ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

O ELITE RESOLVE

FUVEST 2005
2ª FASE - MATEMÁTICA

"Se os seus sonhos estiverem nas nuvens, não se preocupe, pois eles estão no lugar certo. Agora construa os alicerces."
William Shakespeare

www.elitecampinas.com.br (19) 3251-1012

MATEMÁTICA

1. Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto *A*, pagando R$ 96,00, e unidades do produto *B*, pagando R$ 84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto *A* excede em R$ 2,00 o preço unitário do produto *B*, determine o número de unidades de *A* que foi comprado.

SOLUÇÃO:
Seja:
a = número de unidades do produto A
b = número de unidades do produto B
x = preço unitário do produto A
y = preço unitário do produto B

Pelos dados do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a+b=26 \\ ax=96 \\ by=84 \\ x=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=26-a \\ a(y+2)=96 \\ by=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{96}{a}-2 \\ (26-a)y=84 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (26-a)\left(\frac{96}{a}-2\right)=84 \Rightarrow (26-a)(96-2a)=84a$$

$$\Rightarrow 2496-148a+2a^2=84a$$

$$\Rightarrow a^2-116a+1248=0 \Rightarrow a=104\ (\text{não convém})\ \text{ou}\ a=12$$

Portanto, foram compradas 12 unidades de A.

2. Diz-se que a matriz quadrada *A* tem **posto** 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de *a*, *b* e *c* para os quais a matriz 3x3

$$A=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a-b+2c & 1 & 6 \\ b+c-3a & \frac{1}{2} & c-2a+b \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

SOLUÇÃO:
Para a matriz A ter posto 1, a sua 2ª linha deve ser igual a 2 vezes a 1ª linha (pois já possui alguns elementos que são o dobro da 1ª linha), e a sua 3ª linha deve ser igual a 1ª linha (pois já possui 1 elemento que é igual à 1ª linha). Assim, temos que:

$$\begin{cases} 3a-b+2c=4 \\ b+c-3a=2 \\ c-2a+b=3 \end{cases}$$

Somando-se a 1ª e a 2ª linha e subtraindo-se a 3ª da segunda, vem:

$$\begin{cases} 3a-b+2c=4 \\ 3c=6 \\ -a=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases}}$$

3. Uma seqüência de números reais a_1, a_2, a_3, ... satisfaz à lei de formação
$a_{n+1} = 6a_n$, se n é ímpar
$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$, se n é par.
Sabendo-se que $a_1=\sqrt{2}$
a) escreva os oito primeiros termos da seqüência.
b) determine a_{37} e a_{38}.

SOLUÇÃO:
a) Temos que: $\begin{cases} a_{n+1}=6a_n,\ \text{se n é impar} \\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n,\ \text{se n é par} \end{cases}$ e que $a_1=\sqrt{2}$. Logo:

$$a_2=6a_1 \Rightarrow a_2=6\sqrt{2} \qquad a_3=\frac{1}{3}a_2 \Rightarrow a_3=2\sqrt{2}$$

$$a_4=6a_3 \Rightarrow a_4=12\sqrt{2} \qquad a_5=\frac{1}{3}a_4 \Rightarrow a_5=4\sqrt{2}$$

$$a_6=6a_5 \Rightarrow a_6=24\sqrt{2} \qquad a_7=\frac{1}{3}a_6 \Rightarrow a_7=8\sqrt{2}$$

$$a_8=6a_7 \Rightarrow a_8=48\sqrt{2}$$

b) os termos ímpares dessa seqüência formam uma PG de razão 2 e primeiro termo igual a $\sqrt{2}$. Já os termos pares formam uma PG de razão 2 e primeiro termo igual a $6\sqrt{2}$. Assim, usando a equação do termo geral da PG, podemos definir os termos dessa seqüência como sendo:

$$\begin{cases} a_{2k-1}=2^{k-1}\cdot\sqrt{2} \\ a_{2k}=6.2^{k-1}.\sqrt{2} \end{cases},k=0,1,2,...$$

(note que a_{2k-1} é o k-ésimo termo da PG dos termos ímpares e que e a_{2k} é o k-ésimo termo da PG dos termos pares)
Assim, temos que:

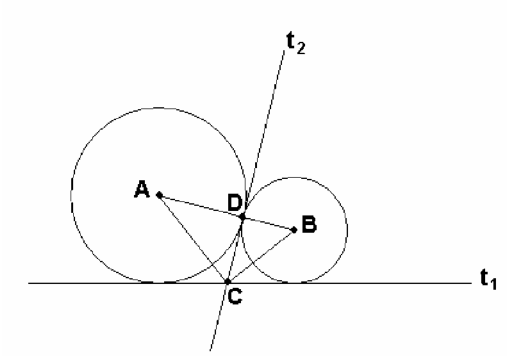
$$a_{37}=a_{2.19-1}=2^{19-1}\cdot\sqrt{2}=2^{18}\sqrt{2}$$

$$a_{38}=a_{2.19}=6.2^{19-1}\cdot\sqrt{2}=6.2^{18}\sqrt{2}=3.2^{19}\sqrt{2}$$

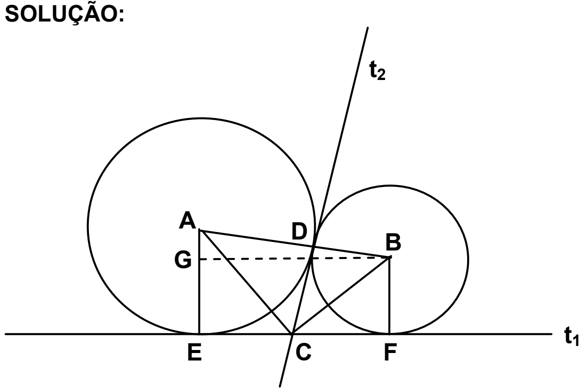
4. A figura representa duas circunferências de raios *R* e *r* com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D. Suponha que:

i. As retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C.
ii. A reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.

Calcule a área do triângulo ABC, em função dos raios *R* e *r*.



SOLUÇÃO:



Sejam E e F respectivamente, os pontos de tangência das circunferências de raios R e r com a reta t_1 e G a projeção do ponto B sobre o segmento AE. Assim, Temos que:

AE = R, BF = r e AG = R – r

Como CD, CE e CF são segmentos tangentes às circunferências, temos que eles têm a mesma medida. Seja x essa medida. Temos que EF = 2x, logo, GB = 2x.
No triângulo retângulo AGB, temos:

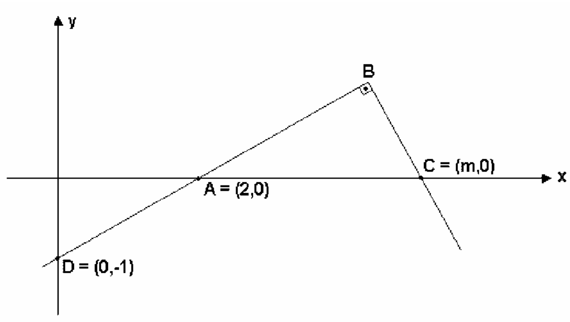
$$AG^2+GB^2=AB^2 \Rightarrow (R-r)^2+(2x)^2=(R+r)^2 \Rightarrow 4x^2=(R^2+2Rr+r^2)-(R^2-2Rr+r^2)$$

$$\Rightarrow 4x^2=4Rr \Rightarrow x=\sqrt{Rr}$$

Assim, considerando AB como a base e CD a altura do triângulo ABC, temos:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{(R+r)\cdot\sqrt{Rr}}{2}}$$

5. Na figura abaixo A, B e D são colineares e o valor da abscissa m do ponto C é positivo. Sabendo-se que a área do triângulo retângulo ABC é 5⁄2, determine o valor de m.



SOLUÇÃO:
Utilizando os pontos A e D, podemos obter a equação da reta AD:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AD: x - 2y - 2 = 0$$

Como B pertence à reta AD, B pode ser escrito na forma: B(2a + 2, a).
O coeficiente angular da reta AD é igual a ½ , assim, como BC é perpendicular a AD, temos que $m_{BC} = -\frac{1}{1/2} = -2$.

$$m_{BC} = -2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-a}{m-(2a+2)} \Rightarrow a = 2(m-2a-2) \qquad \textbf{(1)}$$

No triângulo ABC, temos que a base AC vale (m – 2) e a altura é a distância de B ao eixo x, que vale *a*. Assim, temos:

$$S_{ABC} = \frac{5}{2} = \frac{(m-2)\cdot a}{2} \Rightarrow 5 = (m-2)\cdot a \qquad \textbf{(2)}$$

Assim, de (1) e (2), temos:

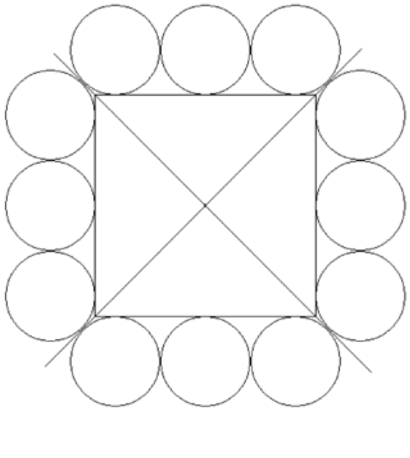
$$\begin{cases} a = 2(m-2a-2) \\ 5 = (m-2)\cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2(m-2-2a) \\ (m-2) = \frac{5}{a} \end{cases} \Rightarrow a = 2\left(\frac{5}{a} - 2a\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{a} - 4a \Rightarrow 5a = \frac{10}{a} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \ (a > 0)$$

Como $a = \sqrt{2}$, temos que:

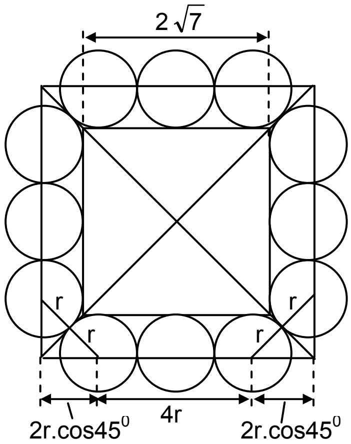
$$m - 2 = \frac{5}{a} \Rightarrow m = \frac{5}{\sqrt{2}} + 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2}$$

6.



Na figura anterior, as 12 circunferências têm todas o mesmo raio *r*, cada uma é tangente a duas outras e ao quadrado. Sabendo-se que cada uma das retas suporte das diagonais do quadrado tangencia quatro das circunferências (ver figura), e que o quadrado tem lado $2\sqrt{7}$, determine *r*.

SOLUÇÃO:



Da figura , se unirmos os centros das 3 circunferências tangentes a cada lado do quadrado, e tomarmos o quadrilátero formado por esses segmentos, temos um quadrado de lado 4r + 2 $\sqrt{2}$ r ; de acordo com a mesma figura, o lado do quadrado pode ser expresso pela soma: 2r + 2 $\sqrt{7}$;

Logo:

$$4r + 2\sqrt{2}\,r = 2r + 2\sqrt{7} \Rightarrow 2r + 2\sqrt{2}\,r = 2\sqrt{7} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}.$$

7. Determine todos os valores de *x* pertencentes ao intervalo [0, 2π] que satisfazem a equação

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 x$$

SOLUÇÃO:
Da equação, temos:

$$\cos^2 2x = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}{2} \Rightarrow 2\cos^2 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 2\cos^2 2x = \cos 2x$$

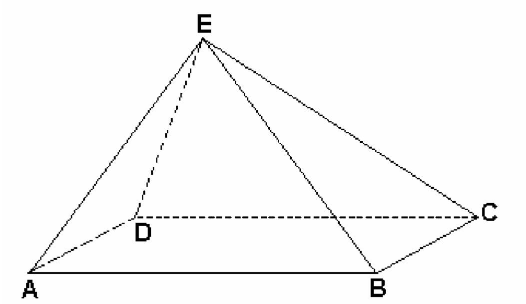
$$\Rightarrow \cos 2x \,.\, (2\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$; Assim, para k inteiro e x ∈ [0, 2π],

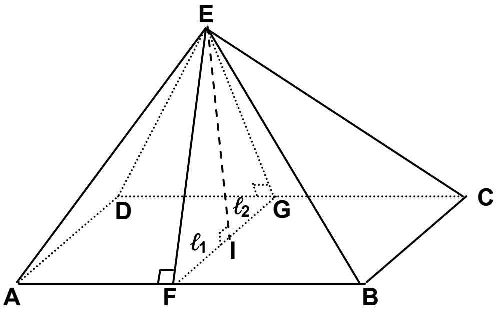
temos: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}}.$$

8. A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados AB = 4 e BC = 3. As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



SOLUÇÃO:



O volume da pirâmide é $V_{pirâmide} = \frac{A_{base}.h}{3} = \frac{4.3.EI}{3} = 4.EI$ **(1)**

A área do triângulo ABE é: $A_{\Delta ABE} = 4\sqrt{10} = \frac{AB \cdot EF}{2} = \frac{4 \cdot EF}{2} \Rightarrow$

$EF = 2\sqrt{10}$ **(2)**

A área do triângulo CDE é: $A_{\Delta CDE} = 2\sqrt{37} = \frac{CD \cdot EG}{2} = \frac{4 \cdot EG}{2} \Rightarrow$

$EG = \sqrt{37}$ **(3)**

Logo, usando (1) e (2) nos triângulos EIF e EIG, temos:

$EI^2 + IF^2 = EF^2 = (2\sqrt{10})^2 = 40$ **(4)**

$EI^2 + IG^2 = EG^2 = (\sqrt{37})^2 = 37$ **(5)**

Subtraindo as equações (4) e (5), vem:

$IF^2 - IG^2 = 40 - 37 = 3 \Rightarrow (IF + IG)(IF - IG) = 3 \Rightarrow FG(IF - IG) = 3$

Mas FG = BC = 3, portanto: IF – IG = 1 e IF + IG = 3, então

IF = 2 e IG = 1, portanto, usando a equação (5):

$EI^2 = 37 - 1^2 \Rightarrow EI = 6$

Aplicando-se este resultado na equação (1), temos $\boxed{V_{pirâmide} = 24}$

9. Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, onde *a* é um número real diferente de zero. Determine os valores de *a* para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

SOLUÇÃO:

Para que x pertença ao intervalo fechado entre as raízes, é necessário que o valor da função no ponto 3 , que é f(3) = 6a+4, tenha sinal contrário da concavidade da função do segundo grau ou f(3) = 0; logo,

$a.f(3) \leq 0 \Rightarrow a.(6a+4) \leq 0 \Rightarrow 6a^2 + 4a \leq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{-2}{3} \leq a < 0}$.

10. Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos.

SOLUÇÃO:

Seja o conjunto {a, b, c, d}, o conjunto dos resultados dos 4 lançamentos do dado. Pelo enunciado, temos que o subconjunto {a, b} $\neq$ {c , d}. Assim, temos 4 possibilidades:

I) a = b e c = d $\Rightarrow$ P(a = b e c = d) = $\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} = \frac{30}{1296}$;

II) a = b e c ≠ d $\Rightarrow$ P (a = b e c ≠ d) = $\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6} = \frac{120}{1296}$;

III) a ≠ b e c = d $\Rightarrow$ P (a ≠ b e c = d) = $\frac{6}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6} = \frac{120}{1296}$; e

IV) a ≠ b e c ≠ d $\Rightarrow$ P (a ≠ b e c ≠ d) = $\frac{6}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{6} = \frac{360}{1296}$.

Logo, a probabilidade que satisfaz a condição é a soma das 4 probabilidades:

$$P = \frac{30+120+120+360}{1296} = \frac{630}{1296} = \frac{35}{72}.$$