ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

Resolve

FUVEST 2010

2ª FASE

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

QUESTÃO 01

Sejam x e y dois números reais, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, satisfazendo $\operatorname{sen} y = \frac{4}{5}$ e $11 \operatorname{sen} x + 5\cos(y - x) = 3$.

Nessas condições, determine

a) $\cos y$.

b) $\operatorname{sen} 2x$.

Resolução

a) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos y = \pm\frac{3}{5}$$

Como $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, ou seja, y está no segundo quadrante, devemos ter $\cos y < 0$, de modo que ficamos com: $\boxed{\cos y = -\frac{3}{5}}$

b) Da fórmula para o cosseno da diferença, temos que:

$$\cos(y - x) = \cos y \cdot \cos x + \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}\cdot\cos x + \frac{4}{5}\cdot\operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$5\cos(y - x) = -3\cos x + 4\operatorname{sen} x$$

Substituindo na relação dada, vem que:

$$11\operatorname{sen} x + 5\cos(y - x) = 3 \Leftrightarrow 11\operatorname{sen} x + (-3\cos x + 4\operatorname{sen} x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\cos x = 5\operatorname{sen} x - 1 \qquad (*)$$

Por outro lado, novamente pela relação fundamental da Trigonometria, segue que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + (5\operatorname{sen} x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$26\operatorname{sen}^2 x - 10\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, devemos ter $\operatorname{sen} x > 0$, de modo que descartamos o valor $\operatorname{sen} x = 0$ e ficamos com $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$.

Voltando na identidade $(*)$, obtemos: $\cos x = 5\cdot\frac{5}{13} - 1 = \frac{12}{13}$.

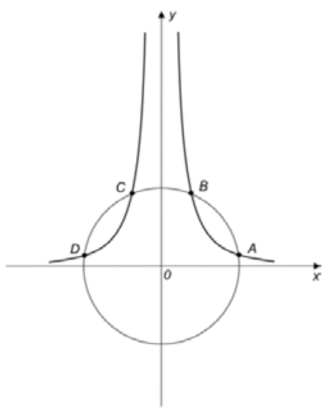
Portanto:

$$\operatorname{sen} 2x = 2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 2x = \frac{120}{169}}$$

QUESTÃO 02

No sistema ortogonal de coordenadas cartesianas *Oxy* da figura, estão representados a circunferência de centro na origem e raio 3, bem como o gráfico da função

$$y = \frac{\sqrt{8}}{|x|}$$



Nessas condições, determine

a) as coordenadas dos pontos *A,B,C,D* de interseção da circunferência com o gráfico da função.

b) a área do pentágono *OABCD*.

Resolução

a) A equação da circunferência de centro na origem e raio 3 é dada por: $x^2 + y^2 = 9$ (I)

Os pontos A, B, C e D são dados pela intersecção dessa circunferência com a figura representada por: $y = \frac{\sqrt{8}}{|x|}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{|x|}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{8}{x^2} = 9 \Rightarrow x^4 - 9x^2 + 8 = 0$$

Resolvendo essa equação biquadrada:

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = 8 \text{ ou } x^2 = 1}$$

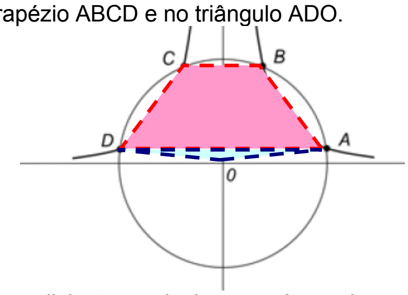
Logo $x_A = \sqrt{8}$ ou $x_D = -\sqrt{8}$ ou $x_B = 1$ ou $x_C = -1$.

Onde x_A, x_B, x_C e x_D indicam as abscissas de A,B,C e D, respectivamente.

Substituindo esses valores em (II), temos:

$$\boxed{A = (\sqrt{8}, 1)\,,\; B = (1, \sqrt{8})\,,\; C = (-1, \sqrt{8}) \text{ e } D = (-\sqrt{8}, 1)}$$

b) O pentágono OABCD pode ser decomposto em duas figuras disjuntas: no trapézio ABCD e no triângulo ADO.



Como são figuras disjuntas, calculamos a áreas dessas e somamos para obter a área do pentágono:

Área do Trapézio (A_I):

$$A_I = \frac{(AD + BC)\cdot(y_B - y_A)}{2} = \frac{\left((x_A - x_D) + (x_B - x_C)\right)\cdot(y_B - y_A)}{2}$$

$$A_I = \frac{\left((\sqrt{8} + \sqrt{8}) + (1 + 1)\right)\cdot\left(\sqrt{8} - 1\right)}{2} \Rightarrow \boxed{A_I = 7}$$

Área do Triângulo (A_{II}):

$$A_{II} = \frac{AD \cdot y_A}{2} = \frac{(x_A - x_D)\cdot y_A}{2} \Rightarrow A_{II} = \frac{\left(\sqrt{8} + \sqrt{8}\right)\cdot 1}{2} \Rightarrow \boxed{A_{II} = \sqrt{8}}$$

Área do Pentágono (A_p):

$$\boxed{A_p = A_I + A_{II} = 7 + \sqrt{8}}$$

QUESTÃO 03

Seja *n* um número inteiro, $n \geq 0$.

a) Calcule de quantas maneiras distintas *n* bolas idênticas podem ser distribuídas entre Luís e Antônio.

b) Calcule de quantas maneiras distintas *n* bolas idênticas podem ser distribuídas entre Pedro, Luís e Antônio.

c) Considere, agora, um número natural *k* tal que $0 \leq k \leq n$. Supondo que cada uma das distribuições do item b) tenha a mesma chance de ocorrer, determine a probabilidade de que, após uma dada distribuição, Pedro receba uma quantidade de bolas maior ou igual a *k*.

Observação: Nos itens a) e b), consideram-se válidas as distribuições nas quais uma ou mais pessoas não recebam bola alguma.

Resolução

Lembramos para a resolução dessa questão que o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_j = n$ é dado por $\binom{n+j-1}{j-1}$.

a) Calcular de quantas maneiras distintas *n* bolas idênticas podem ser distribuídas entre Luís e Antônio é equivalente a calcular o número de soluções da equação:

$$x_L + x_A = n \qquad \text{(I)}$$

Sendo x_L e x_A as quantidades não-negativas de bolas ganhas por Luís e Antônio, respectivamente.
O número de soluções inteiras não-negativas da equação (I) é:

$$\binom{n+2-1}{2-1} = \binom{n+1}{1} = \boxed{n+1}$$

b) Equivalentemente, definimos x_P como a quantidade de bolas ganhas por Pedro, tendo a seguinte equação:

$$x_L + x_A + x_P = n \qquad \text{(II)}$$

Cujo número de soluções inteiras não-negativas é dado por:

$$\binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2} = \boxed{\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}}$$

c) Como a quantidade ganha por Pedro é maior ou igual a *k*, vamos definir $y_P = x_P - k$ como sendo a quantidade de bolas a mais que *k* que ele ganhou, de modo que y_P será inteiro não-negativo. Dessa forma, substituindo $x_P = y_P + k$ em (II), obtemos:

$$x_L + x_A + y_P = n - k \qquad \text{(III)}$$

Cujo número de soluções inteiras não-negativas é dado por:

$$\binom{n-k+3-1}{3-1} = \binom{n-k+2}{2} = \frac{(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{2}$$

Portanto a probabilidade pedida (*p*) é dada por:

$$p = \frac{\binom{n-k+2}{2}}{\binom{n+2}{2}} \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{(n+2)\cdot(n+1)}}$$

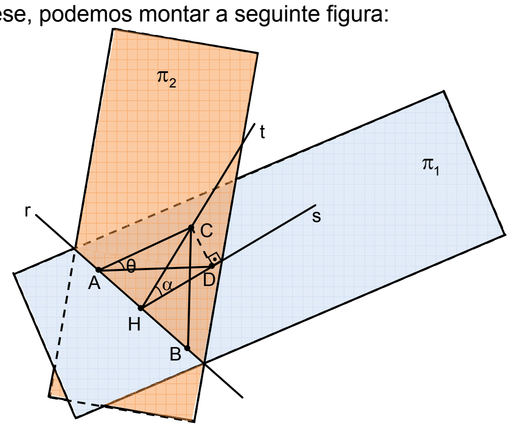
QUESTÃO 04

Dois planos π_1 e π_2 se interceptam ao longo de uma reta *r*, de maneira que o ângulo entre eles meça α radianos, $0 < \alpha < \pi/2$. Um triângulo equilátero *ABC*, de lado ℓ, está contido em π_2, de modo que $\overline{AB}$ esteja em *r*. Seja *D* a projeção ortogonal de *C* sobre o plano π_1, e suponha que a medida θ, em radianos, do ângulo $C\hat{A}D$, satisfaça $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{6}/4$.

Nessas condições, determine, em função de ℓ,
a) o valor de α.
b) a área do triângulo *ABD*.
c) o volume do tetraedro *ABCD*.

Resolução

Por hipótese, podemos montar a seguinte figura:



a) Do enunciado, temos que o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular à reta *s* contida em π_1. O ângulo α em questão é o ângulo entre as retas *s* e *t*, cujo ponto de intersecção, chamado de H, é o pé da altura do triângulo ABC. Do fato do triângulo CDH ser retângulo, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CD}{CH}$$

Como CH é a altura do triângulo eqüilátero ABC, $CH = \frac{\ell\cdot\sqrt{3}}{2}$.

No triângulo ACD de lado $AC = \ell$, retângulo, por hipótese, em D, temos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(C\hat{A}D\right) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow CD = \frac{\sqrt{6}}{4}\cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\ell$$

Finalmente,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CD}{CH} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\ell\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\ell\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^o}$$

b) Como $\alpha = 45^o$, o triângulo CDH é retângulo isósceles e isso implica que $\overline{HD} \equiv \overline{CD} = \frac{\sqrt{6}}{4}\ell$.

Logo, a área pedida é:

$$A_{ABD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{HD}}{2} = \frac{\ell\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\ell\right)}{2} \Rightarrow \boxed{A_{ABD} = \frac{\ell^2\cdot\sqrt{6}}{8}}$$

c) O tetraedro ABCD será considerado como tendo o triângulo ABD como base e o segmento CD como altura. Portanto, o volume do tetraedro ABCD é dado por:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot A_{ABD}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{6}}{8}\cdot\frac{\ell\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \boxed{V_{ABCD} = \frac{\ell^3}{16}}$$

QUESTÃO 05

Determine a solução (x,y), $y > 1$, para o sistema de equações

$$\begin{cases}\log_y(9x-35) = 6\\ \log_{3y}(27x-81) = 3\end{cases}$$

Resolução

Como $y > 1$, portanto $3y > 3$, as condições de existência para as bases (maiores que zero e diferentes de 1) estão garantidas.
Para os logaritmandos, que devem ser positivos, fazemos:

$$\begin{cases}9x-35 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{35}{9}\\ 27x-81 > 0 \Leftrightarrow x > 3\end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{35}{9}$$

A partir disso, pela definição de logaritmo, vem que:

$$\begin{cases}\log_y(9x-35) = 6\\ \log_{3y}(27x-81) = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x-35 = y^6\\ 27x-81 = (3y)^3 \quad (\div 3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x = y^6+35\\ 9x = 27+9y^3\end{cases}$$

Comparando as duas equações, vem que:

$$y^6 + 35 = 27 + 9y^3 \Leftrightarrow (y^3)^2 - 9y^3 + 8 = 0$$

Fazendo a troca de variáveis $y^3 = \lambda$, temos:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 8$$

Para $\lambda = 1$, temos: $\lambda = 1 \Leftrightarrow y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (não convém).

Já para $\lambda = 8$, temos: $\lambda = 8 \Leftrightarrow y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$

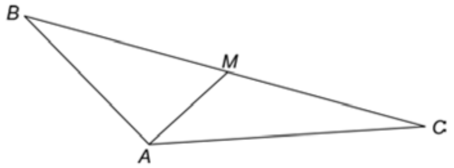
Substituindo $y = 2$ em qualquer uma das duas equações do sistema, por exemplo, na primeira:

$$9x = y^6 + 35 = 2^6 + 35 = 99 \Leftrightarrow x = 11$$

Sendo $11 > \frac{35}{9}$, a condição de existência para o logaritmando está satisfeita, de modo que a solução (x,y) do sistema é $\boxed{(x,y) = (11,2)}$.

QUESTÃO 06

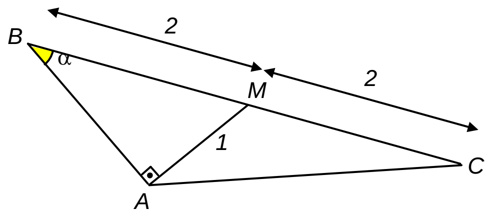
No triângulo *ABC* da figura, a mediana $\overline{AM}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, é perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se também que $BC = 4$ e $AM = 1$. Se α é a medida do ângulo $A\hat{B}C$, determine



a) $\text{sen}\alpha$.
b) o comprimento *AC*.
c) a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{AB}$.
d) a área do triângulo *AMC*.

Resolução

Sendo $\overline{AM}$ mediana do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$, segue que *M* é ponto médio do lado $\overline{BC}$, de modo que $BM = CM = \frac{BC}{2} = 2$.
Assim, esquematizando o triângulo ABC de acordo com o enunciado:



a) Como o triângulo *MAB* é retângulo em A, obtemos:

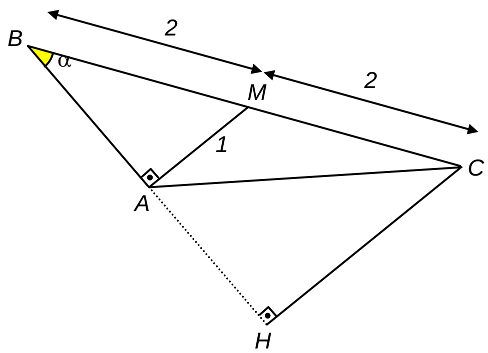
$$\text{sen}\alpha = \frac{AM}{BM} \Leftrightarrow \boxed{\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}}$$

b) Como α é um ângulo agudo tal que $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, segue que $\alpha = 30°$ e, portanto, $\text{med}(B\widehat{M}A) = 60°$ e $\text{med}(A\widehat{M}C) = 120°$.

Assim, da lei dos cossenos no triângulo *AMC* vem que:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos 120° \Leftrightarrow$$
$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{AC = \sqrt{7}}$$

c) Traçando a altura pedida, sendo *H* a projeção de *C* sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, obtemos:



Do triângulo *BHC*, retângulo em *H*, obtemos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{CH}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{4} \Leftrightarrow \boxed{CH = 2}$$

d) A área S_{AMC} do triângulo *AMC* é dada por:

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot CM \cdot \text{sen}120° = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{S_{AMC} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$