

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) E	6) C	11) E	16) D	21) E
2) B	7) B	12) C	17) E	22) C
3) E	8) D	13) D	18) A	23) B
4) E	9) D	14) A	19) C	24) E
5) D	10) B	15) D	20) B	25) C

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br

1. Resposta

$$\frac{4^{(4^2)}}{4^4} = 4^{4^2-4} = 4^{16-4} = 4^{12}$$

2. Resposta

Qualquer divisor positivo de $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ deve ter a forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, com a, b e c inteiros, $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 5$ e $0 \leq c \leq 3$. Apenas $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ é dessa forma. Cada um dos outros números possui um fator primo diferente de 2, 3 e 5.

3. Resposta

Somar os números de todas as faces visíveis é o mesmo que somar todos os números dos dois dados exceto os dois que estão em faces coladas, então a soma será $2(1+2+3+4) - a - b$, onde a e b são os números nas faces coladas. Essa soma é igual a $20 - a - b$, que pode assumir qualquer valor entre 12 ($a = b = 4$) e 18 ($a = b = 1$), portanto nunca será 19.

4. Resposta

Quando Ana andar $3/4$ da escada, Beatriz terá andado $1/4$ da mesma. Isso significa que Ana é três vezes mais rápida para descer do que Beatriz para subir. Quando Ana andar mais $1/4$ da escada e terminar, Beatriz terá andado mais um terço disso, que é $1/12$. Assim, Beatriz andou $4/12$ da escada, então ainda terá que subir $8/12 = 2/3$ dela.

5. Resposta

Os triângulos QSR e QTU são semelhantes. Então, $\frac{TU}{SR} = \frac{QT}{QS} \Leftrightarrow \frac{TU}{x} = \frac{x/2}{\sqrt{x^2 + x^2}} \Leftrightarrow TU = \frac{x}{2\sqrt{2}}$.

6. Resposta

Temos $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \frac{y - x}{xy}$, mas podemos cancelar a diferença, que é diferente de zero, então $1 = \frac{-1}{xy} \Leftrightarrow xy = -1$.

7. Resposta

Para um número ser divisível por 6, seu algarismo das unidades deve ser par e a soma de seus algarismos deve ser divisível por 3. Como a soma dos cinco números é 11, que deixa resto 2 ao ser dividido por 3, concluímos que os dois números que devem ficar de fora devem deixar resto 0 e resto 2 na divisão por 3, pois há apenas um que deixa resto 1 na divisão por 3. As possibilidades para os dois algarismos excluídos são as seguintes:

0 e 2: sem algarismos pares não podemos formar um múltiplo de 6.

0 e 5: podemos formar 132 e 312.

3 e 2: podemos formar 150 e 510.

3 e 5: podemos formar 120, 210 e 102 (012 tem apenas dois algarismos e não serve).

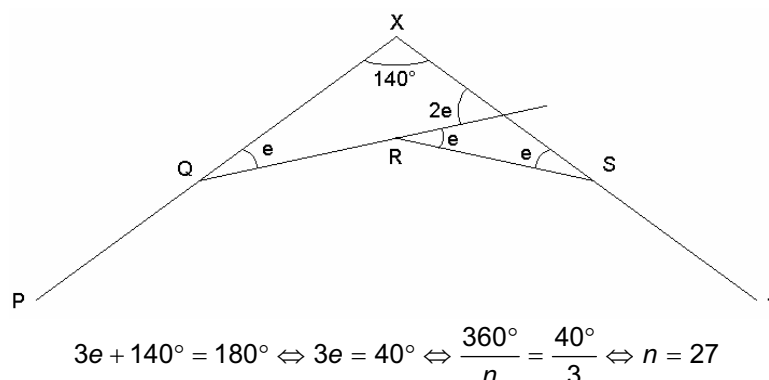
No total, temos 7 números.

8. Resposta

Seja d o mdc de todos esses números. A cada 5 números ímpares consecutivos há algum divisível por 5, e por serem mais de 3 há também algum divisível por 3. Assim sendo, sempre temos o fator 15 nesses números, então $d \geq 15$. Como d deve dividir o mdc dos números $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ e $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$, que é igual a 15, então $d \leq 15$. Logo, $d = 15$.

9. Resposta

Prolongue QR até encontrar o segmento XS. Através da figura, podemos encontrar o valor do ângulo externo do polígono, que deve ser 360° dividido pelo número de lados n .



10. Resposta

Se a afirmação falsa fosse de Cernaldo ou de Dernaldo, significaria que Arnaldo e Bernaldo fizeram afirmações verdadeiras. Mas se Bernaldo tivesse todas as cartas vermelhas, só haveria 3 números disponíveis para Arnaldo pegar. Então, a afirmação falsa só pode ser de Arnaldo ou de Bernaldo.

Se a afirmação falsa foi de Arnaldo, Bernaldo deve ter as 5 cartas vermelhas, então sobram as 5 cartas verdes para Cernaldo. Mas assim não há como Dernaldo possuir 3 cartas de um mesmo número. A afirmação falsa não pode ser de Arnaldo.

Se a afirmação falsa foi de Bernaldo, então podemos montar a seguinte tabela de cartas e assinalar a inicial de quem possui cada uma

	1	2	3	4	5
Azul	A	B	B	D	D
Amarelo	A	B	B	D	D
Verde	A	C	C	B	D
Vermelho	A	C	C	C	A

Assim, só Bernaldo pode ter feito a afirmação falsa.

11. Resposta

Segundo a equação correta, quando $y = 0$, temos $x = -3$, e quando $x = 0$, temos $y = 6$, assim a reta deveria passar pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 6)$. Ao trocar os eixos de lugar, as coordenadas de cada ponto são trocadas, então a reta que Esmeralda desenhou passa por $(0, -3)$ e $(6, 0)$.

12. Resposta

Vamos calcular os valores das alternativas na base decimal:

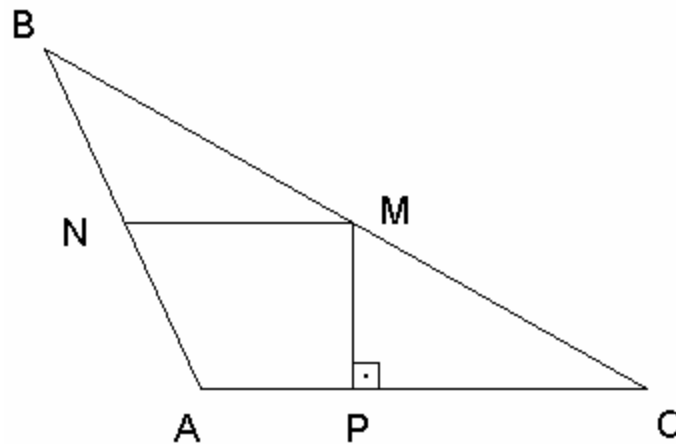
$$3/1 = 3 \quad 5/2 = 2,5 \quad 8/3 = 2,66\dots \quad 13/5 = 2,6 \quad 18/7 = 2,57\dots$$

Sabemos que $26^2 = 676$ e $27^2 = 729$. Vamos procurar o algarismo decimal depois da vírgula x do número $26,x$ que faça uma aproximação melhor da raiz de 700.

$$\left(26 + \frac{x}{10}\right)^2 = 676 + 5,2x + \frac{x^2}{100}$$

Vamos escolher x tal que $5,2x$ fique próximo de 23. Usamos, por exemplo, $x = 4$, assim ficamos com a aproximação $26,4^2 = 696,96 \Leftrightarrow 2,64^2 = 6,9696$. Com essa aproximação de $\sqrt{7}$, que tem dois dígitos depois da vírgula, já é possível concluir que $8/3$ é o número mais próximo de $\sqrt{7}$.

13. Resposta



Os triângulos BNM e BAC são semelhantes pelo caso LAL, então os segmentos AC e NM são paralelos. Assim, os ângulos NMP e MPC devem ser iguais, e como MPC é igual a 90° , temos que NMP também é igual a 90° .

14. Resposta

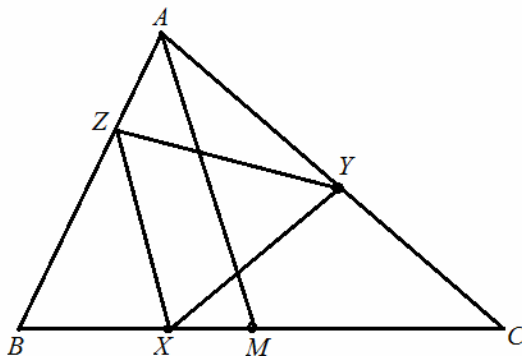
Iremos representar os três triângulos com as letras da bússola: O, N, L . Para desenhar qualquer lado de um triângulo, somos obrigados a desenhar todos os outros lados. A princípio devemos escolher uma ordem para desenhar os triângulos. Podemos fazer isso de 6 maneiras que correspondem as permutações possíveis das letras O, N e L . Podemos desenhar cada triângulo de duas maneiras a partir do ponto central, logo o total de maneiras de desenharmos a figura é $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

19. Resposta

Seja M o ponto médio de BC como $\frac{CX}{BX} = 2$, $CX = \frac{2}{3}BC$ e $BX = \frac{1}{3}BC$, de modo que

$$XM = BM - BX = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{6}BC = \frac{1}{2}BX.$$

$$\text{Assim, } \frac{BZ}{AZ} = \frac{BX}{XM} = 2, \text{ de modo que } \Delta BXZ \sim \Delta BMA \Rightarrow \frac{XZ}{MA} = \frac{BX}{BM} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{2}{3}.$$



Logo os lados de XYZ são iguais a $\frac{2}{3}$ das medianas de ABC . Assim, XYZ e o triângulo cujos lados são congruentes às medianas de ABC são semelhantes de razão $\frac{2}{3}$ e a razão entre suas áreas é

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

20. Resposta

Seja $s(A)$ a soma dos produtos dos elementos de cada subconjunto de A . Para cada escolha de um produto x sem o fator 10 existe outro produto com o fator 10, que é $10x$, assim podemos dizer que $s(\{1;2;\dots;10\}) = s(\{1;2;\dots;9\}) + 10 \cdot s(\{1;2;\dots;9\}) = 11 \cdot s(\{1;2;\dots;9\})$. De forma análoga, temos que $s(\{1;2;\dots;9\}) = s(\{1;2;\dots;8\}) + 9 \cdot s(\{1;2;\dots;8\}) = 10 \cdot s(\{1;2;\dots;8\})$, e assim por diante.

Assim, $s(A) = 11 \cdot s(\{1;2;\dots;9\}) = 11 \cdot 10 \cdot s(\{1;2;\dots;8\}) = \dots = 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 3 \cdot s(\{1\}) = 11!$.

21. Resposta

Observe as seguintes desigualdades:

$$2010^{2010} = 2^{2010} \cdot 1005^{2010} = 1024^{201} \cdot 1005^{2010} > (10^3)^{201} \cdot (10^3)^{2010} = 10^{6633}$$
$$2010^{2010} < 10000^{2010} = 10^{8040}$$

Podemos concluir que $6633 < \log n < 8040$. Assim:

$$n^{\log n} = 10^{m^2} < 10^{8040^2} < 10^{3 \cdot 10^{6633}} = 1000^{10^{6633}} < 6633^{10^{6633}} < m^{10^m} = (\log n)^n$$

Agora, observe as seqüências $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ e $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$. A segunda seqüência possui razão 10 entre termos consecutivos, enquanto que na primeira a razão é no máximo 4, assim podemos afirmar que $10^N > N^2$ para todo inteiro positivo N . Então:

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))(3 \cdot (n-2)) \dots ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1) \geq n^n > (\log n)^{2n}$$

Essas desigualdades se devem a $(n+1-k)k \geq n$ para todo k tal que $1 \leq k \leq n$ e

$$10^m > m^2 \Leftrightarrow n > (\log n)^2 \Leftrightarrow n^n > (\log n)^{2n}$$

22. Resposta

Nenhum dos inteiros em questão é uma potência de um primo p pois caso contrário todos os outros inteiros teriam o fator p em comum e isso não é permitido. Logo d possui pelo menos dois fatores primos distintos. Além disso, um dos números a, b, c, d é ímpar; caso contrário $\text{mdc}(a, b, c, d) = 2$. Assim, como o menor número ímpar com dois fatores primos distintos é 15, $d \geq 15$. Para $d = 15$, temos como exemplo $a = 6, b = 10, i = 12$ e $d = 15$.

23. Resposta

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos que $\frac{2x+y+y}{3} \geq \sqrt[3]{2xy^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{2(x+y)}{3} \geq \sqrt[3]{2xy^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2xy^2} \leq 2 \Leftrightarrow xy^2 \leq 4, \text{ com possibilidade de igualdade se } x = 1 \text{ e } y = 2.$$

24. Resposta

O ângulo RPQ é agudo se, e somente se, P está fora da circunferência com diâmetro RQ. A probabilidade pedida é a razão entre a área da região externa à circunferência (e interna ao quadrado) e a área total do quadrado. Sendo $2r$ o valor do lado do quadrado, a probabilidade é

$$\frac{(2r)^2 - r^2\pi/2}{(2r)^2} = 1 - \frac{\pi}{8}.$$

25. Resposta

Observe que $21 \cdot 2^2 - 9^2 = 84 - 81 = 3$, portanto só nos resta verificar se é possível obter os inteiros 1 e 2. Se $21m^2 - n^2 = 2$, precisamos ter m e n com a mesma paridade. Se ambos forem pares, o resultado será divisível por 4. Se ambos forem ímpares, o resultado também será divisível por 4, pois $21(2a+1)^2 - (2b+1)^2 = 84a^2 + 84a - 4b^2 - 4b + 20$, portanto nunca poderá ser 2. Se $21m^2 - n^2 = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 7 \cdot m^2 = n^2 + 1$, teríamos que $n^2 + 1$ é múltiplo de 3, mas nenhum número dessa forma é múltiplo de 3:

$$n = 3k \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$$

Isso nos permite dizer que o menor valor positivo é 3.