ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve

FUVEST 2ª FASE - 2009
MATEMÁTICA

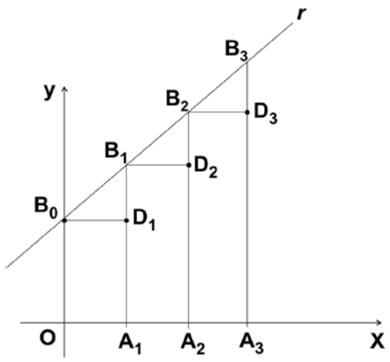
www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Na figura ao lado, a reta *r* tem equação $y = 2\sqrt{2}x + 1$ no plano cartesiano *Oxy*. Além disso, os pontos B_0, B_1, B_2, B_3 estão na reta *r*, sendo $B_0 = (0,1)$. Os pontos A_0, A_1, A_2, A_3 estão no eixo *Ox*, com $A_0 = O = (0,0)$. O ponto D_i pertence ao segmento $\overline{A_iB_i}$, para $1 \le i \le 3$.

Os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ são paralelos ao eixo *Oy*, os segmentos $\overline{B_0D_1}$, $\overline{B_1D_2}$, $\overline{B_2D_3}$ são paralelos ao eixo *Ox*, e a distância entre B_i e B_{i+1} é igual a 9, para $0 \le i \le 2$.



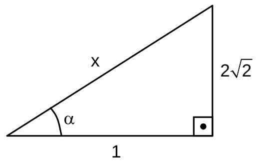
Nessas condições:

a) Determine as abscissas de A_1, A_2, A_3.

b) Sendo R_i o retângulo de base $A_i\,A_{i+1}$ e altura $A_{i+1}\,D_{i+1}$, para $0 \le i \le 2$, calcule a soma das áreas dos retângulos R_0, R_1 e R_2.

Resolução

a) Como o coeficiente angular da reta *r* é dado por $m = \text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$ e $0 < \alpha < 90^o$, construímos o seguinte triângulo para determinação dos valores de $\text{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$:



$$x^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow x = 3$$

Logo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ e } \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Como a distância entre B_i e B_{i+1} é igual a 9 para $0 \le i \le 2$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_0}{9} = \frac{A_2A_1}{9} = \frac{A_3A_2}{9} = \frac{1}{3}$$

De onde concluímos que $A_1A_0 = A_2A_1 = A_3A_2 = 3$.

Dessa forma, como os pontos A_1, A_2 e A_3 se encontram sobre o eixo das abscissas, temos:

$$\boxed{A_1 = (3{,}0), \quad A_2 = (6{,}0) \quad \text{e} \quad A_3 = (9{,}0)}$$

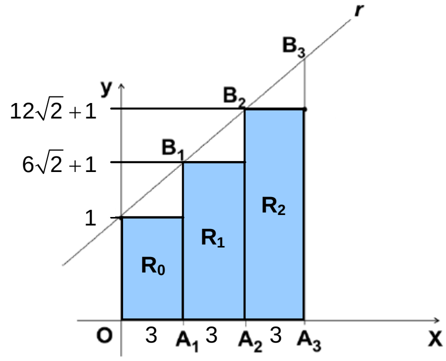
b) As ordenadas dos pontos D_1, D_2 e D_3 são iguais às ordenadas dos pontos B_0, B_1 e B_2, respectivamente. Podemos calculá-las de acordo com a equação da reta *r* ($y = 2\sqrt{2}x + 1$), sabendo que as abscissas de B_0, B_1 e B_2 são iguais às abscissas de A_0, A_1 e A_2 respectivamente:

D_1: $y_{D_1} = y_{B_0} = 2\sqrt{2} \cdot x_{B_0} + 1 = 2\sqrt{2} \cdot 0 + 1 = 1$

D_2: $y_{D_2} = y_{B_1} = 2\sqrt{2} \cdot x_{B_1} + 1 = 2\sqrt{2} \cdot 3 + 1 = 6\sqrt{2} + 1$

D_3: $y_{D_3} = y_{B_2} = 2\sqrt{2} \cdot x_{B_2} + 1 = 2\sqrt{2} \cdot 6 + 1 = 12\sqrt{2} + 1$

Calculamos, assim, as áreas indicadas na figura a seguir:



$$\begin{cases} S_{R_1} = 3 \cdot 1 = 3 \\ S_{R_2} = 3 \cdot \left(6\sqrt{2} + 1\right) = 18\sqrt{2} + 3 \\ S_{R_3} = 3 \cdot \left(12\sqrt{2} + 1\right) = 36\sqrt{2} + 3 \end{cases}$$

Assim, a soma (*S*) das áreas pedida é dada por:

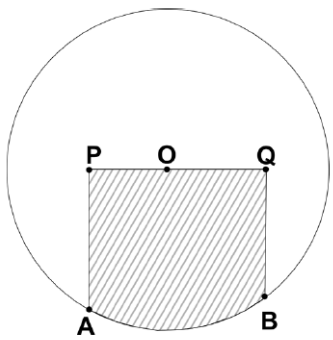
$$S = S_{R_1} + S_{R_2} + S_{R_3} = 3 + (18\sqrt{2} + 3) + (36\sqrt{2} + 3) \Rightarrow$$

$$\boxed{S = 54\sqrt{2} + 9}$$

QUESTÃO 02

Na figura, estão representadas a circunferência C, de centro *O* e raio 2, e os pontos *A*, *B*, *P* e *Q*, de tal modo que:

1. O ponto *O* pertence ao segmento $\overline{PQ}$.
2. *OP* = 1, *OQ* = $\sqrt{2}$.
3. *A* e *B* são pontos da circunferência, $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ e $\overline{BQ} \perp \overline{PQ}$.

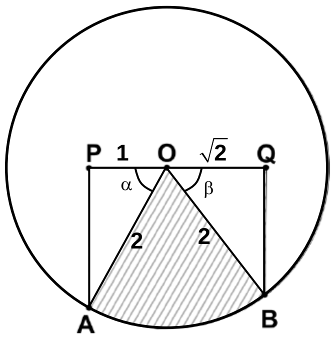


Assim sendo, determine:

a) A área do triângulo *APO* .
b) Os comprimentos dos arcos determinados por *A* e *B* em C .
c) A área da região hachurada.

Resolução

Observe pela figura, que o raio R da circunferência é tal que R = OA = OB, portanto, OA = OB = 2:



a) Para encontrar a área do triângulo APO, basta encontrar a medida de AP, utilizando o teorema de Pitágoras:

$\text{AP}^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow \text{AP}^2 + 1 = 4 \Rightarrow \text{AP}^2 = 3 \Rightarrow \text{AP} = \sqrt{3}$, uma vez que AP não pode ter valor negativo.

Logo, a área de APO será: $\dfrac{AP.PO}{2}=\dfrac{\sqrt{3}.1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Para encontrar o comprimento do arco AB, precisamos do ângulo desse arco, pela figura podemos encontrar $P\hat{O}A=\alpha$ usando $\cos\alpha=\dfrac{PO}{AO}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{o}$, da mesma forma podemos achar $B\hat{O}Q=\beta\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\beta=45^{o}$.

Assim, $A\hat{O}B=180^{o}-60^{o}-45^{o}=75^{o}$.

Portanto, o menor comprimento do arco AB é:

$$AB_{menor}=\frac{A\hat{O}B}{360^{o}}.2.\pi.R=\frac{75^{o}}{360^{o}}.2.\pi.2=\frac{5}{24}.4\pi\Rightarrow$$

$$\boxed{AB_{menor}=\frac{5}{6}\pi\text{ (unidades de comprimento)}}$$

O maior comprimento de AB, por sua vez, é dado por:

$$AB_{maior}=2.\pi.R-AB_{menor}=2.\pi.2-\frac{5}{6}\pi\Rightarrow$$

$$\boxed{AB_{maior}=\frac{19}{6}\pi\text{ (unidades de comprimento)}}$$

c) A área da região hachurada é a soma das áreas do triângulo APO, do triângulo OQB e do setor circular AOB.

Área de APO = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, encontrado no item (a).

Área de BOQ = $\dfrac{OQ.QB}{2}=\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Área do setor OAB = $\dfrac{A\hat{O}B}{360^{o}}.\pi.r^{2}=\dfrac{75^{o}}{360^{o}}.\pi.2^{2}=\dfrac{5}{6}.\pi$

Logo, a área da região hachurada é: $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1+\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{3\sqrt{3}+6+5\pi}{6}}$

QUESTÃO 03

Considere o sistema de equações nas variáveis *x* e *y*, dado por

$$\begin{cases}4x+2m^{2}y=0\\2mx+(2m-1)y=0\end{cases}$$

Desse modo:

a) Resolva o sistema para $m = 1$.
b) Determine todos os valores de *m* para os quais o sistema possui infinitas soluções.
c) Determine todos os valores de *m* para os quais o sistema admite uma solução da forma $(x,y)=(\alpha,1)$, sendo α um número irracional.

Resolução

a) Substituindo $m=1$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}4x+2y=0\ \ (\div 2)\\2x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=0\\2x+y=0\end{cases}$$

Ou seja, temos um sistema possível e indeterminado.

Fazendo $x=\lambda\Rightarrow y=-2\lambda$. Logo, $\boxed{S=\{(\lambda,-2\lambda),\forall\lambda\in\mathbb{R}\}}$

b) Como o sistema dado (em função de *m*) é homogêneo, ele será sempre possível, pois admite sempre a solução trivial (0,0). Nesse caso, para que ele admita infinitas soluções (sistema possível e indeterminado), o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix}4 & 2m^{2}\\2m & 2m-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -4m^{3}+8m-4=0\Rightarrow m^{3}-2m+1=0$$

É possível ver que $m=1$ é raiz da equação acima e, portanto, podemos utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para descobrir as outras duas raízes:

1	1	0	-2	1
	1	1	-1	0

Portanto, temos $m^{3}-2m+1=0\Leftrightarrow(m-1)\cdot(m^{2}+m-1)=0$, de modo que as outras duas raízes são dadas por:

$$m^{2}+m-1=0\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Assim, os valores de *m* que tornam o sistema possível e indeterminado são:

$$\boxed{m=1,\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{ ou }m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

c) Se $(x,y)=(\alpha,1)$, substituindo no sistema dado, vem que:

$$\begin{cases}4\alpha+2m^{2}=0\\2m\alpha+(2m-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=-m^{2}\\(2\alpha)\cdot m+(2m-1)=0\end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$(-m^{2})\cdot m+(2m-1)=0\Rightarrow m^{3}-2m+1=0$$

Tal equação é a mesma resolvida no item (b) e, portanto:

$$m=1\ \text{ ou }\ m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Assim, sendo $\alpha=-\dfrac{m^{2}}{2}$, substituindo cada um dos três valores de *m*, temos:

Para $m=1\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2}$, que não é irracional.

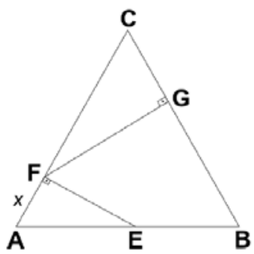
Para $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\alpha=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{4}$, que são números irracionais para ambos os sinais ($\pm$).

Logo, para que a solução do sistema linear dado seja da forma $(x,y)=(\alpha,1)$, com α irracional, devemos ter:

$$\boxed{m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{ ou }m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

QUESTÃO 04

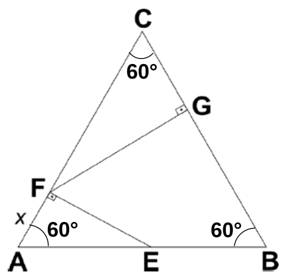
O triângulo *ABC* da figura ao lado é eqüilátero de lado 1. Os pontos *E*, *F* e *G* pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Além disso, os ângulos $A\hat{F}E$ e $C\hat{G}F$ são retos e a medida do segmento $\overline{AF}$ é *x*.



Assim, determine:
a) A área do triângulo *AFE* em função de *x*.
b) O valor de *x* para o qual o ângulo $F\hat{E}G$ também é reto.

Resolução

a) Temos que o triângulo ABC é eqüilátero, portanto os ângulos internos desse triângulo medem 60º.



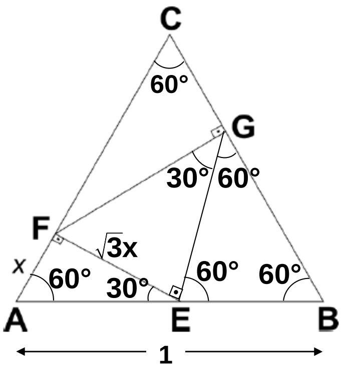
Desta forma, temos no triângulo AFE:

$$\text{tg}60^{o}=\frac{FE}{x}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{FE}{x}\Rightarrow FE=\sqrt{3}.x$$

Portanto, a área do triângulo retângulo AFE é dado por:

$$S=\frac{AF\cdot FE}{2}=\frac{x\sqrt{3}\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

b) Temos a seguinte representação para $F\hat{E}G=90^o$:



Na determinação dos ângulos, utilizamos:

$$\left.\begin{array}{l}A\hat{F}E=90^o\\ F\hat{A}E=60^o\end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{E}F=30^o$$

$$\left.\begin{array}{l}A\hat{E}F=30^o\\ F\hat{E}G=90^o\end{array}\right\}\Rightarrow G\hat{E}B=60^o$$

$$\left.\begin{array}{l}G\hat{E}B=60^o\\ E\hat{B}G=60^o\end{array}\right\}\Rightarrow E\hat{G}B=60^o$$

$$\left.\begin{array}{l}E\hat{G}B=60^o\\ C\hat{G}F=90^o\end{array}\right\}\Rightarrow F\hat{G}E=30^o$$

No triângulo AFE, temos:

$$sen30^o=\frac{x}{AE}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{x}{AE}\Rightarrow AE=2x$$

Se $AE=2x$, então $EB=AB-AE\Rightarrow\boxed{EB=1-2x}$

No triângulo GEF temos:

$$\text{tg}30^o=\frac{\sqrt{3}x}{EG}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}x}{EG}\Rightarrow\boxed{EG=3x}$$

Como o triângulo EBG é eqüilátero, $EB=EG\Rightarrow 1-2x=3x\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{5}}$

QUESTÃO 05

A soma dos cinco primeiros termos de uma *PG*, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da *PG* é igual a 3.

Nessas condições, determine:

a) A razão da *PG*.
b) A soma dos três primeiros termos da *PG*.

Resolução

a) Temos uma progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ...) de razão $q<0$.

De acordo com o enunciado, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{2}\\ a_7-a_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a_1\cdot(q^5-1)}{q-1}=\frac{1}{2}\\ a_1\cdot q^6-a_1\cdot q=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot a_1\cdot(q^5-1)=q-1\\ a_1\cdot q\cdot(q^5-1)=3\end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos: $a_1\cdot(q^5-1)=\frac{3}{q}$

Substituindo na primeira, vem que:

$$2\cdot\frac{3}{q}=q-1\Rightarrow q^2-q-6=0\Rightarrow q=-2\text{ ou }q=3$$

Como a razão da PG deve ser negativa, excluímos a possibilidade $q=3$, e ficamos com $\boxed{q=-2}$.

b) Determinemos inicialmente o primeiro termo da progressão. Como $a_1\cdot(q^5-1)=\frac{3}{q}$, substituindo a razão $q=-2$ obtida no item (a), temos:

$$a_1\cdot((-2)^5-1)=\frac{3}{-2}\Rightarrow a_1=\frac{1}{22}$$

Conseqüentemente, o segundo e o terceiro termo valem:

$$\begin{cases}a_2=a_1\cdot q=\frac{1}{22}\cdot(-2)=-\frac{2}{22}\\ a_3=a_1\cdot q^2=\frac{1}{22}\cdot(-2)^2=\frac{4}{22}\end{cases}$$

A soma pedida é dada por:

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{22}-\frac{2}{22}+\frac{4}{22}\Rightarrow\boxed{S_3=\frac{3}{22}}$$

QUESTÃO 06

Um apreciador deseja adquirir, para sua adega, 10 garrafas de vinho de um lote constituído por 4 garrafas da Espanha, 5 garrafas da Itália e 6 garrafas da França, todas de diferentes marcas.

a) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas desse lote?
b) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas do lote, sendo 2 garrafas da Espanha, 4 da Itália e 4 da França?
c) Qual é a probabilidade de que, escolhidas ao acaso, 10 garrafas do lote, haja exatamente 4 garrafas da Itália e, pelo menos, uma garrafa de cada um dos outros dois países?

Resolução

a) Para escolher 10 garrafas dentre as 15 disponíveis, temos $\binom{15}{10}=\boxed{3003\text{ possibilidades}}$.

b) O número de maneiras de escolher 2 garrafas da Espanha dentre as 4 disponíveis é $\binom{4}{2}=6$ maneiras.

O número de maneiras de escolher 4 garrafas da Itália dentre as 5 disponíveis é $\binom{5}{4}=5$ maneiras.

O número de maneiras de escolher 4 garrafas da França dentre as 6 disponíveis é $\binom{6}{4}=15$ maneiras.

Pelo princípio fundamental da contagem, para que tenhamos ao mesmo tempo 2 garrafas da Espanha, 4 garrafas da Itália e 4 garrafas da França, o número de possibilidades é dado por:

$$6\cdot5\cdot15=\boxed{450\text{ possibilidades}}.$$

c) Como já calculado no item (b), temos 5 maneiras de escolher 4 garrafas da Itália dentre as 5 disponíveis. O que resta agora escolher são as 6 garrafas restantes para formar o lote com 10 garrafas.

Para que entre essas 6 garrafas tenhamos pelo menos uma da Espanha e pelo menos uma da França, o único caso que não pode ocorrer é que as 6 garrafas restantes sejam todas da França (uma vez que não temos 6 garrafas da Espanha, apenas 4).

O número de maneiras de escolhermos 6 garrafas dentre as 10 garrafas da Espanha e da França é $\binom{10}{6}=210$ maneiras.

Somente uma dessas 210 maneiras não pode ocorrer, que é aquela em que escolhemos todas as 6 garrafas da França e nenhuma da Espanha.

Conseqüentemente, temos 210 – 1 = 209 maneiras de escolher 6 garrafas dentre os países da França e da Espanha de modo que exista pelo menos uma garrafa de cada um desses dois países.

O número de possibilidades de formar um lote com 10 garrafas, sendo 4 da Itália, e pelo menos uma de cada um dos outros dois países é dado, pelo princípio fundamental da contagem, por $5\cdot209=1045$

Assim, a probabilidade pedida *p* é: $p=\frac{1045}{3003}\Rightarrow\boxed{p=\frac{95}{273}}$

QUESTÃO 07

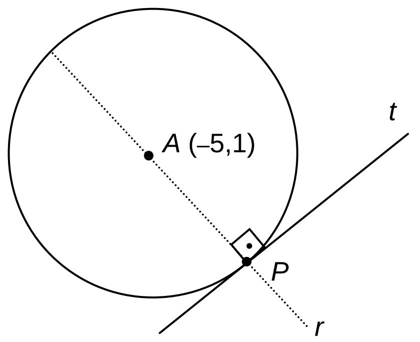
No plano cartesiano *Oxy*, a circunferência *C* tem centro no ponto $A=(-5,1)$ e é tangente à reta *t* de equação $4x-3y-2=0$ em um ponto *P*. Seja ainda *Q* o ponto de intersecção da reta *t* com o eixo *Ox*.

Assim:

a) Determine as coordenadas do ponto *P*.
b) Escreva uma equação para a circunferência *C*.
c) Calcule a área do triângulo *APQ*.

Resolução

a) A situação descrita no enunciado está esboçada na figura a seguir, onde *r* é a reta que passa pelo ponto *A* e pelo ponto *P*, sendo perpendicular à reta *t*.



A reta *t* pode ser reescrita como:

$$4x-3y-2=0\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

Em particular, seu coeficiente angular vale $m_t=\frac{4}{3}$

Sendo *r* uma reta perpendicular a *t*, segue que: $m_r=-\frac{1}{m_t}\Rightarrow m_r=-\frac{3}{4}$

Conseqüentemente, uma equação da reta *r* seria:

$$y-y_A=m_r\cdot(x-x_A)\Rightarrow y-1=-\frac{3}{4}\cdot(x+5)\Rightarrow 3x+4y+11=0$$

Como o ponto *P* é a interseção das retas *t* e *r*, temos:

$$\begin{cases}4x-3y-2=0\\3x+4y+11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{P=(-1,-2)}$$

b) A medida do raio *R* da circunferência *C* é igual à distância entre os pontos *A* e *P*, dada por:

$$R=d_{A,P}=\sqrt{(-5+1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{25}=5$$

Logo, uma equação da circunferência *C*, de centro $A=(-5,1)$ e raio $R=5$ seria:

$$C:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2\Rightarrow\boxed{C:(x+5)^2+(y-1)^2=25}$$

c) O ponto *Q* é o ponto de ordenada $y_Q=0$ na reta *t*, já que ele é a interseção de *t* com o eixo das abscissas. Assim:

$$4x_Q-3\cdot 0-2=0\Rightarrow x_Q=\frac{1}{2}\Rightarrow Q=\left(\frac{1}{2},0\right)$$

A área do triângulo *APQ* pode ser calculada a partir da relação $S_{APQ}=\frac{1}{2}\cdot|D|$, onde o determinante *D* é dado por:

$$D=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_P & y_P & 1\\ x_Q & y_Q & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{25}{2}.$$

Portanto:

$$S_{APQ}=\frac{1}{2}\cdot|D|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{25}{2}\right|\Rightarrow\boxed{S_{APQ}=\frac{25}{4}}$$

QUESTÃO 08

Para cada número real *m*, considere a função quadrática

$$f(x)=x^2+mx+2.$$

Nessas condições:

a) Determine, em função de *m*, as coordenadas do vértice da parábola de equação *y* = *f* (*x*).

b) Determine os valores de $m\in\mathbb{R}$ para os quais a imagem de *f* contém o conjunto $\{y\in\mathbb{R}:y\geq 1\}$.

c) Determine o valor de *m* para o qual a imagem de *f* é igual ao conjunto $\{y\in\mathbb{R}:y\geq 1\}$ e, além disso, *f* é crescente no conjunto $\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$.

d) Encontre, para a função determinada pelo valor de *m* do item c) e para cada $y\geq 2$, o único valor de $x\geq 0$ tal que $f(x)=y$.

Resolução

a) A abscissa do vértice de uma função $y=f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ é dada por $x_V=-\frac{b}{2a}$. Dessa forma, $x_V=-\frac{m}{2}$.

Como $y_V=f(x_V)$, temos $y_V=\left(-\frac{m}{2}\right)^2+m\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)+2=-\frac{m^2}{4}+2$

Logo, as coordenadas do vértice V da parábola são $\boxed{\left(-\frac{m}{2},-\frac{m^2}{4}+2\right)}$

b) A parábola indicada apresenta concavidade para cima (o coeficiente de x^2 é positivo). Dessa forma, apresenta ponto de mínimo, cuja ordenada é igual a $y_V=-\frac{m^2}{4}+2$.

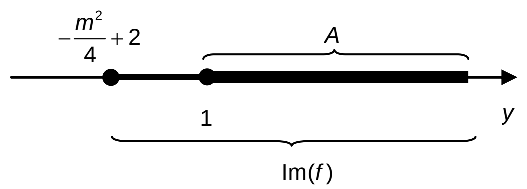
Assim, o conjunto imagem da função é dado por:

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{y\in\mathbb{R}:y\geq -\frac{m^2}{4}+2\right\}$$

Como este conjunto deve conter $A=\{y\in\mathbb{R}:y\geq 1\}$, ou seja, $\forall y\in A\Rightarrow y\in \mathrm{Im}(f)$, qualquer valor real $y\geq 1$ deve satisfazer a condição $y\geq -\frac{m^2}{4}+2$ e, assim:

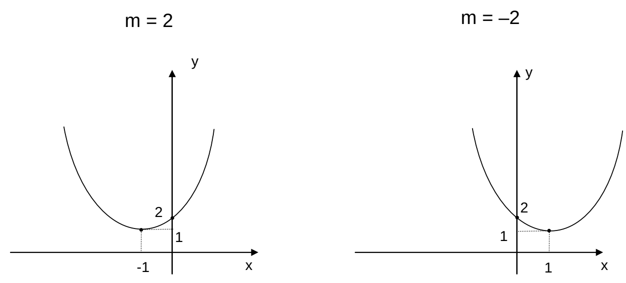
$$-\frac{m^2}{4}+2\leq 1\Rightarrow m^2-4\geq 0\Rightarrow\boxed{m\leq -2 \text{ ou } m\geq 2}$$

Esquematicamente:



c) Para que a imagem da função *f* seja $A=\{y\in\mathbb{R}:y\geq 1\}$, devemos ter $y_v=-\frac{m^2}{4}+2=1$, o que ocorre se e somente se $m=-2$ ou $m=2$.

Para estes dois valores de *m*, temos os seguintes gráficos:



Logo, apenas para $\boxed{m=2}$ a função é crescente no conjunto $\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$, enquanto que para $m=-2$, a função apresenta um trecho decrescente entre $x=0$ e $x=1$.

d) Para $m=2$, $f(x)=x^2+2x+2$. Sendo $f(x)=y$, temos:

$$x^2+2x+2-y=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot(y-1)}}{2}=-1\pm\sqrt{y-1}$$

Como $x\geq 0$, restringimos a resposta a: $\boxed{x=-1+\sqrt{y-1}}$.

QUESTÃO 09

Seja x no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ satisfazendo a equação

$$\text{tg } x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sec x = \frac{3}{2}.$$

Assim, calcule o valor de

a) $\sec x$. b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

a) Temos:

$$\text{tg } x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sec x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\text{sen } x = \frac{3}{2}\cos x - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Substituindo na relação fundamental, vem que:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\cos x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{13}{4}\cos^2 x - \frac{6}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ou } \cos x = -\frac{2}{13\sqrt{5}}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que $\cos x > 0$. Assim, descartamos o valor $\cos x = -\frac{2}{13\sqrt{5}}$, e ficamos com $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Conseqüentemente, como $\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\sec x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

b) Determinemos o valor de $\text{sen } x$:

$$\text{sen } x = \frac{3}{2}\cos x - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Assim:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

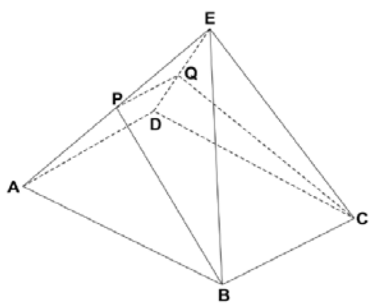
QUESTÃO 10

A figura representa uma pirâmide *ABCDE,* cuja base é o retângulo *ABCD*. Sabe-se que

$AB = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AD = BC = AE = BE = CE = DE = 1$

$AP = DQ = \frac{1}{2}$

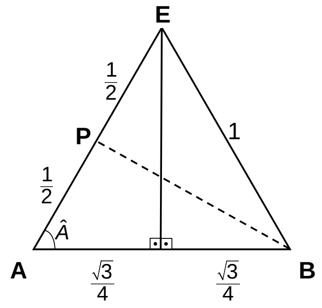


Nessas condições, determine:

a) A medida de $\overline{BP}$.
b) A área do trapézio *BCQP*.
c) O volume da pirâmide *BPQCE*.

Resolução

a) Observe o triângulo isósceles abaixo (face ABE), com $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $AE = BE = 1$:



Temos pela figura que $\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{3}/4}{1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Aplicando o Teorema dos Cossenos no triângulo APB, temos:

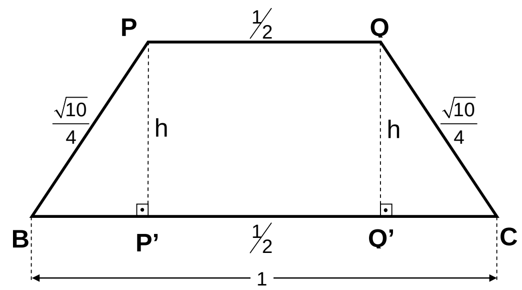
$$PB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} . \cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow PB^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow PB = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{PB = \frac{\sqrt{10}}{4}}$$

b) Como $AP = DQ = \frac{1}{2}$, temos que PQ é base média do triângulo AED. Logo, $PQ = \frac{AD}{2} = \frac{1}{2}$. Ainda temos que o trapézio BCQP é isósceles $\left(PB = QC = \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$.

Dessa forma podemos construir a seguinte figura:



Pela simetria, $P'B = Q'C = \frac{1}{2}(BC - P'Q') = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

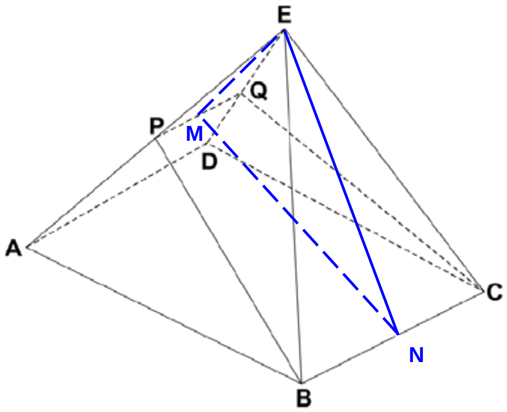
No triângulo PP´B, temos $\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{3}{4}$

Assim, a área do trapézio BCQP é igual a:

$$A_{BCQP} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}}{2} \Rightarrow \boxed{A_{BCQP} = \frac{9}{16}}$$

c) A pirâmide BPQCE tem como base o trapézio BCQP, cuja área é igual a $A_B = \frac{9}{16}$.

Para a determinação de sua altura, observe a figura a seguir:



Temos:

– EM é a altura do triângulo eqüilátero EPQ de lado $\ell = \frac{1}{2}$, cujo valor é $EM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

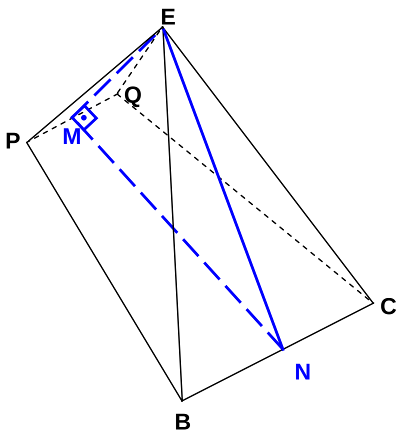
– EN é a altura do triângulo eqüilátero EBC de lado $\ell = 1$, cujo valor é $EN = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

– MN é a altura do trapézio BCQP, cujo valor, calculado anteriormente, é $MN = \frac{3}{4}$

Nota-se que $EM^2 + MN^2 = EN^2$, de modo que o ângulo $E\hat{M}N = 90^\circ$.

Além disso, $P\hat{M}E = 90^\circ$ (altura do triângulo equilátero EPQ).

Dessa forma, como o segmento EM é perpendicular a duas retas concorrentes, pertencentes ao plano no qual se encontra a base da pirâmide, ele é perpendicular a este plano. Além disso, como EM atinge o vértice, ele é a altura da pirâmide em questão, apresentando o comprimento calculado anteriormente: $EM = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Portanto, o volume desta pirâmide é igual a:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{V = \frac{3\sqrt{3}}{64}}$$