O Elite Resolve

ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

Você na elite das universidades!

FUVEST 2004

SEGUNDA FASE

MATEMÁTICA

✓ *MATEMÁTICA*

1. O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2.
Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

SOLUÇÃO:
Sendo M_1 a média de gols na 1ª rodada, temos:

$$M_1 = \frac{5+3+1+4+0+2}{6} = 2{,}5$$

Seja M a média de gols nas 1ª e 2ª rodadas. Logo:

$$M = M_1 + 0{,}2\,M_1 \Rightarrow M = 2{,}5 + 0{,}2 \cdot 2{,}5 = 3{,}0$$

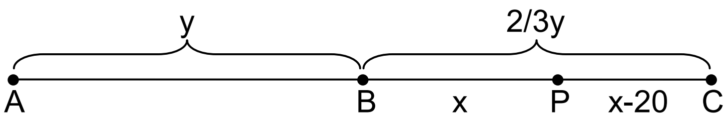
Portanto, $\frac{S_1 + S_2}{11} = 3$, onde S_1 é o total de gols na 1ª rodada, e S_2 o total de gols na 2ª rodada.
Assim, temos:

$$\frac{15 + S_2}{11} = 3 \Rightarrow S_2 = 18$$

Logo, devem ser marcados 18 gols na segunda rodada.

2. Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

SOLUÇÃO:



De acordo com a figura acima, temos:

$d_{AB} = y$ $d_{BC} = (2/3)y$ $d_{BP} = x$ $d_{PC} = x - 20$ $d_{AP} = y + x$

Como $d_{BC} = d_{BP} + d_{PC}$, temos então:

$$d_{BC} = d_{BP} + d_{PC} \Rightarrow (2/3)y = x + x - 20 \Rightarrow y = 3x - 30.$$

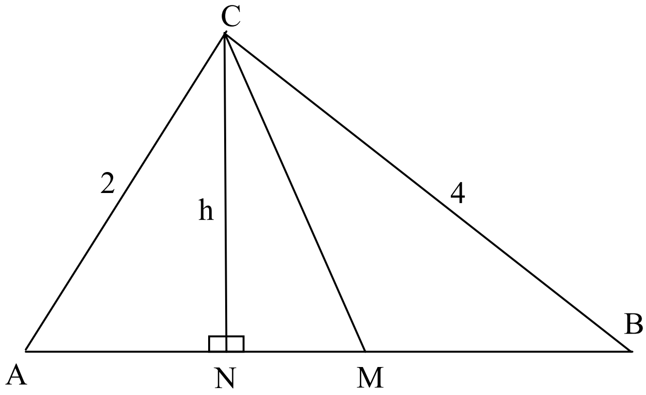
Além disso, $d_{AP} = d_{AB} + d_{BP}$, logo:

$$d_{AP} = d_{AB} + d_{BP} \Rightarrow 210 = y + x = 3x - 30 + x \Rightarrow 210 = 4x - 30$$
$$\Rightarrow x = 60$$

Portanto, a distancia a ser percorrida é de 60 km.

3. Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.
Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

SOLUÇÃO:



Pela figura acima, temos que:

$$h^2 = 2^2 - AN^2 \quad \text{e} \quad h^2 = 4^2 - (5 - AN)^2$$

Utilizando essas 2 igualdades:

$$2^2 - AN^2 = 4^2 - (5 - AN)^2 \Rightarrow AN = 13/10.$$

Assim, aplicando o Teorema da bissetriz interna no ΔABC, temos que:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{13/10 + MN}{2} = \frac{5 - 13/10 - MN}{4} \Rightarrow MN = \frac{11}{30}$$

4. Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo z.
a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.
b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando α = 0.

SOLUÇÃO:
a) Seja z = x + yi. Assim:

$$z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z} \Rightarrow (x + yi)^2 = \alpha(x + yi) + (\alpha - 1)(x - yi)$$
$$\Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = \alpha x + i\alpha y + \alpha x - i\alpha y - x + iy$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\alpha x - x \\ 2xy = y \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Se y = 0:

$$x^2 = 2\alpha x - x$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\alpha - 1$$

Se x = ½:

$$\frac{1}{4} - y^2 = \alpha - \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} - \alpha \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{4} - \alpha}$$

Para que se tenha 4 raízes distintas, devemos ter y real, logo:

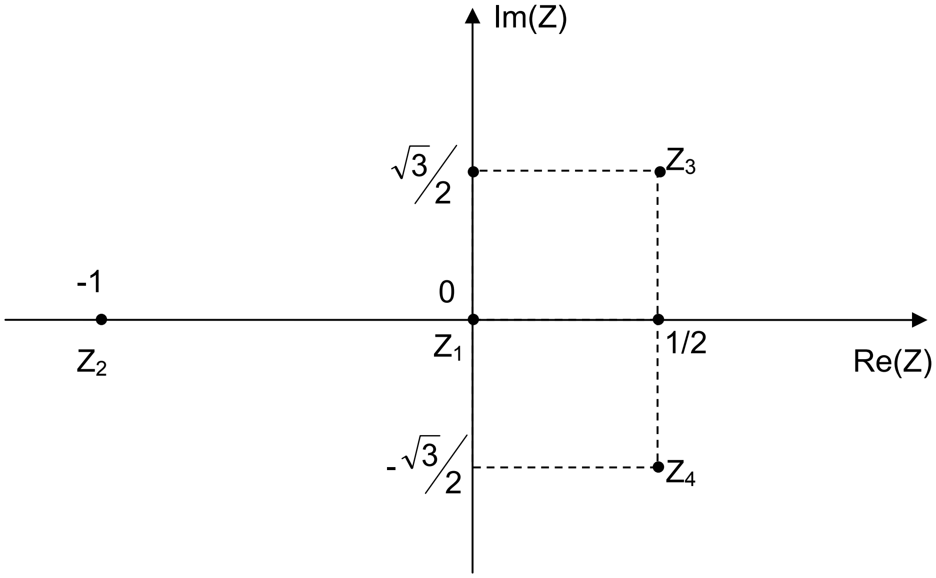
$$\frac{3}{4} - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{3}{4}$$

b) Se α = 0, temos que:
Para y = 0:

$$z_1 = 0 + 0\,i = 0 \qquad\qquad z_2 = (2\cdot 0 - 1) + 0i = -1$$

Para x = ½:

$$z_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad\qquad z_4 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



5. O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a –1. Determinar
a) o valor de m.
b) as raízes de p.

SOLUÇÃO:
a) Sejam a, b e c as raízes de p(x), com $a \cdot b = -1$. Assim, pelas relações de Girard, temos que:

$$a \cdot b \cdot c = -\frac{3}{2} \Rightarrow -c = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Logo, $\frac{3}{2}$ é uma raiz de p(x), então:

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0 \Rightarrow m = 7$$

b) $\frac{3}{2}$ é raiz de $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

3/2	2	-7	4	3
	2	-4	-2	0

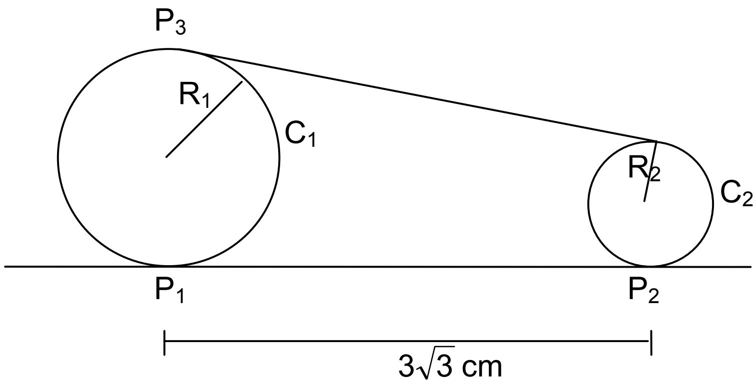
Assim, as outras duas raízes são da equação $2x^2 - 4x + 2 = 0$:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \sqrt{2}$$

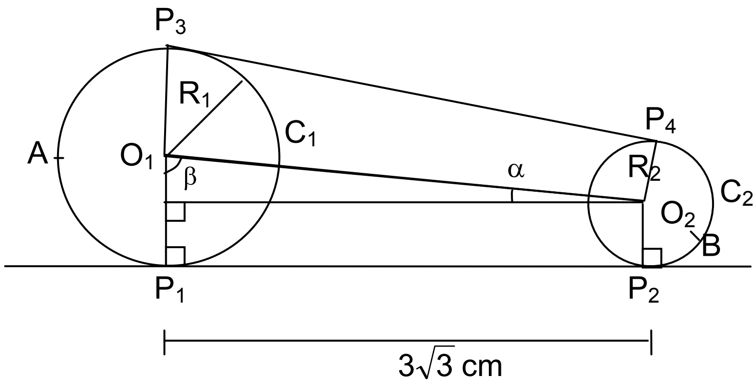
Portanto:

$$S = \left\{\frac{3}{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$$

6. A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.



SOLUÇÃO:



Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1 e C_2, respectivamente. Temos:

$O_2B // P_1P_2$ $\qquad$ $O_2B = 3\sqrt{3}$ $\qquad$ $O_1B = 4 - 1 = 3$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔO_1BO_2:

$$(O_1B)^2 + (O_2B)^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = (O_1O_2)^2 \Rightarrow O_1O_2 = 6$$

O quadrilátero $O_1P_1P_2O_2$ é congruente ao quadrilátero $P_3O_1O_2P_4$, logo, $P_3P_4 = 3\sqrt{3}$.

Ainda no ΔO_1BO_2, temos que:

$$\text{sen}\alpha = O_1B/O_1O_2 = 3/6 = 1/2 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Desse modo, temos que:

$$P_3\hat{O}_1O_2 = 60^\circ$$

Então:

$$P_3AP_1 = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$$

$$P_2\hat{O}_2O_1 = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ = P_4\hat{O}_2O_1$$

Então:

$$P_4BP_2 = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$$

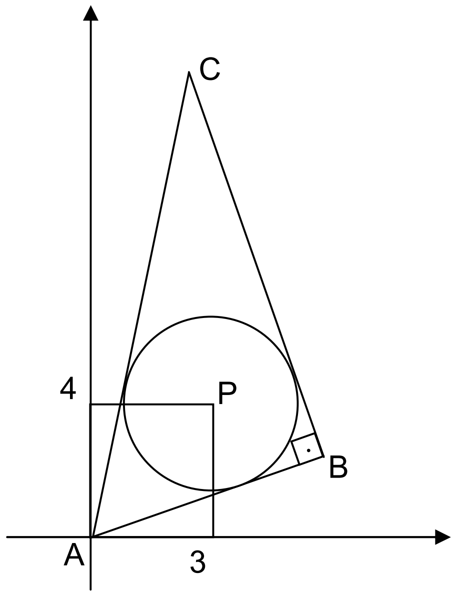
Assim, o comprimento da correia será:

$$C = P_3AP_1 + P_1P_2 + P_3AP_1 + P_4P_3$$

$$\Rightarrow C = (240^\circ/360^\circ)\cdot 2\pi\cdot 4 + 3\sqrt{3} + (120^\circ/360^\circ)\cdot 2\pi\cdot 1 + 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow C = 6\pi + 6\sqrt{3} \Rightarrow C = 6\left(\pi + \sqrt{3}\right)\text{cm}$$

7. Na figura ao lado, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto. Sabendo-se que A = (0,0), B pertence à reta x – 2y = 0 e P = (3,4) é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas
a) do vértice B.
b) do vértice C.



SOLUÇÃO:
a) A distância de P à reta AB: x – 2y = 0 é igual ao raio da circunferência. Assim, temos que o raio vale:

$$R = d_{P,\overline{AB}} = \frac{|3 - 2.4|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$$

Como BC é perpendicular à AB, temos que BC é da forma 2x + y + c = 0.
A distância de P até a reta BC também será igual ao raio, logo:

$$d_{P,\overline{BC}} = \frac{|2.3 + 4 + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |10 + c| = 5 \Rightarrow c = -5 \text{ ou } c = -15$$

Assim, temos que BC: 2x + y – 15 = 0
(BC: 2x + y – 5 = 0 não convém, pois essa reta corta o eixo x no ponto (5/2, 0), o que não satisfaz a figura.)
Fazendo então a intersecção das retas AB e BC:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 3$$

Logo, B = (6, 3).

b) A reta AC é da forma y = mx, ou seja, mx – y = 0. A distância de P à reta AC também é igual ao raio da circunferência, logo:

$$d_{P,\overline{AC}} = \frac{|3m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \Rightarrow 9m^2 - 24m + 16 = 5m^2 + 5$$

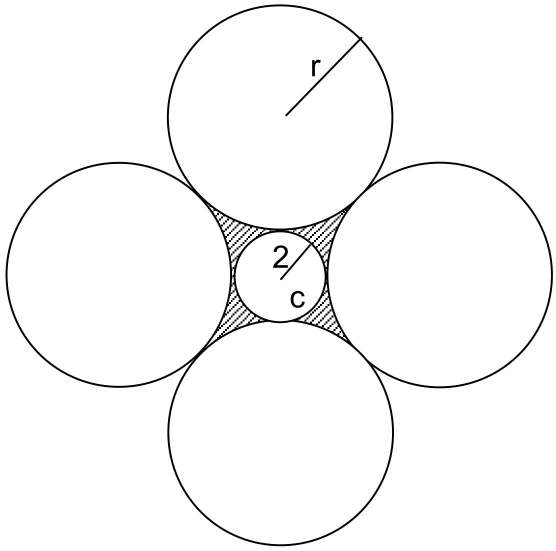
$$\Rightarrow 4m^2 - 24m + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 11/2 \\ m = 1/2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, temos que AC: y = (11/2)x. Fazendo a intersecção de AC com BC:

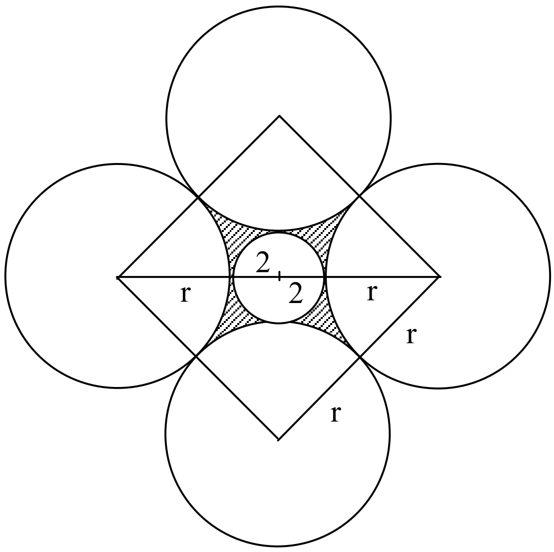
$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{2}x \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 11$$

Logo, C = (2, 11).

8. Na figura ao lado, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C. Se o raio de C é igual a 2, determinar
a) o valor de r.
b) a área da região hachurada.



SOLUÇÃO:



a) Unindo os centros das 4 circunferências da figura, obtemos um quadrado de lado 2r, e diagonal 2r + 4. Como a diagonal de um quadrado de lado 2r vale $2r\sqrt{2}$, temos que:

$$2r\sqrt{2} = 2r + 4$$
$$\Rightarrow r(\sqrt{2}-1) = 2$$
$$\Rightarrow r = 2(\sqrt{2} + 1)$$

b) A área da região hachurada será igual a área do quadrado de lado 2r, retirando as áreas dos 4 setores circulares de raio r e ângulo = 90º e do círculo de raio 2. Assim, temos que a área pedida será:

$$A = (2r)^2 - 4.\frac{90^o}{360^o}\cdot\pi\cdot r^2 - \pi\cdot 2^2$$

Como $r = 2(\sqrt{2}+1)$, temos então que:

$$A = 8(6 + 4\sqrt{2} - 2\pi - \sqrt{2}\pi)$$

9. Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

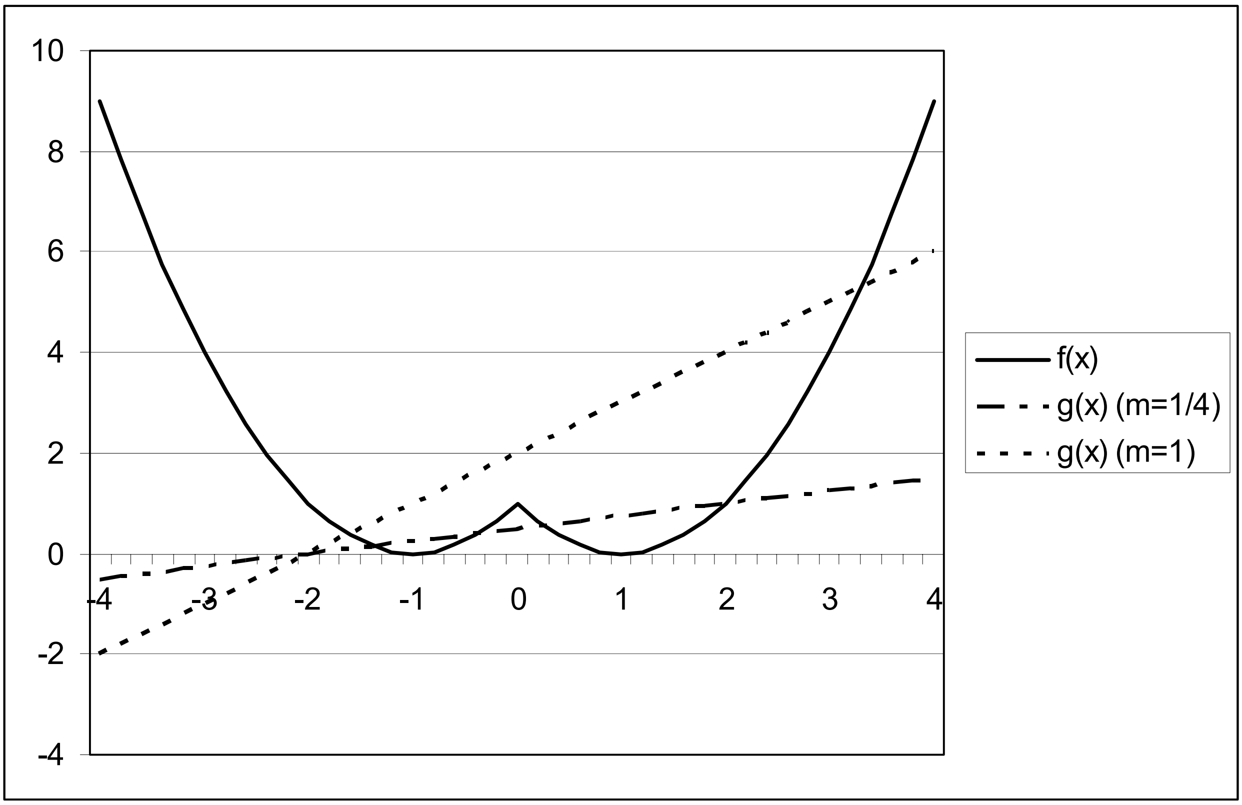
a) Esboçar, no plano cartesiano representado ao lado, os gráficos de f e de g quando $m = \frac{1}{4}$ e $m = 1$.

b) Determinar as raízes de $f(x)=g(x)$ quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m, o número de raízes da equação $f(x)=g(x)$.

SOLUÇÃO:

a) quando $m = \frac{1}{4}$, temos que $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, e quando $m = 1$, $g(x) = x + 2$. Nessas condições, os gráficos das funções f(x) e g(x) são:



b) Se $f(x) = g(x)$, para $m = \frac{1}{2}$, temos que: $x^2 - 2|x| + 1 = x/2 + 1$;

Se $x \geq 0$:

$$x^2 - 2x + 1 = x/2 + 1 \Rightarrow x^2 - 5x/2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5/2$$

Se $x < 0$:

$$x^2 + 2x + 1 = x/2 + 1 \Rightarrow x^2 + 3x/2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3/2$$

Logo:

$$S = \{0, 5/2, -3/2\}$$

c) Para $x \leq 0$:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2 + x(2 - m) + 1 - 2m = 0 \Rightarrow x = \frac{m - 2 \pm \sqrt{m^2 + 4m}}{2}$$

Nenhuma raiz real: $m^2 + 4m < 0 \Rightarrow -4 < m < 0$

Uma raiz real: $m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -4$ ou $m = 0$

$$m^2 + 4m > 0 \text{ e } m - 2 + \sqrt{m^2 + 4m} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < m$$

Duas raízes reais: $m^2 + 4m > 0$ e $m - 2 + \sqrt{m^2 + 4m} \leq 0 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$ e $m < -4$

Para 0<x:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2 - x(m + 2) + 1 - 2m = 0 \Rightarrow x = \frac{m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 12m}}{2}$$

Nenhuma raiz real: Pelo gráfico $\Rightarrow m < 0$

Uma raiz real: $m^2 + 12m = 0$ e $\frac{m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 12m}}{2} > 0 \Rightarrow m = 0$

$$m^2 + 12m > 0 \text{ e } m + 2 - \sqrt{m^2 + 12m} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m$$

Duas raízes reais: $m^2 + 4m > 0$ e $m + 2 - \sqrt{m^2 + 12m} > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$

Efetuando a soma das raízes nos intervalos:

m		-12		-4		0		$\frac{1}{2}$	
$x \leq 0$	2	2	2	1	0	1	2	2	1
x>0	0	0	0	0	0	1	2	1	1
Soma	2	2	2	1	0	2	4	3	2

Logo:

Nenhuma raiz: $-4 < m < 0$

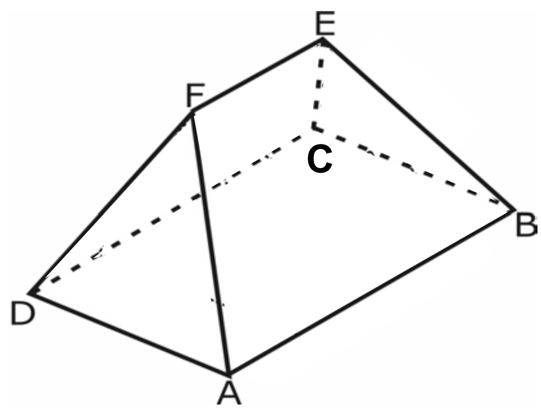
Uma raiz: $m = -4$

Duas raízes: $m < -4$ ou $m = 0$ ou $\frac{1}{2} < m$

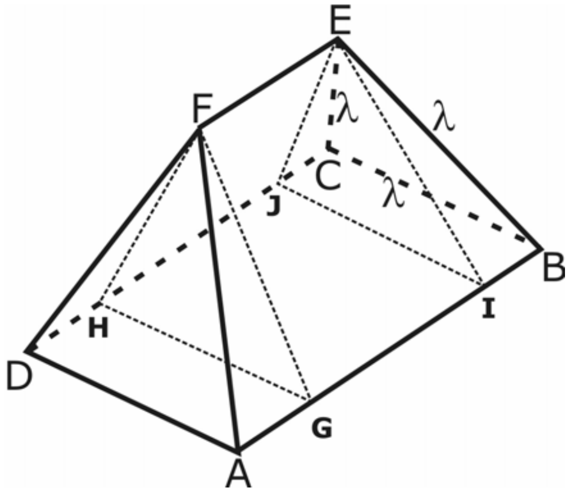
Três raízes: $m = \frac{1}{2}$

Quatro raizes: $0 < m < \frac{1}{2}$

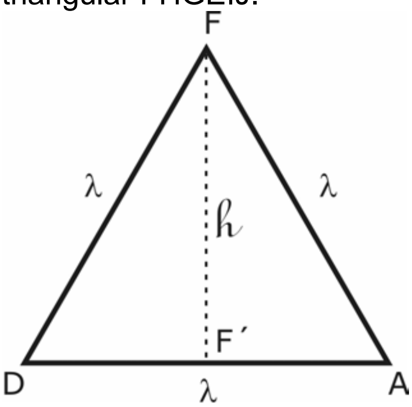
10. No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2λ e AD = λ; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento $\overline{EF}$ tem comprimento λ. Determinar, em função de λ, o volume de S.



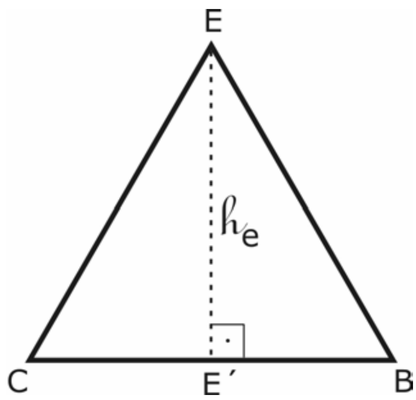
SOLUÇÃO:



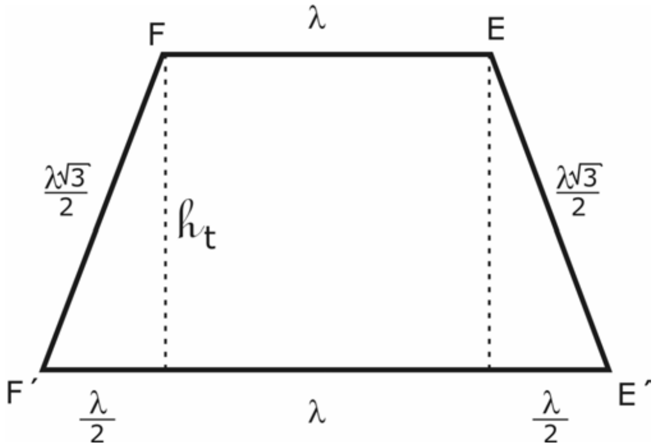
Dividimos o sólido S em outros 3 sólidos. As pirâmides FDAGH e EIJCB (congruentes), e o prisma triangular FHGEIJ.



$$FF' = \frac{h\sqrt{3}}{2}$$



$$h_E = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$$



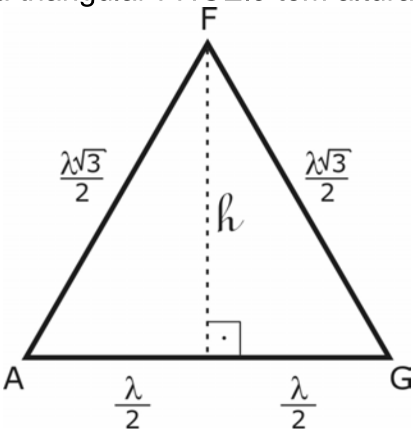
$$h_T = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{2}$$

Assim, a pirâmide FDAGH tem altura $\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$ e aresta da base $\frac{\lambda^2}{2}$, logo, seu volume será:

$$\frac{1}{3}\frac{\lambda^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda = \frac{\lambda^3\sqrt{2}}{12}$$

O volume da pirâmide EIJCB também será $\dfrac{\lambda^3\sqrt{2}}{12}$.

Já o prisma triangular FHGEIJ tem altura EF=λ e a base será o ΔFHG:



$$\Rightarrow A_{\Delta AFG} = \lambda \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\lambda^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{Prisma} = \frac{\lambda^2\sqrt{2}}{4}\lambda = \frac{\lambda^3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow S = 2\frac{\lambda^3\sqrt{2}}{12} + \frac{\lambda^3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow S = \frac{5\lambda^3\sqrt{2}}{12}$$