ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

ELITE RESOLVE FUVEST 2007

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br
(19) 3251 1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

Resolução

A primeira frase pode ser equacionada como:

$$A-3=L+3 \Rightarrow L=A-6 \qquad \text{(I)}$$

A segunda frase pode ser equacionada como:

$$L+\frac{1}{3}M=A+6 \qquad \text{(II)}$$

A terceira frase pode ser equacionada como:

$$(1-\frac{1}{2})A=\frac{1}{3}M \Rightarrow \frac{1}{3}M=\frac{1}{2}A \quad \text{(III)}$$

Assim, ficamos com o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} L=A-6 \\ L+\frac{1}{3}M=A+6 \\ \frac{1}{3}M=\frac{1}{2}A \end{cases}$$

Substituindo (I) e (III) em (II), vem que:

$$A-6+\frac{1}{2}A=A+6 \Rightarrow A=24$$

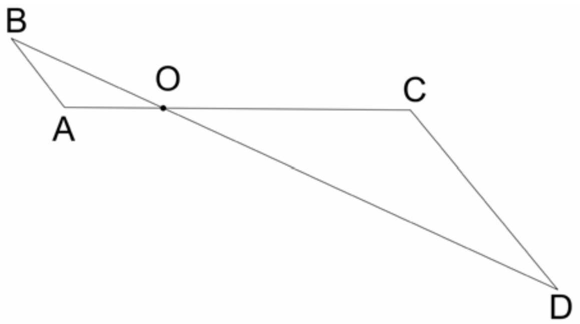
Voltando em (I) e (III), segue que:

$$L=18 \text{ e } M=36$$

Assim, **Amélia possui R$ 24,00, Lúcia possui R$ 18,00 e Maria possui R$ 36,00**.

QUESTÃO 2

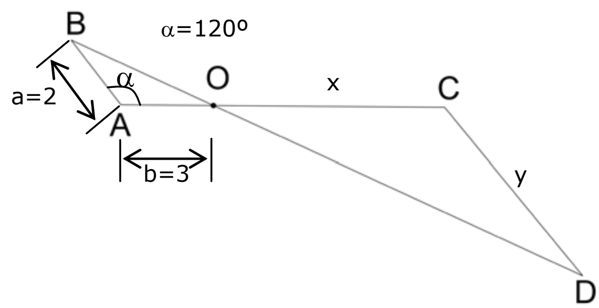
Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, o ângulo OÂB mede 120º, 3 AO = 3 e AB = 2. Sabendo-se ainda que a área do triângulo OCD vale $600\sqrt{3}$,



a) calcule a área do triângulo OAB.
b) determine OC e CD.

Resolução

a)



De acordo com a figura, podemos calcular a área do triângulo OAB pela fórmula Área= $\frac{1}{2}ab\text{sen}\alpha$, pois, por hipótese temos que:

AO=3, AB=2, α=120º ; logo, a área é de $\frac{1}{2}2.3.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Da figura, temos que os triângulos OAB e OCD são semelhantes pelo critério AA (ângulo-ângulo) de semelhança.
Sabendo que se k for a razão de semelhança dos lados, k^2 é a razão das áreas e sendo OC=x e CD=y, temos:

$$\frac{600\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\left(\frac{x}{3}\right)^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}=20 \\ \frac{y}{2}=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=60 \\ y=40 \end{cases}$$

Portanto, as medidas dos lados são: OC=60 e CD=40.

QUESTÃO 3

Em uma progressão aritmética a_1, a_2, ..., a_n, ... a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n=b\cdot n^2+n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3=7$, determine

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.
b) o 20º termo da progressão.
c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

Resolução

a) Observe que $a_3=S_3-S_2$. Assim:

$$7=(b\cdot 3^2+3)-(b\cdot 2^2+2)=5b+1 \Rightarrow b=\frac{6}{5}$$

Como $a_1=S_1-S_0 \Rightarrow a_1=S_1$, temos ainda: $a_1=\frac{6}{5}\cdot 1^2+1=\frac{11}{5}$

Portanto: $a_3=a_1+2\cdot r \Rightarrow 7=\frac{11}{5}+2\cdot r \Rightarrow r=\frac{12}{5}$

b) $a_{20}=a_1+19\cdot r=\frac{11}{5}+19\cdot\frac{12}{5}=\frac{239}{5}$

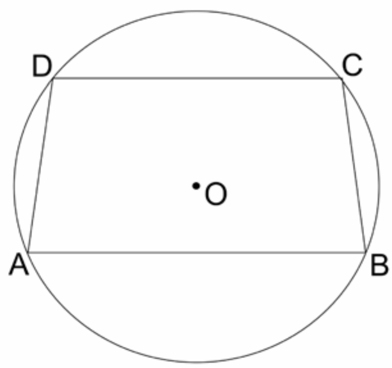
c) $S_{20}=\frac{6}{5}\cdot 20^2+20=500$

Uma outra maneira de calcular S_{20} seria:

$$S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})\cdot 20}{2}=\frac{(\frac{11}{5}+\frac{239}{5})\cdot 20}{2}=500.$$

QUESTÃO 4

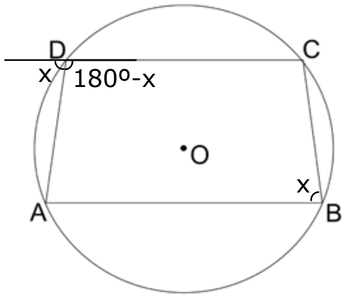
A figura representa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio.
Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e AC = $3\sqrt{2}$.



a) Determine a altura do trapézio.
b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.
c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

Resolução

Como o trapézio está inscrito na circunferência, temos que o ângulo $A\hat{B}C$ e o ângulo $A\hat{D}C$ são suplementares; logo, se $A\hat{B}C$ =x então $A\hat{D}C$ = 180º - x.



Na figura, prolongando a reta suporte do lado CD, temos que o ângulo externo de $A\hat{D}C$ mede x; portanto, por ABCD ser um trapézio, temos que $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, logo, $A\hat{B}C = D\hat{A}B = x$; assim, o trapézio é isósceles. Assim, temos que BC = AD.

a) Chamando de a o lado BC, e aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ADC e ABC, temos:

ΔADC: $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 = a^2 + 4 - 4.a.\cos(180º - x) \Rightarrow$

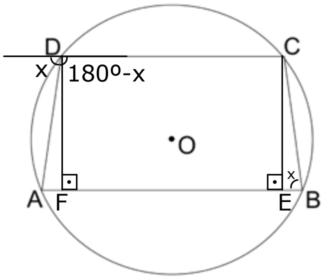
$$18 = a^2 + 4 + 4.a.\cos(x)$$

ΔABC: $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 = a^2 + 16 - 8.a.\cos x$;

Multiplicando a primeira equação por 2 e somando as duas equações, temos:

$$54 = 3a^2 + 24 \Rightarrow a = BC = \sqrt{10}\ .$$

Considere o triângulo retângulo ΔEBC da figura a seguir:



Como o trapézio é isósceles, então AF = BE, mas EF = CD = 2. Logo, AF = BE = 1. Aplicando-se pitágoras no triângulo ΔEBC, temos que a altura do trapézio, CE, vale 3.

b) Para achar o raio da circunferência, podemos usar a fórmula $S = \dfrac{abc}{4R}$, onde a,b e c são os lados de um triângulo qualquer inscrito à circunferência de raio R e S é a área do triângulo. Considere, na figura anterior, o triângulo ΔABC, no qual, a = BC = $\sqrt{10}$, b = AC = $3\sqrt{2}$ e c = AB = 4. Assim,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot CE}{2} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{4.3}{2} = \frac{\sqrt{10}.3\sqrt{2}.4}{4R} \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

c) Pela figura, a área pedida (S) é:

$S = S_{círculo} - S_{trapézio} \Rightarrow S = \pi R^2 - \dfrac{(AB + CD)}{2} \cdot CE$, então:

$$S = 5\pi - \frac{(4+2)}{2} \cdot 3 \Rightarrow S = 5\pi - 9\ .$$

QUESTÃO 5

Um arco x está no terceiro quadrante do círculo trigonométrico e verifica a equação $5 \cdot \cos 2x + 3 \cdot sen x = 4$.

Determine os valores de $sen x$ e $\cos x$.

Resolução

Fazendo a substituição da formula do arco duplo:

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot sen^2 x \text{ , temos que:}$$

$$5 \cdot (1 - 2 \cdot sen^2 x) + 3 \cdot sen x = 4 \Rightarrow$$

$$10 \cdot sen^2 x - 3 \cdot sen x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$sen x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{2 \cdot 10} = \frac{3 \pm 7}{20} \Rightarrow$$

$$sen x = \frac{1}{2} \text{ ou } sen x = -\frac{1}{5}$$

Como x é um arco do terceiro quadrante, seu seno é negativo, e portanto ficamos com: $sen x = -\dfrac{1}{5}$

Da relação fundamental, obtemos o valor de $\cos x$:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - (-\frac{1}{5})^2 = \frac{24}{25} \Rightarrow$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Novamente, como x é um arco do terceiro quadrante, seu co-seno também é negativo, e assim ficamos com:

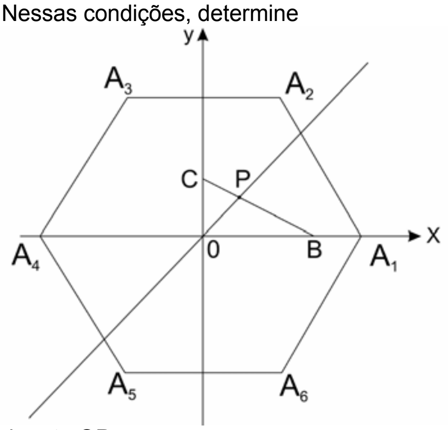
$$\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Assim, $sen x = -\dfrac{1}{5}$ e $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

QUESTÃO 6

Na figura, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 são vértices de um hexágono regular de lado 3 com centro na origem O de um sistema de coordenadas no plano. Os vértices A_1 e A_4 pertencem ao eixo x. São dados também os pontos B = (2 , 0) e C = (0 , 1).

Considere a reta que passa pela origem O e intersecta o segmento $\overline{BC}$ no ponto P, de modo que os triângulos OPB e OPC tenham a mesma área. Nessas condições, determine



a) a equação da reta OP.

b) os pontos de interseção da reta OP com o hexágono.

Resolução

a) Seja P(x,y) as coordenadas do ponto P. Assim sendo, temos que a altura do triangulo OPB é y e a altura do triangulo OPC é x; por hipótese, $A_{OPB} = A_{OPC} \Rightarrow \dfrac{2y}{2} = \dfrac{1.x}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2}$. Portanto, a equação da reta OP é $y = \dfrac{x}{2}$.

b) Os pontos de intersecção pedidos são as soluções dos sistemas formados pelas equações da reta OP e da reta A_1A_2 e pelas equações da reta OP e da reta A_4A_5.

Para obter tal sistema, determinaremos as equações das retas A_1A_2 e A_4A_5:

Como o hexágono é regular, tais retas são paralelas, e portanto os coeficientes angulares são iguais. Observando a figura dada, tal coeficiente é igual a tg 120º; assim, m= $-\sqrt{3}$. Logo,

A_1A_2 : y= $-\sqrt{3}$ (x – 3);

A_4A_5 : y= $-\sqrt{3}$ (x + 3), já que a reta A_1A_2 passa pelo ponto (3,0) e a reta A_4A_5 passa pela reta (-3,0).Com isso,

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = -\sqrt{3}(x-3) \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3(6-\sqrt{3})}{11} \\ x = \dfrac{6(6-\sqrt{3})}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = -\sqrt{3}(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3(\sqrt{3}-6)}{11} \\ x = \dfrac{6(\sqrt{3}-6)}{11} \end{cases}$$

Logo, os pontos de intersecção são:

$$\left(\frac{6(6-\sqrt{3})}{11}, \frac{3(6-\sqrt{3})}{11}\right) \text{ e } \left(\frac{6(\sqrt{3}-6)}{11}, \frac{3(\sqrt{3}-6)}{11}\right).$$

QUESTÃO 7

Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.
b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

Resolução

a) Para retirarmos, **na ordem**, 2 bolas pretas e 1 bola branca, sem reposição, a probabilidade seria:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{56}$$

Como a retirada da bola branca pode se dar em 3 posições distintas (em primeiro, segundo ou terceiro), multiplicamos:

$$3\cdot\frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

b) Queremos encontrar a probabilidade do evento do item anterior, a que chamaremos evento A, dado que as três bolas retiradas não são da mesma cor (a que chamaremos de evento B), ou seja, uma probabilidade condicional de A acontecer, dado que B aconteceu.

Nesse caso, temos: $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$

A probabilidade de retirarmos três bolas da mesma cor (evento complementar a B) é:

$$p(B^C) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{56}$$

Desse modo, a probabilidade do evento B ocorrer é:

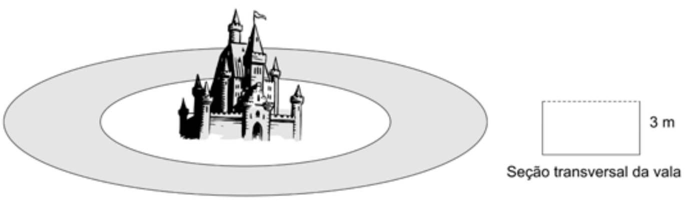
$$p(B) = 1 - p(B^C) = 1 - \frac{11}{56} = \frac{45}{56}$$

Agora como o evento A é um caso particular do evento B, ou seja, como $A \subset B$, temos que $A \cap B = A$. Assim:

$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{45}{56}} = \frac{1}{3}$$

QUESTÃO 8

Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é constante e igual a 3 m.



O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.
Determine o número mínimo de caminhões-pipa necessário para encher completamente a vala.

Resolução

Vala: Observando a seção transversal da vala, note que esta é um sólido cuja base é a coroa circular que circunda a torre (raio entre 41 m e 45 m) e cuja altura é 3 m.
Logo, $V_{vala} = \pi(r_{maior} - r_{menor}).h = \pi(45^2 - 41^2).3 = 1032\pi\ m^3$.

Caminhão: O volume de água por caminhão-pipa é o volume de um cilindro circular reto cujo raio da base mede 1,5 m e altura 8 m.
Logo, $V_{caminhão} = \pi r^2.h = \pi(1,5)^2.8 = 18\pi\ m^3$.

Assim, para encher completamente a vala, serão necessários **x** caminhões tais que:

$$\boldsymbol{x} = \frac{V_{vala}}{V_{caminhao}} = \frac{1032\pi}{18\pi} \Rightarrow \boldsymbol{x} = 57,333....$$

Portanto serão necessários 58 caminhões-pipa.

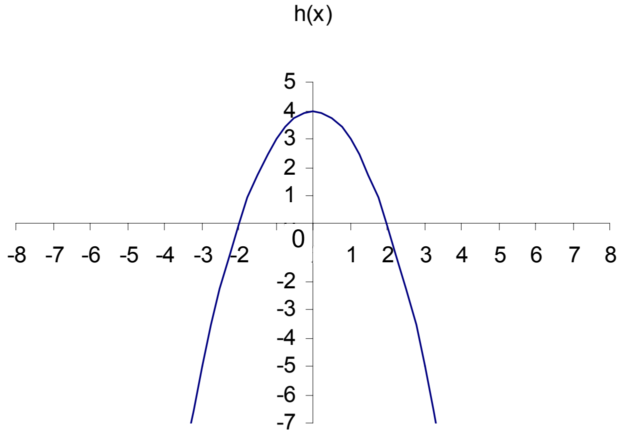
QUESTÃO 9

a) Represente, no sistema de coordenadas desenhado na folha de respostas, os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \dfrac{x+7}{2}$.

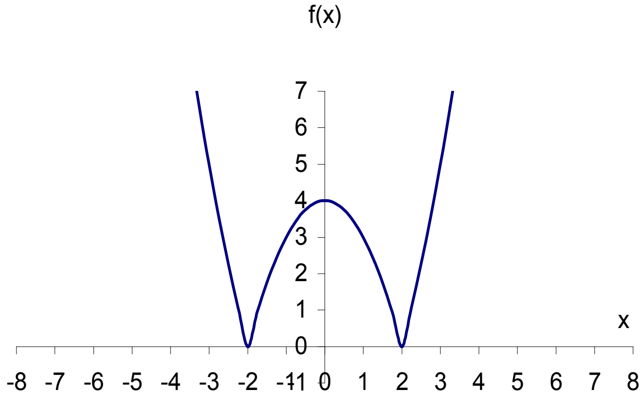
b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \le \dfrac{x+7}{2}$.

Resolução

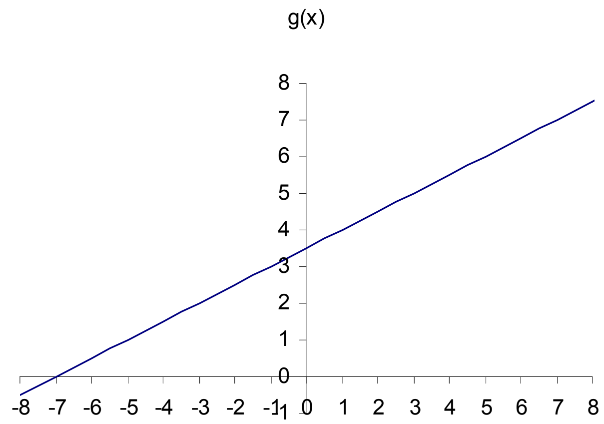
O gráfico da função $h(x) = 4 - x^2$ é:



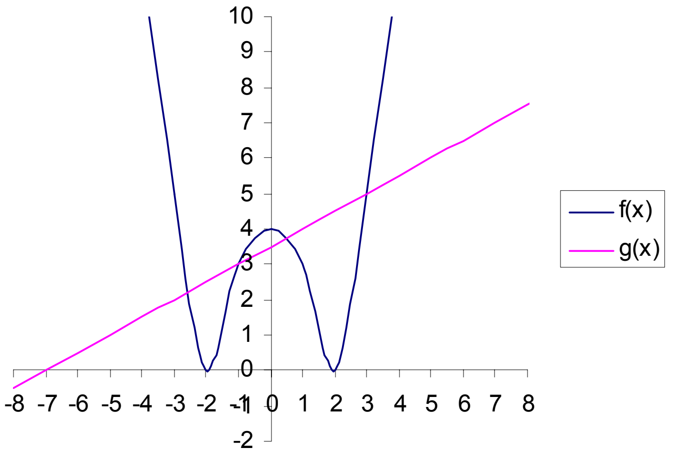
Para obtermos o gráfico da função $f(x) = |h(x)|$, rebatemos as imagens negativas, usando o eixo das abscissas como espelho. Assim:



O gráfico da função $g(x) = \dfrac{x+7}{2}$ é:



Colocando os dois gráficos num mesmo sistema de coordenadas, temos então:



b) Vamos determinar os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções, ou seja, os pontos onde $f(x)=g(x)$. Devemos resolver $|4-x^2|=\frac{x+7}{2}$.

(I) Para $x\le -2$ ou $x\ge 2$, temos que $4-x^2\le 0$, portanto, nestes intervalos, $|4-x^2|=x^2-4$

$$|4-x^2|=\frac{x+7}{2}\Rightarrow x^2-4=\frac{x+7}{2}\Rightarrow 2\cdot x^2-x-15=0$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-15)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 11}{4}\Rightarrow$$

$x=-\frac{5}{2}$ ou $x=3$, e esses dois valores satisfazem o intervalo considerado ($x\le -2$ ou $x\ge 2$).

(II) Para $-2\le x\le 2$, temos que $4-x^2\ge 0$, portanto, neste intervalo: $|4-x^2|=4-x^2$

$$|4-x^2|=\frac{x+7}{2}\Rightarrow 4-x^2=\frac{x+7}{2}\Rightarrow 2\cdot x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow$$

$x=-1$ ou $x=\frac{1}{2}$, e também esses dois valores satisfazem o intervalo considerado ($-2\le x\le 2$).

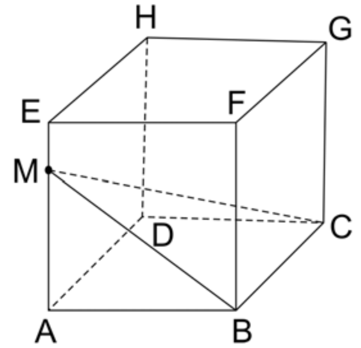
(III) Assim, os quatro valores de x onde ocorre intersecção dos gráficos das duas funções são, na ordem: $-\frac{5}{2};-1;\frac{1}{2};3$

Agora fica simples resolver a inequação $|4-x^2|\le\frac{x+7}{2}$. Queremos determinar os valores de x para os quais o gráfico de f está abaixo do gráfico de g. Observando o gráfico, podemos notar que isso acontece nos intervalos $[-\frac{5}{2};-1]$ e $[\frac{1}{2};3]$, portanto, o conjunto-solução procurado é: $S=[-\frac{5}{2};-1]\cup[\frac{1}{2};3]$, que também pode ser expresso como:

$$S=\{x\in R/-\frac{5}{2}\le x\le -1 \ \ ou \ \ \frac{1}{2}\le x\le 3\}$$

QUESTÃO 10

O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento *a*. O ponto M está na aresta $\overline{AE}$ e $\overline{AM}=3\ \overline{ME}$.



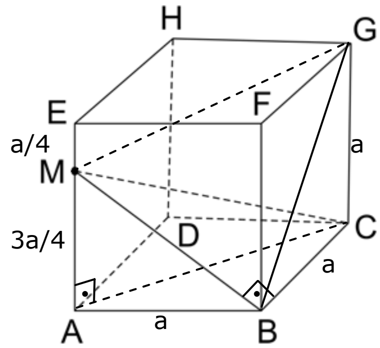
Calcule:
a) O volume do tetraedro BCGM.
b) A área do triângulo BCM.
c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento $\overline{CM}$.

Resolução

Para o cubo de aresta *a*, como $\overline{AM}=3\ \overline{ME}$ temos por hipótese:

$$\overline{AM}+\overline{ME}=a\Rightarrow 3\cdot\overline{ME}+\overline{ME}=a\Rightarrow\begin{cases}\overline{ME}=\frac{a}{4}\\ \overline{AM}=\frac{3a}{4}\end{cases}$$

a) Observe a figura:



O tetraedro BGCM tem como base o triangulo retângulo BCG, cuja área é $\frac{a^2}{2}$ e altura a distância do ponto M ao plano determinado pelos vértices B,C e G; logo, a altura é a;

Assim, o volume é: $V=\frac{1}{3}.S_B.h=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a\Rightarrow V=\frac{a^3}{6}$.

b) Como $\overline{BM}$ é a hipotenusa do triangulo retângulo BAM, logo,

$$\overline{BM}=\sqrt{(\overline{AB})^2+(\overline{AM})^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2}\Rightarrow\overline{BM}=\frac{5a}{4}.$$

Visto que o triangulo BCM é retângulo em B, sua área é dada por $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BM}}{2}$. Portanto, $A_{BCM}=\frac{1}{2}.a.\frac{5a}{4}=\frac{5a^2}{8}$

c) A distância d pedida é a altura relativa ao lado $\overline{CM}$ no triângulo BCM.
Assim, podemos calcular a área obtida no item b por outra maneira:

$$A_{BCM}=\frac{\overline{CM}.d}{2}.$$

Como $\overline{CM}$ é a hipotenusa do triangulo retângulo ACM, temos:

$$\overline{CM}=\sqrt{\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{AM}\right)^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2}\Rightarrow\overline{CM}=\frac{a\sqrt{41}}{4}.$$

Logo, $A_{BCM}=\frac{5a^2}{8}=\frac{\overline{CM}.d}{2}\Rightarrow d=\frac{5a^2}{4\overline{CM}}\Rightarrow d=\frac{5a\sqrt{41}}{41}$.