Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Aprovou!

Elite Resolve

FUVEST 2011
2ª fase

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais vale a desigualdade

$$\left|\log_{16}(1-x^2)-\log_4(1+x)\right|<\frac{1}{2}$$

Resolução

Primeiramente, pela condição de existência do logaritmo, temos:

$$\begin{cases}1-x^2>0\\ 1+x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1 \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, trabalhando com o módulo, temos:

$$\left|\log_{16}(1-x^2)-\log_4(1+x)\right| = \left|\log_{16}(1-x^2)-\frac{\log_{16}(1+x)}{\log_{16}4}\right| =$$

$$=\left|\log_{16}(1-x^2)-\frac{\log_{16}(1+x)}{\frac{1}{2}}\right| = \left|\log_{16}(1-x^2)-2\cdot\log_{16}(1+x)\right| =$$

$$=\left|\log_{16}(1-x^2)-\log_{16}(1+x)^2\right| = \left|\log_{16}\frac{1-x^2}{(1+x)^2}\right| = \left|\log_{16}\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x)^2}\right| =$$

$$=\left|\log_{16}\frac{1-x}{1+x}\right|$$

Isso reduz nosso sistema de inequações a:

$$\left|\log_{16}\frac{1-x}{1+x}\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\log_{16}\frac{1-x}{1+x}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{16}16^{-\frac{1}{2}}<\log_{16}\frac{1-x}{1+x}<\log_{16}16^{\frac{1}{2}}$$

Como logaritmo na base 16 é uma função estritamente crescente (pois a base é maior que 1), a comparação entre os logaritmandos é feita mantendo-se o sinal da inequação, isto é:

$$16^{-\frac{1}{2}}<\frac{1-x}{1+x}<16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{1-x}{1+x}<4$$

Como já fizemos a imposição de que $1+x>0$ para garantir a existência do logaritmo, podemos nesse caso multiplicar todas as inequações por $1+x$ mantendo os sinais das inequações inalterados:

$$\frac{1}{4}<\frac{1-x}{1+x}<4 \Leftrightarrow 1+x<4\cdot(1-x)<16\cdot(1+x) \Leftrightarrow$$

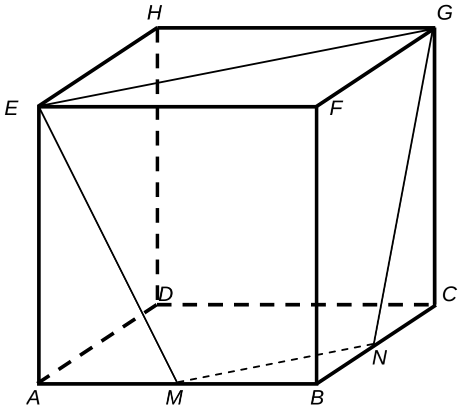
$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x<3\\ -12<20x\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5} \qquad \text{(II)}$$

O conjunto verdade do sistema de inequações proposto será dado pela intersecção das condições I e II, isto é:

$$V=\left]-1,1\right[\cap\left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[\Leftrightarrow \boxed{V=\left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[}$$

QUESTÃO 02

Na figura abaixo, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado ℓ. Os pontos M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G.



Resolução

A superfície do tronco de pirâmide é composta por cinco polígonos:

- dois triângulos retângulos (EFG e MBN);
- dois trapézios retângulos ($MBFE$ e $NBFG$), congruentes entre si;
- um trapézio isósceles ($MEGN$)

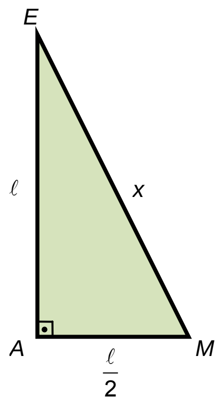
Calculemos a área de cada uma dessas faces para somar no final.

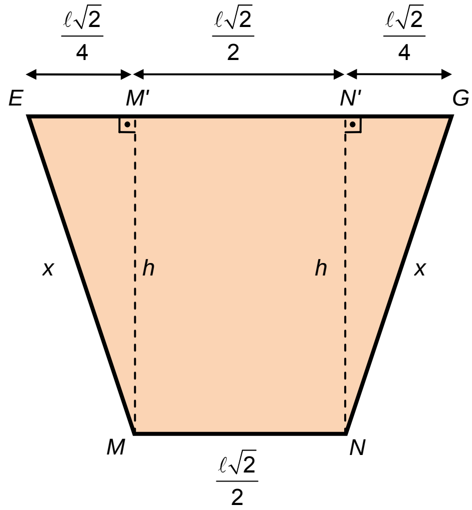
$$S_{EFG}=\frac{EF\cdot FG}{2}=\frac{\ell\cdot\ell}{2}=\frac{\ell^2}{2}$$

$$S_{MBN}=\frac{MB\cdot BN}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\ell^2}{8}$$

$$S_{MBFE}=S_{NBFG}=\frac{(EF+MB)\cdot BF}{2}=\left(\ell+\frac{\ell}{2}\right)\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3\ell^2}{4}$$

Para calcular a área do trapézio $MEGN$, considere as figuras a seguir, em que M' e N' são os pés das alturas do trapézio em relação à base maior EG:





No triângulo retângulo EAM, temos $x^2=\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.

Já no triângulo $EM'M$, temos $x^2=h^2+\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\right)^2$.

Comparando essas duas expressões, vem que:

$$\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=h^2+\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow h^2=\frac{9\ell^2}{8} \Leftrightarrow h=\frac{3\ell}{2\sqrt{2}} \quad (\text{pois } h>0)$$

Assim, a área do trapézio $MEGN$ será dada por:

$$S_{MEGN}=\frac{(EG+MN)\cdot MM'}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\ell\sqrt{2}+\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{3\ell}{2\sqrt{2}}=\frac{9\ell^2}{8}$$

A área S da superfície do tronco de pirâmide será igual a:

$$S=S_{EFG}+S_{MBN}+S_{MBFE}+S_{NBFG}+S_{MEGN}$$

$$S=\frac{\ell^2}{2}+\frac{\ell^2}{8}+\frac{3\ell^2}{4}+\frac{3\ell^2}{4}+\frac{9\ell^2}{8} \Leftrightarrow \boxed{S=\frac{13\ell^2}{4}}$$

QUESTÃO 03

Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.

a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?

b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?

c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

Resolução

a) Cada prova é produzida permutando-se as 14 questões. Como o total de permutações de n objetos distintos é igual a n!, segue que o total de provas que podem ser produzidas é, portanto, igual a 14!.

b) As provas da versão classe A são compostas, inicialmente, por 7 questões de Português. Temos assim 7! modos de compor a parte de Português dessa prova.

Como a última questão deve ser de Matemática e duas questões dessa disciplina não podem aparecer em posições consecutivas, temos que as únicas permutações possíveis entre as questões de Matemática e Geografia são as seguintes (G representa uma questão de Geografia; M representa uma questão de Matemática):

MGMGGGM
MGGMGGM
MGGGMGM
GMGMGGM
GMGGMGM
GGMGMGM

Desse modo, existem 6 possibilidades para distribuirmos as questões da segunda parte da prova. Lembrando que temos 3! modos de permutar as questões de Matemática e 4! modos de permutar as questões de Geografia, temos que, pelo Princípio Multiplicativo, o número de versões classe A distintas da prova que podem ser produzidas é igual a $7!\cdot 6\cdot 3!\cdot 4! = 4354560$.

c) RESOLUÇÃO 1:

Admitindo que as 7 primeiras questões da prova sejam de Português, as questões restantes são permutações das questões de Geografia e Matemática, ou seja, o total de provas cujas 7 primeiras questões são de Português é dado por $7!\cdot 7! = (7!)^2$. Desse modo, a probabilidade dessa prova ser da versão classe A é dada por:

$$\text{p} = \frac{6\cdot 3!\cdot 4!\cdot 7!}{(7!)^2} = \frac{6\cdot 3!\cdot 4!}{7!} = \frac{6\cdot 3!\cdot 4!}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!} \Leftrightarrow \boxed{\text{p} = \frac{6}{35}}$$

RESOLUÇÃO 2:

Definimos os eventos:

$A = \{$ O candidato recebe uma prova versão classe A $\}$

$B = \{$ O candidato recebe uma prova que começa com 7 questões de português $\}$

A probabilidade condicional de ocorrer o evento A, dado que ocorre o evento B é $p(A\,|\,B)$, que é a probabilidade a ser determinada e é dada por:

$$p(A\,|\,B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Agora devemos notar que toda prova classe A sempre começa com 7 questões de português, então temos que $A\subset B$, ou seja, o evento B contém o evento A, logo:

$$A\cap B = A \;\Rightarrow\; p(A\cap B) = p(A)$$

Então podemos escrever:

$$p(A\,|\,B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{n(A)}{\cancel{n(Total)}}\cdot\frac{\cancel{n(Total)}}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)}.$$

$n(A)$ foi calculado no item **(b)**, enquanto $n(B)$ é o número de provas que começam com 7 questões de português, e é dado por $n(B) = 7!\cdot 7!$, pois podemos permutar as questões de português de $7!$ modos distintos nas primeiras 7 posições e as 7 questões restantes, também de $7!$ modos distintos. Então temos:

$$p(A\,|\,B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{6\cdot 3!\cdot 4!\cdot \cancel{7!}}{7!\cdot \cancel{7!}} = \frac{36}{7\cdot 6\cdot 5} = \frac{6}{35} \Leftrightarrow \boxed{p(A\,|\,B) = \frac{6}{35}}.$$

QUESTÃO 04

a) Sendo i a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i$$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos w tais que $z_0\cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0\cdot w$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo z_1 que é o simétrico de z_0 com relação à reta de equação $y - x = 0$.

Resolução

a) Inicialmente, note que a divisão entre números complexos é feita multiplicando-se o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador. Assim:

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i \Leftrightarrow z_0 = \left(\frac{1}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right) - \left(\frac{1}{2i}\right)\cdot\left(\frac{-2i}{-2i}\right) + i$$

$$z_0 = \frac{1-i}{2} - \left(-\frac{i}{2}\right) + i \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} + 1\cdot i$$

Logo, temos que:

$$\boxed{\begin{cases}\text{Re}(z_0) = \dfrac{1}{2}\\ \text{Im}(z_0) = 1\end{cases}}$$

b) Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio com coeficientes inteiros (e, portanto, reais). Se z_0 é raiz de $p(x)$, temos, pelo teorema das raízes complexas, que $\bar{z}_0$ (conjugado de z_0) também é raiz desse polinômio.

Aplicando as relações de Girard, temos:

$$z + \bar{z}_0 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = \left(\frac{1}{2}+i\right) + \left(\frac{1}{2}-i\right) \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow b = -a \qquad \text{(I)}$$

$$z\cdot\bar{z}_0 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-i\right) \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow c = \frac{5a}{4} \qquad \text{(II)}$$

A partir de (II) temos que, se c é inteiro então a fração $\frac{5a}{4}$ é inteira, ou seja, a deve ser um múltiplo de 4. Fazendo $a = 4k$, com k inteiro não-nulo (do contrário o polinômio não seria do segundo grau e nem teria coeficientes inteiros), temos, substituindo em (I) e (II), que $b = -4k$ e $c = 5k$. Assim, o polinômio $p(x)$ é dado por:

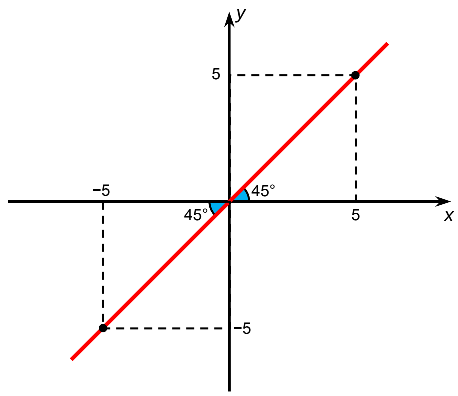
$$p(x) = 4k\cdot x^2 - 4k\cdot x + 5k \Leftrightarrow p(x) = k\cdot(4x^2 - 4x + 5),\ k\in\mathbb{Z}^*$$

Como o exercício pede **um** polinômio, devemos, portanto, dar algum valor inteiro não-nulo para k. Em particular, os polinômios $4x^2 - 4x + 5$, $8x^2 - 8x + 10$ e $12x^2 - 12x + 15$ seriam, por exemplo, as respostas para k igual a 1, 2 e 3, respectivamente.

c) Como $z_0\cdot w$ tem as partes real e imaginária iguais, ele deve pertencer à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares), ou seja, seu afixo no plano de Argand-Gauss é da forma (b, b). Logo:

$$|z_0\cdot w| = |b + b\cdot i| = \sqrt{b^2+b^2} = |b|\sqrt{2}$$

Como $|z_0\cdot w| = 5\sqrt{2}$, segue que $|b|\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow b = \pm 5$.



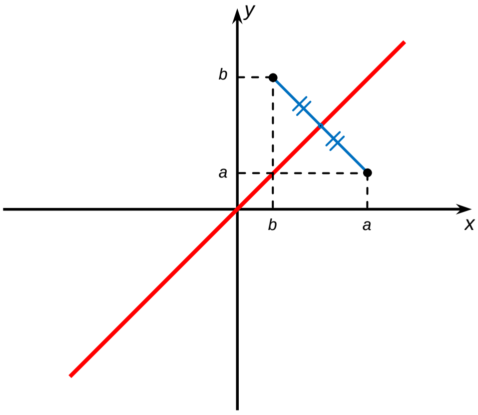
Assim:

$$z_0\cdot w = 5 + 5i \text{ ou } z_0\cdot w = -5 - 5i \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot w = 5 + 5i \text{ ou } \left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot w = -5 - 5i \Leftrightarrow$$

$$\boxed{w = 6 - 2i} \text{ ou } \boxed{w = -6 + 2i}$$

d) A reta $y-x=0$ pode ser reescrita como $y=x$. Para cada ponto (*a*, *b*) do plano, seu simétrico em relação à reta $y=x$ é o ponto (*b*, *a*), como ilustrado na figura a seguir:



Como o número complexo $z_0=\frac{1}{2}+i$ é identificado como o ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$, seu simétrico em relação à $y=x$ será o ponto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, de modo que $\boxed{z_1=1+\frac{1}{2}\cdot i}$.

QUESTÃO 05

As raízes da equação do terceiro grau

$$x^3-14x^2+kx-64=0$$

são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine
a) as raízes da equação;
b) o valor de *k*.

Resolução

a) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $x^3-14x^2+kx-64=0$. Sem perda de generalidade vamos admitir que (x_1, x_2, x_3) seja, nessa ordem, uma progressão geométrica. Vale relembrar que, nesse caso, temos $(x_2)^2=x_1\cdot x_3$.

Aplicando a relação de Girard do produto das raízes:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{(-64)}{1}\Leftrightarrow(x_1\cdot x_3)\cdot x_2=64\Leftrightarrow(x_2)^2\cdot x_2=64$$
$$\Leftrightarrow(x_2)^3=64\Leftrightarrow x_2=4$$

Como $(x_2)^2=x_1\cdot x_3$, temos então que $x_1\cdot x_3=4^2\Leftrightarrow x_1\cdot x_3=16$.

Aplicando agora a relação de Girard da soma das raízes:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{(-14)}{1}\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=14\Leftrightarrow x_1+x_3=10$$

Temos, então, o seguinte sistema:

$$\begin{cases}x_1+x_3=10\\x_1\cdot x_3=16\end{cases}$$

Precisamos, portanto, de dois números cujo produto seja 16 e cuja soma seja 10. Note que esses números são, justamente, 2 e 8. **Assim, as raízes desse polinômio são 2, 4 e 8.**

__Obs:__ é indiferente tomarmos x_1 = 2 e x_3 = 8 ou x_1 = 8 e x_3 = 2. De fato, no primeiro caso teríamos (2;4;8), que é uma progressão geométrica crescente, enquanto no segundo teríamos (8;4;2), uma progressão geométrica decrescente. Em ambos os casos o enunciado é satisfeito.

b) Temos duas resoluções possíveis. A primeira consiste em perceber que x = 2 satisfaz a equação, ou seja, trocando x por 2:

$$(2)^3-14\cdot(2)^2+k\cdot(2)-64=0\Leftrightarrow 8-56+2k-64=0\Leftrightarrow 2k=112$$
$$\Leftrightarrow\boxed{k=56}$$

Outro modo de resolver esse item seria aplicando a relação de Girard para soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas. De fato:

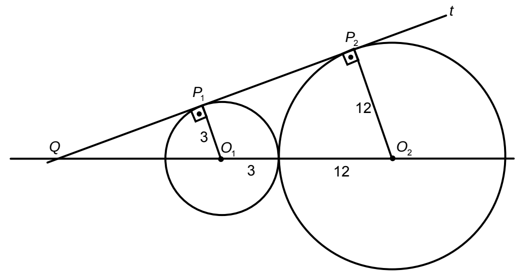
$$+\frac{k}{1}=2\cdot4+2\cdot8+4\cdot8\Leftrightarrow k=8+16+32\Leftrightarrow k=56$$

QUESTÃO 06

As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1=3$ e $r_2=12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, determine
a) o comprimento P_1P_2;
b) a área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$;
c) a área do triângulo QO_2P_2.

Resolução

a) Considerando que P_1 e P_2 sejam pontos não coincidentes, a situação descrita pelo enunciado pode ser representada como na figura a seguir.



Os triângulos QP_1O_1 e QP_2O_2 são semelhantes, pois $\widehat{P_1}\cong\widehat{P_2}$ e o ângulo $\widehat{Q}$ é comum aos dois triângulos (critério AA de semelhança). Logo,

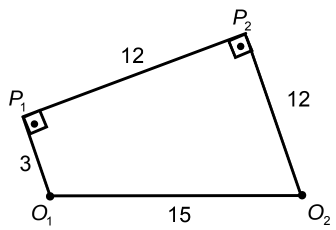
$$\frac{QO_2}{QO_1}=\frac{O_2P_2}{O_1P_1}\Rightarrow\frac{15+QO_1}{QO_1}=\frac{12}{3}\Leftrightarrow QO_1=5.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos QP_1O_1 e QP_2O_2, obtemos:

$$QP_1^2=QO_1^2-O_1P_1^2=25-9=16\Rightarrow QP_1=4$$
$$QP_2^2=QO_2^2-O_2P_2^2=400-144=256\Rightarrow QP_2=16$$

E então $P_1P_2=QP_2-QP_1\Rightarrow P_1P_2=16-4\Rightarrow\boxed{P_1P_2=12}$.

b) O quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$ é um trapézio retângulo.



Então sua área pode ser determinada por:

$$\boxed{A(O_1O_2P_2P_1)=\frac{(b_{maior}+b_{menor})\cdot h}{2}=\frac{(12+3)\cdot12}{2}=90}$$

c) O triângulo QO_2P_2 é retângulo. Então sua área pode ser determinada por:

$$\boxed{A(QO_2P_2)=\frac{QP_2\cdot O_2P_2}{2}=\frac{16\cdot12}{2}=96}$$

Equipe desta resolução

Matemática

Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Rafael da Gama Cavallari

Revisão

Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani
Vagner Figueira de Faria

Digitação, Diagramação e Publicação

Carolina Dorte dos Santos
Carolina Marcondes Garcia Ferreira