistência igual (4Ω), a corrente será dividida igualmente entre os dois trechos, ou seja, cada resistor é percorrido por uma corrente de $5A$. Logo, a potência dissipada no resistor de $1,2\Omega$ é

$$Pot = R\cdot\left(\frac{i}{2}\right)^2 = 1,2\cdot 5^2 = 30W$$

O tempo decorrido para que este resistor dissipe os $0,05W\cdot h$ é:

$$Pot = \frac{E_{DISSIP}}{\Delta t} \Rightarrow 30W = \frac{0,05W\cdot h}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{600}h = \frac{1}{600}\cdot 3600s = 6s$$

Durante esse intervalo de tempo de 6 s o corpo deve percorrer o trecho PC, ou seja, deve percorrer 10 m.

Assim, a velocidade no trecho PC é:

$V_{PC} = \frac{PC}{\Delta t} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} m/s$. Como $\frac{v_{PC}}{v_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_B = 3\cdot v_{PC} = 5\ {}^{m}\!/\!_{s}$

Ou seja, partindo do repouso em A, o corpo acelera até o ponto B atingindo nesse ponto uma velocidade de 5 m/s.

Para descobrir a aceleração no trecho AB, vamos impor que a força resultante no plano inclinado sem atrito é a componente do peso na direção da rampa:

$$|\vec{F}_{RES}| = |\vec{P}|\cdot \text{sen}\theta \Rightarrow m\cdot|\vec{a}| = m\cdot|\vec{g}|\cdot\text{sen}\theta \Rightarrow |\vec{a}| = |g|\cdot\text{sen}\theta$$

Como o movimento no trecho AB é uniformemente variado (aceleração constante), da equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta s \Rightarrow 5^2 = 0^2 + 2\cdot(10\cdot\text{sen}\theta)\cdot 2,5 \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$$

QUESTÃO 4

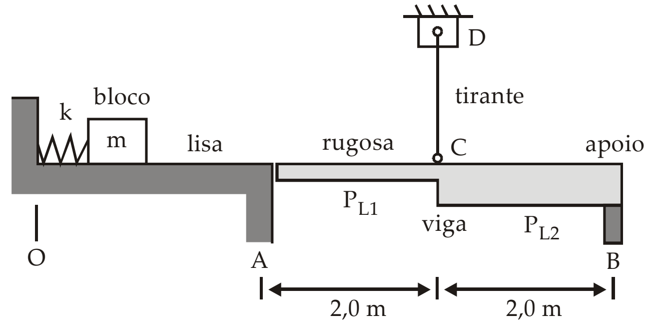
Uma mola com constante elástica k, presa somente a uma parede vertical, encontra-se inicialmente comprimida em 10 cm por um bloco de massa m = 4 kg, conforme apresenta a figura abaixo. O bloco é liberado e percorre uma superfície horizontal lisa OA sem atrito. Em seguida, o bloco percorre, até atingir o repouso, parte da superfície rugosa de uma viga com 4 m de comprimento, feita de material uniforme e homogêneo, com o perfil mostrado na figura. Sabendo que a força normal por unidade de área no tirante CD de seção reta 10 mm^2 é de 15 MPa na posição de repouso do bloco sobre a viga, determine o valor da constante elástica k da mola.

Dados: pesos por unidade de comprimento da viga (P_{L1}) = 20 N/m e (P_{L2}) = 40 N/m; coeficiente de atrito cinético (μ_c) = 0,50;

aceleração da gravidade (g) = 10 m/s^2;

1 Pa = 10^5 N/m^2.

Obs.: o tirante não prejudica o movimento do bloco.



Resolução

NOTA: Há um erro no enunciado desta questão que pode ter prejudicado muitos candidatos, o qual consistiu em afirmar que 1 Pa = 10^5 N/m^2, quando o correto seria 1Pa = 1N/m^2.

Utilizando-se a informação correta, temos:

Peso do bloco: $|\vec{P}| = m\cdot|\vec{g}| = 4\cdot 10 = 40N$

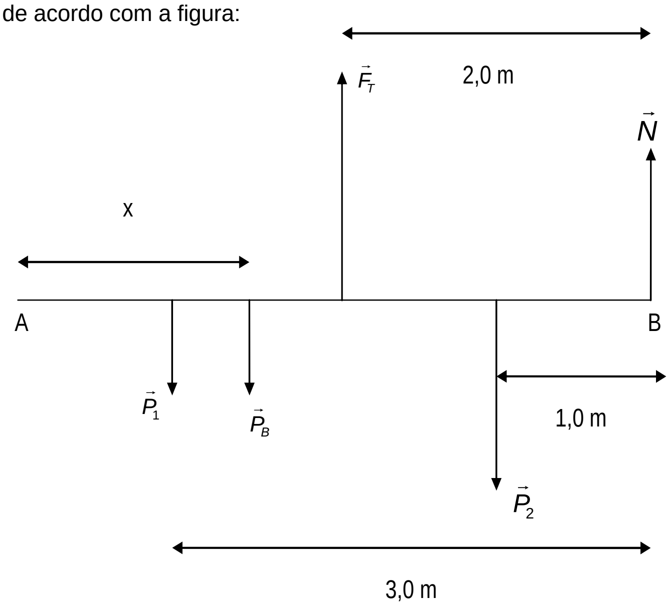
Na posição de equilíbrio do bloco, a força aplicada pelo tirante CD vale: $|\vec{F}_T| = p\cdot A = (15\cdot 10^6)\cdot(10\cdot 10^{-6}) = 150N$

Chamando de $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ os pesos das vigas dos lados esquerdo e direito respectivamente, temos:

$$|\vec{P}_1| = 20\frac{N}{m}\cdot 2m = 40N$$

$$|\vec{P}_2| = 40\frac{N}{m}\cdot 2m = 80N$$

Seja x a distância percorrida pelo bloco a partir do ponto A até parar, de acordo com a figura:



Impondo o equilíbrio dos torques em relação ao ponto B, temos:

$$|\vec{P}_1|\cdot 3 + |\vec{P}_B|\cdot(4-x) + |\vec{P}_2|\cdot 1 = |\vec{F}_T|\cdot 2 + |\vec{N}|\cdot 0 \Rightarrow$$

$$40\cdot 3+40\cdot(4-x)+80\cdot 1=150\cdot 2\Rightarrow x=1{,}5m$$

Durante o movimento do bloco ao longo desses 1,5 m na superfície rugosa da viga, a desaceleração a que ele está submetido é:

$$\vec{F}_{RES}=\vec{F}_{AT}\Rightarrow m\,|\,\vec{a}\,|=\mu\cdot m\cdot|\,\vec{g}\,|\Rightarrow|\,\vec{a}\,|=0{,}5\cdot 10=5m/s^2$$

Pela equação de Torricelli: $v^2={v_0}^2+2\cdot a\cdot\Delta s\Rightarrow$

$$0^2={v_0}^2+2\cdot(-5)\cdot 1{,}5\Rightarrow {v_0}^2=15(m^2/s^2)$$

Impondo a conservação da energia mecânica no trecho liso:

$$E_O=E_A\Rightarrow E_{ELÁSTICA}=E_{CINÉTICA}\Rightarrow\frac{k\cdot x_{mola}^2}{2}=\frac{m\cdot {v_0}^2}{2}$$

$$k\cdot(0{,}1)^2=4\cdot 15\Rightarrow k=6\cdot 10^3N/m$$

QUESTÃO 5

A figura 1 ilustra uma bateria, modelada através de uma fonte de tensão elétrica V_F em série com um resistor R_S, conectado a um voltímetro V, cuja leitura indica 24 V. Essa bateria é ligada em série com o amperímetro A e com um circuito composto por uma resistência de aquecimento R_A em paralelo com uma resistência R_B, conforme mostra a Figura 2. A resistência R_A encontra-se imersa em 0,2 L de um líquido com massa específica de 1,2 g/cm^3.
Inicialmente, as chaves S1 e S2 da Figura 2 encontram-se abertas. A chave S1 é acionada. Observa-se que o amperímetro indica 2A e que a temperatura do líquido se eleva de 10 °C para 40 °C em 30 minutos. Em seguida, a chave S2 é fechada e o amperímetro passa a indicar 2,4 A. Considerando que não exista perda de energia no aquecimento da água e que o voltímetro e o amperímetro sejam ideais, determine:
a) a resistência R_A em ohms;
b) a resistência R_S em ohms;
c) a resistência R_B em oms.
Dados:
calor específico do líquido (c) = 2 cal/(g .°C); 1 cal ≅ 4 J

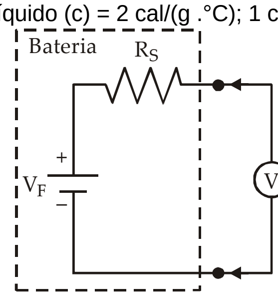


Figura 1

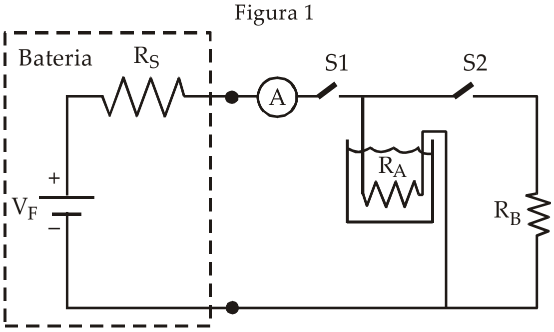


Figura 2

Resolução

a) Quando colocamos o voltímetro nos extremos da bateria, não haverá corrente circulando, pois o voltímetro é ideal (resistência infinita). Assim, a indicação do voltímetro é a fem (E) da bateria, já que não haverá queda de tensão na resistência interna.
Logo, $E=24V$.

A densidade do líquido é: $\rho_L=1{,}2g/cm^3=1{,}2kg/L$

A massa nesse caso é dada por: $m=\rho\cdot V=1{,}2\cdot 0{,}2=0{,}24kg$

O calor específico sensível do líquido é:

$$c=2\frac{cal}{g\cdot°C}=2\frac{4J}{10^{-3}kg\cdot°C}=8\cdot 10^3\frac{J}{kg\cdot°C}$$

O calor necessário para elevar a temperatura do líquido de 10ºC para 40ºC é:

$$Q=m\cdot c\cdot\Delta\theta=0{,}24\cdot 8\cdot 10^3\cdot(40-10)=57{,}6\cdot 10^3J$$

Desse modo, a potência que o resistor R_A irá dissipar é:

$$Pot=\frac{Q}{\Delta t}=\frac{57{,}6\cdot 10^3J}{30\cdot 60s}=32W$$

Quando a chave é S_1 fechada, a corrente que passa pelo amperímetro (i_0 = 2A) é a mesma corrente que passa pelo resistor R_A. Logo:

$$Pot=R_A\cdot {i_0}^2\Rightarrow 32=R_A\cdot 2^2\Rightarrow R_A=8\Omega$$

b) Estando S_1 fechada e S_2 ainda aberta, temos que:
$E=(R_S+R_A)\cdot i_0\Rightarrow 24=(R_S+8)\cdot 2\Rightarrow R_S=4\Omega$

c) Quando fechamos a segunda chave (S_2), ou seja, estando ambas as chaves (S_1 e S_2) fechadas, teremos um circuito onde o resistor S_2 é percorrido pela nova corrente total i = 2,4 A, e esta se divide em duas partes i_A e i_B, que percorrem respectivamente os resistores R_A e R_B (com $i_A+i_B=i$).

Estando os resistores R_A e R_B em paralelo, ambos estão submetidos à mesma diferença de potencial, que vale:

$$U_A=U_B=E-R_S\cdot i=24-4\cdot 2{,}4=14{,}4V$$

Assim, $U_A=R_A\cdot i_A\Rightarrow 14{,}4=8\cdot i_A\Rightarrow i_A=1{,}8A$

Em R_B, temos: $i_B=i-i_A=2{,}4-1{,}8=0{,}6A$,e portanto:

$$U_B=R_B\cdot i_B\Rightarrow 14{,}4=R_B\cdot 0{,}6\Rightarrow R_B=24\Omega$$

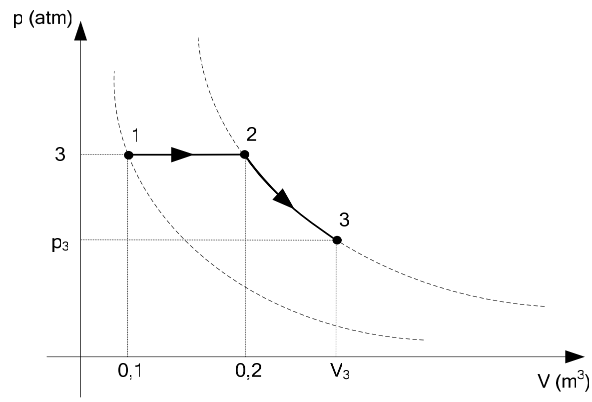
QUESTÃO 6

Uma massa *m* de ar, inicialmente a uma pressão de 3 atm, ocupa 0,1 m^3 em um balão. Este gás é expandido isobaricamente até um volume de 0,2 m^3 e, em seguida, ocorre uma nova expansão através de um processo isotérmico, sendo o trabalho realizado pelo gás durante esta última expansão igual a 66000 J. Determine
a) o trabalho total realizado em joules pelo gás durante todo o processo de expansão;
b) o calor total associado às duas expansões, interpretando fisicamente o sinal desta grandeza.

Dados: $1\,\text{atm}=1\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$; $1\,\text{kgf}=10\,\text{N}$; $\gamma=\frac{C_p}{C_v}=1{,}4$

Obs.: suponha que o ar nestas condições possa ser considerado como gás ideal.

Resolução



a) O trabalho total realizado durante todo o processo de expansão será dado por $\tau_{total}=\tau_{12}+\tau_{23}$
onde:
τ_{12} é o trabalho da transformação isobárica;
τ_{23} é o trabalho da transformação isotérmica.
Logo:

$$\tau_{12}=\text{P}.\Delta\text{V}=3\,\text{atm}\cdot 0{,}1\,\text{m}^3=3\cdot 10^5\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 0{,}1\,\text{m}^3\Rightarrow\tau_{12}=30\,\text{kJ}$$

Considerando τ_{23} = 66 kJ (do enunciado), temos

$$\tau_{total}=30+66\Rightarrow\tau_{total}=96\,\text{kJ}$$

b) O calor total trocado durante todo o processo de expansão será dado por $Q_{total}=Q_{12}+Q_{23}$
onde:
Q_{12} é o calor trocado na transformação isobárica;

Q_{23} é o calor trocado na transformação isotérmica.
Logo:

$$Q_{12} = n \cdot C_p \cdot \Delta T$$

Do gráfico temos:

$$\begin{cases} P_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1 \\ P_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } P_1 = P_2 \Rightarrow \Delta T = \frac{P \cdot \Delta V}{n \cdot R}$$

Considerando $C_p - C_v = R$:

$$Q_{12} = n \cdot C_p \cdot \frac{P \cdot \Delta V}{n \cdot R} = n \cdot C_p \cdot \frac{P \cdot \Delta V}{n \cdot (C_p - C_v)} \Rightarrow$$

$$Q_{12} = n \cdot C_p \cdot \frac{P \cdot \Delta V}{n \cdot C_p \cdot \left(1 - \frac{C_v}{C_p}\right)} \Rightarrow Q_{12} = \frac{P \cdot \Delta V}{\left(1 - \frac{C_v}{C_p}\right)} = \frac{30 \text{ kJ}}{\left(1 - \frac{1}{1{,}4}\right)}$$

$$Q_{12} = 105 \text{ kJ}$$

Como no processo 2-3 não temos alteração da energia interna, pela 1ª. lei da termodinâmica:

$$Q_{23} = \tau_{23} \Rightarrow Q_{23} = 66 \text{ kJ}$$

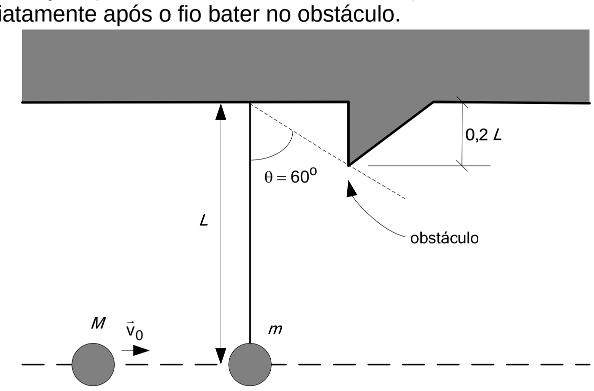
Então o calor total trocado será:

$$Q_{total} = 105 + 66 \Rightarrow Q_{total} = +\ 171 \text{ kJ}$$

O **sinal positivo** do calor total informa que neste processo de expansão a massa de ar contida no balão, **recebeu** calor do meio externo.

QUESTÃO 7

Um pêndulo com comprimento L = 1 m, inicialmente em repouso, sustente uma partícula com massa m = 1 kg. Uma segunda partícula com massa M = 1 kg movimenta-sena direção horizontal com velocidade constante v_0 até realizar um choque perfeitamente inelástico com a primeira. Em função do choque, o pêndulo entra em movimento e atinge um obstáculo, conforme ilustrado na figura. Observa-se que a maior altura alcançada pela partícula sustentada pelo pêndulo é a mesma do ponto inferior do obstáculo. O fio pendular possui massa desprezível e permanece sempre esticado. Considerando a aceleração da gravidade g = 10 m/s^2 e a resistência do ar desprezível, determine:
a) a velocidade v_0 da partícula com massa M antes do choque
b) a força que o fio exerce sobre a partícula de massa m imediatamente após o fio bater no obstáculo.



Resolução

a) Como o choque é perfeitamente inelástico, a partícula ficará "colada" ao pêndulo após a colisão, assim:

$$Mv_0 + m.0 = (M+m)v_1$$

onde v_1 é a velocidade do conjunto imediatamente após o choque. Como M = m = 1 kg, logo:

$$v_1 = v_0/2 \quad \text{(I)}$$

Pela conservação de energia:

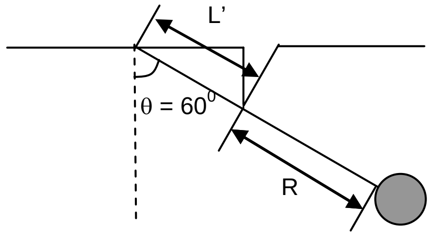
$$E_{c1} = E_{p2}$$

onde 1 é o momento imediatamente após o choque e 2 é o instante em que o conjunto atinge a altura máxima. Assim, substituindo os valores:

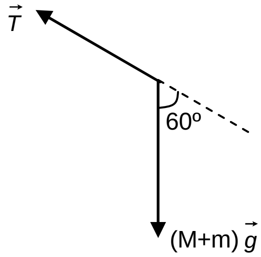
$$\frac{(M+m)v_1^2}{2} = (M+m)g(L - 0{,}2L) \Rightarrow v_1^2 = 1{,}6gL \Rightarrow v_1 = 4\ m/s \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I): **v_0 = 8 m/s.**

b) Logo após bater no obstáculo, temos um movimento circular de raio R, como ilustra a figura:



Na figura, temos: L'cos60º = 0,2L ⇒ L'= 0,4L, logo:
R = L – 0,4L = 0,6L
Montando o diagrama de forças para a situação dada, temos:



Da figura, vem:

$$T - (M+m)g.\cos 60^o = R_{cp} = \frac{(M+m)v_2^2}{R} \Rightarrow$$

$$T = (M+m)\left(\frac{v_2^2}{R} + \frac{g}{2}\right) \quad \text{(III)}$$

Mas v_2 pode ser calculado pela conservação de energia entre os instantes 1 e 2:

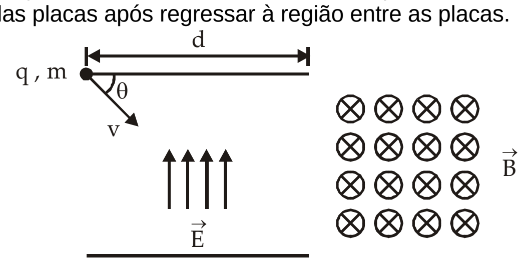
$$\frac{(M+m)v_1^2}{2} = \frac{(M+m)v_2^2}{2} + (M+m)g(L - L\cos 60^0) \Rightarrow$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{gL}{2} \Rightarrow v_2^2 = 16 - 10 = 6 \text{ (m/s)}^2 \quad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV): $T = 2\left(\frac{6}{0{,}6} + 5\right)(N) \Rightarrow$ **T = 30N**

QUESTÃO 8

Uma partícula de massa m e carga elétrica q é arremessada com velocidade escalar v numa região entre duas placas de comprimento d, onde existe um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, conforme ilustra figura. Ao sair da região entre as placas, a partícula entra numa região sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ e segue uma trajetória igual a uma semicircunferência, retornando à região entre as placas. Pede-se:
a) o ângulo θ de arremesso da partícula indicado na figura;
b) a energia cinética da partícula no instante de seu retorno à região entre as placas;
c) a faixa de valores de $|\vec{B}|$ para que a partícula volte à região entre as placas;
d) verificar, justificando, se existe a certeza da partícula se chocar com alguma das placas após regressar à região entre as placas.



Resolução

Devemos observar que, para percorrer uma trajetória igual a uma semicircunferência, a partícula deve atingir a região de campo magnético perpendicularmente a este. Note que isto somente ocorre se a **carga q for positiva**.

Podemos observar assim, o lançamento obliquo executado pela partícula sob a ação exclusiva de uma força elétrica vertical, para cima. Note que se a carga for negativa. Assim:

$$F_e = E..q = m.a \rightarrow a = \frac{E..q}{m}$$

$$v_x = \frac{d}{t} \rightarrow t = \frac{d}{v_x} = \frac{d}{v.\cos\theta}$$

$$v_y = v_{0y} - a.t$$

$$v_y = v.sen\theta - \frac{E.q}{m}.\frac{d}{v.\cos\theta}$$

a) Fazendo, v_y=0 no momento em que a carga atinge o campo magnético, temos:

$$v.sen\theta = \frac{E.q}{m}.\frac{d}{v.\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}sen2\theta = \frac{E.q}{m}.\frac{d}{v^2}$$

$$\theta = \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)$$

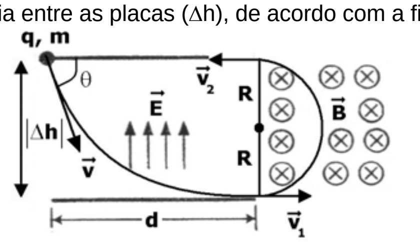
b) No retorno da semicircunferência, novamente v_y=0, portanto toda a Energia cinética está relacionada a v_x:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv^2.\cos^2\theta \text{ , mas}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-sen^2 2\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)$$

$$\text{logo, } E_c = \frac{1}{4}mv^2\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)$$

c) O raio máximo de semicircunferência deve ser no máximo igual à metade distância entre as placas (Δh), de acordo com a figura:



Desta forma, supondo B>0 (ou seja, respeitando a orientação de B indicada na figura):

$$0 = v_{0y}^2 - 2.a.\Delta h$$

$$v_{0y}^2 = 2.a.\Delta h \Rightarrow v^2.sen^2\theta = 2.\frac{E.q}{m}.2R_{máx}$$

$$R_{máx} = \frac{m.v^2.sen^2\theta}{4.E.q}$$

Sendo $R = \frac{m.v_x}{q.B}$, então:

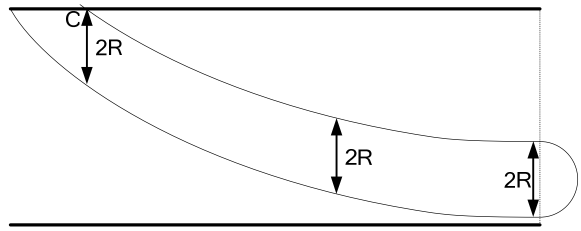
$$\frac{m.v.\cos\theta}{q.B} < \frac{m.v^2 sen^2\theta}{4.E.q}$$

$$B > 4.E.\frac{\cos\theta}{vsen^2\theta}. = 4.E.\frac{\cos\theta}{v\left(1-\cos^2\theta\right)}.$$

Como $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)$, temos:

$$B > \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)}}{v\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)}}{v\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{2.E.q.d}{m.v^2}\right)^2}\right)\right)}$$

d) Após retornar à região do campo elétrico, a partícula irá descrever sempre uma trajetória idêntica à sua trajetória de ida, a menos do fato de que esta trajetória estará deslocada em y de 2R (para cima em relação à trajetória de ida, ponto a ponto). Veja a figura abaixo:



Como a velocidade horizontal é a mesma na ida e na volta e a velocidade vertical é nula no ponto de fronteira entre os campos elétrico e magnético, então, dado que a carga estará sempre sob mesma aceleração a distância entre as trajetórias sobre um eixo vertical qualquer é constante e igual a 2R, provocando a colisão no ponto ilustrado como C, na figura, qualquer que seja R.

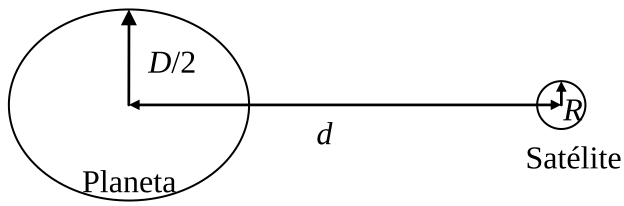
QUESTÃO 9

Um explorador especial sofreu um acidente e encontra-se em um planeta desconhecido. Entre seus equipamentos, ele dispõe de um telescópio, um dinamômetro, um bloco de massa *M* conhecida e um fio de comprimento *L*. O telescópio é composto por uma objetiva e uma ocular com distâncias focais *f* e *f'*, respectivamente. O explorador observou a existência de um satélite no céu deste planeta e o telescópio apresentou uma imagem de diâmetro máximo *2r'*. Medidas anteriores ao acidente indicavam que o raio deste satélite era, na realidade, *R*. O astronauta determinou que o período de revolução do satélite em torno do planeta era equivalente a 5000 períodos de um pêndulo improvisado com o bloco e o fio. Se o dinamômetro registra que este bloco causa uma força *F* sob efeito da gravidade na superfície do planeta, determine:

a) a massa *M* em função dos parâmetros fornecidos;
b) o diâmetro *D* deste planeta em função dos parâmetros fornecidos
Dado: constante de gravitação universal = G

Resolução

a) Segundo o enunciado, a massa *M* do corpo é conhecida, admitimos assim que o examinador tenha pedido a massa M_P do planeta.



Consideremos *t* o período do pêndulo. Temos:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow t^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

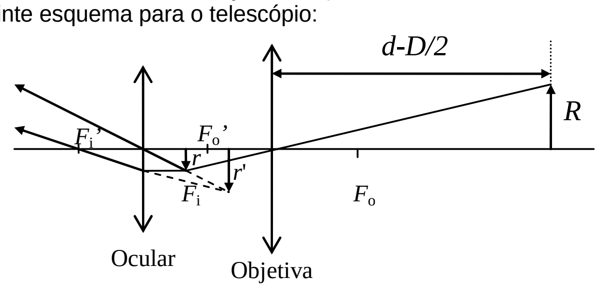
Consideremos T o período do satélite. Pela 3ª lei de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_P}d^3 .$$

Segundo o enunciado, temos $\frac{T^2}{t^2} = 5000^2 = \frac{d^3/GM_P}{L/g} = \frac{d^3}{GM_PL}g$

Como $g = \frac{F}{M}$, temos $5000^2 = \frac{d^3F}{LGM_PM} \Rightarrow M_P = \frac{1}{5000^2}\frac{F}{LGM}d^3$.

Determinaremos *d* em função dos parâmetros dados. Considere o seguinte esquema para o telescópio:



Objetiva:
A distância do satélite à objetiva (*d* – *D*/2) é muito maior que a distância focal da mesma, *f*. Portanto a imagem conjugada está no foco imagem da objetiva, F_i na figura.

$$\frac{i_{Ob}}{o_{Ob}} = -\frac{p'_{Ob}}{p_{Ob}} \Rightarrow \frac{-r}{R} = -\frac{f}{d-D/2} \Rightarrow d - D/2 = \frac{Rf}{r} \quad (1)$$

Ocular:
A medida do tamanho da imagem fornecida pelo telescópio é *r'*. Para escrever *r* em função de *r'* é preciso detalhar a conjugação na ocular. A distância focal da objetiva é *f'*. Assim temos

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p_{Oc}} + \frac{1}{p'_{Oc}}$$

Para a maior ampliação possível, a imagem virtual formada pela ocular deve ficar o mais próximo possível do observador, no ponto próximo. Um observador normal tem ponto próximo a aproximadamente 0,25 m, portanto:

$$p'_{Oc} = -0{,}25 \text{ m}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p_{Oc}} + \frac{1}{-0{,}25} \Rightarrow p_{Oc} = \frac{1}{1/f' + 4} \Rightarrow p_{Oc} = \frac{f'}{1+4f'} \quad (2)$$

O aumento linear transversal na ocular permite escrever:

$$\frac{i_{Oc}}{o_{Oc}} = -\frac{p'_{Oc}}{p_{Oc}} \Rightarrow \frac{r'}{r} = -\frac{-0{,}25}{p_{Oc}} \Rightarrow r = \frac{p_{Oc} r'}{0{,}25} \Rightarrow r = 4p_{Oc}r' \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3): $r = \frac{4f'r'}{1+4f'}$ (4)

Telescópio (objetiva + ocular)
Substituindo (4) em (1):

$$d - \frac{D}{2} = \frac{Rf(1+4f')}{4f'r'} \Rightarrow d - \frac{D}{2} = \frac{fR}{r'}\left(1+\frac{1}{4f}\right) \Rightarrow d = \frac{fR}{r'}\left(1+\frac{1}{4f}\right) + \frac{D}{2}$$

Considerando que o raio do planeta, *D*/2, possa ser desprezado em relação à distância do centro do planeta ao satélite, *d*, temos:

$$d = \frac{fR}{r'}\left(1+\frac{1}{4f}\right);\ D << d \quad (5)$$

Temos finalmente $M_P = \frac{1}{5000^2}\frac{F}{LGM}\left[\frac{fR}{r'}\left(1+\frac{1}{4f}\right)\right]^3$

b) A aceleração da gravidade no ponto do corpo de massa *M* é:

$$g_P = \frac{F}{M} = \frac{GM_P}{(D/2)^2} \Rightarrow D = 2\sqrt{\frac{GM_PM}{F}}.$$

Substituindo M_P por sua expressão determinada no item **a** obtemos, após algumas simplificações:

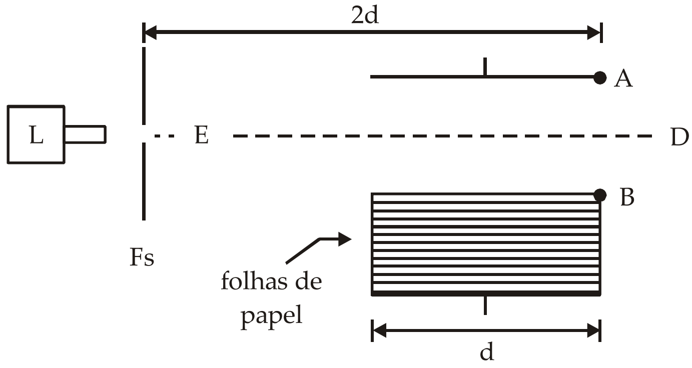
$$D = \frac{1}{2500}\sqrt{\frac{1}{L}\left[\frac{fR}{r'}\left(1+\frac{1}{4f}\right)\right]^3}$$

QUESTÃO 10

A figura ilustra uma empacotadora de papel que utiliza um capacitor de placas quadradas e paralelas para empilhar a quantidade exata de folhas contidas em cada embalagem. Ao atingir a altura limite do bloco de papel, o laser L acoplado à fenda simples Fs projeta os mínimos de intensidade de difração de primeira ordem nos pontos A e B, eqüidistantes da linha tracejada ED. Sabendo que cada folha de papel possui uma espessura e_f, determine o número de folhas contidas em cada embalagem.

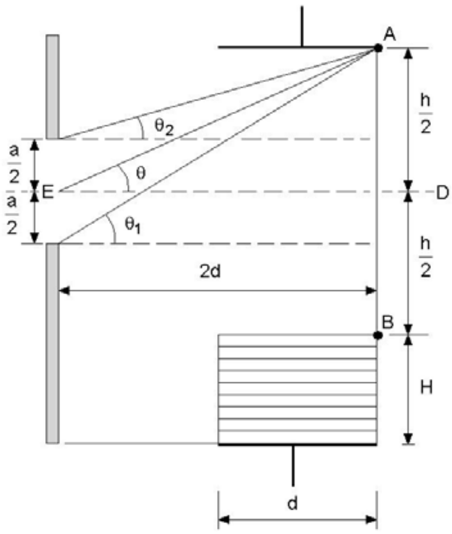
Dados: comprimento de onda do laser λ;
largura da fenda simples = *a*;
distância entre a fenda e a reta AB = 2 d
área da superfície das placas do capacitor = d^2
permissividade do vácuo = ε_0
permissividade do papel = ε
capacitância do capacitor com o limite máximo de folhas de papel = C

Obs.: despreze o efeito da borda do capacitor



Resolução

Observe a figura:



Da figura acima temos que:

$$tg\theta_1 = \frac{\frac{h}{2}+\frac{a}{2}}{2d} \qquad tg\theta_2 = \frac{\frac{h}{2}-\frac{a}{2}}{2d} \qquad tg\theta = \frac{\frac{h}{2}}{2d}$$

Consideraremos que $h >> a$, uma vez que **a** é largura da fenda (da ordem de grandeza do comprimento de onda) e h é o espaço entre a placa superior e a face da folha de papel que se encontra no topo da pilha. Desse modo podemos assumir que $tg\theta_1 \cong tg\theta_2 \cong tg\theta$, ou seja, os raios incidentes que interferem destrutivamente para formar o mínimo de difração de primeira ordem no ponto A são praticamente paralelos. Então, podemos considerar, que a diferença de caminho entre os pares de raios que se cancelam é dada por:

$$\Delta = \frac{a}{2}\,sen\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow sen\theta = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{a} \Rightarrow tg\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}$$

Logo:

$$\frac{h}{4d} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}} \Rightarrow h = \frac{4\cdot d\cdot\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}} \quad (I)$$

O conjunto de folhas junto com o capacitor formam um sistema de dois capacitores em série (um cujo dielétrico é o papel e outro cujo dielétrico é o vácuo). Assim, lembrando que $C = \varepsilon\frac{A}{d}$ temos as capacitâncias:

$$C_{papel} = \varepsilon\frac{d^2}{H} \text{ e } C_{vacuo} = \varepsilon_0\frac{d^2}{h}$$

A capacitância equivalente é dada por: $C = \frac{C_{papel}.C_{vacuo}}{C_{papel}+C_{vacuo}}$

$$C=\frac{\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{h}\cdot\frac{\varepsilon\cdot d^2}{H}}{\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{h}+\frac{\varepsilon\cdot d^2}{H}}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot d^2}{\varepsilon_0\cdot H+\varepsilon\cdot h}\Rightarrow$$

$$C\cdot\varepsilon_0\cdot H+C\cdot\varepsilon\cdot h=\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot d^2\Rightarrow H=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-h\right)\Rightarrow$$

$$H=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-\frac{4\cdot d\cdot\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}\right).$$

Como $H=n\cdot e_f$, temos:

$$n=\frac{\varepsilon}{e_f\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-\frac{4\cdot d\cdot\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}\right)$$

NOTA: Para que o ângulo θ fosse considerado pequeno deveríamos ter $\frac{h}{2} << 2d$, o que não necessariamente é verdade.

Caso o enunciado colocasse esta condição como verdadeira, teríamos:

$$\frac{\lambda}{a}=\text{sen}\theta=\text{tg}\theta=\frac{\frac{h}{2}}{2.d}\Rightarrow h=\frac{4.d\lambda}{a}$$

Substituindo na equação da associação de capacitores:

$$H=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-h\right)\Rightarrow n\cdot e_f=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-\frac{4\cdot d\cdot\lambda}{a}\right)\Rightarrow$$

$$n=\frac{\varepsilon}{e_f\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0\cdot d^2}{C}-\frac{4\cdot d\cdot\lambda}{a}\right)$$