XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – MA – RS – RN – SP – SC

06 de junho de 2009

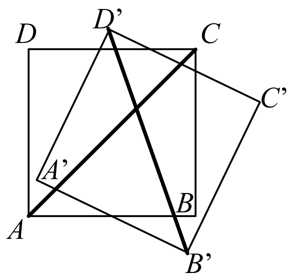
A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1. Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?
A) 120 **B)** 240 **C)** 360 **D)** 480 **E)** 600

2. Os inteiros positivos m e n satisfazem $15m = 20n$. Então é possível afirmar, com certeza, que mn é múltiplo de:
A) 5 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

3. Se $x^2 = x + 3$ então x^3 é igual a:
A) $x^2 + 3$ **B)** $x + 4$ **C)** $2x + 2$ **D)** $4x + 3$ **E)** $x^2 - 2$

4. Na figura, o quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado $ABCD$ de 25 graus em torno do ponto médio de AB. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas AC e $B'D'$?

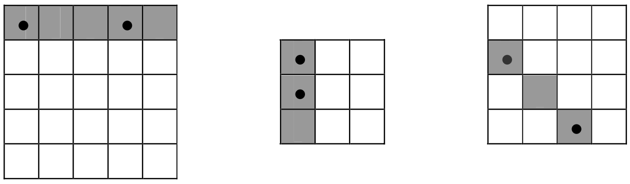


A) 5 **B)** 25 **C)** 45 **D)** 65 **E)** 85

5. Um dos cinco números a seguir é divisor da soma dos outros quatro. Qual é esse número?
A) 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 38 **E)** 42

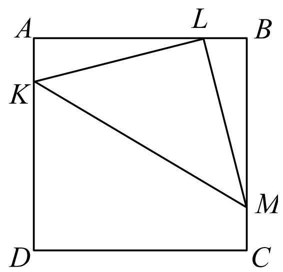
6. Sempre que Agilulfo volta para casa depois da escola com uma advertência, se sua mãe está em casa, ela o coloca de castigo. Sabendo-se que ontem à tarde Agilulfo não foi colocado de castigo, qual das seguintes afirmações é certamente verdadeira?
A) Agilulfo recebeu advertência ontem.
B) Agilulfo não recebeu advertência ontem.
C) Ontem à tarde a sua mãe estava em casa.
D) Ontem à tarde a sua mãe não estava em casa.
E) Nenhuma das afirmações acima é certamente verdadeira.

7. Qual é o menor valor de $n > 1$ para o qual é possível colocar n peças sobre um tabuleiro $n \times n$ de modo que não haja duas peças sobre a mesma linha, mesma coluna ou mesma diagonal? As figuras a seguir mostram pares de peças na mesma linha, na mesma coluna e na mesma diagonal em diversos tabuleiros.



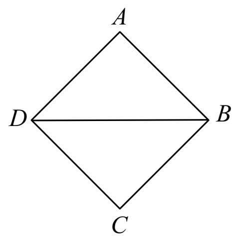
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

8. Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4, *K* pertence ao lado *AD*, *L* pertence ao lado *AB*, *M* pertence ao lado *BC* e *KLM* é um triângulo retângulo isósceles, sendo *L* o ângulo reto. Então a área do quadrilátero *CDKM* é igual a



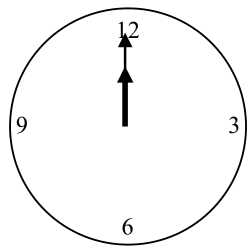
A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14

9. A figura ao lado é o mapa de um bairro: os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são as casas e os segmentos são as ruas. De quantas casas é possível fazer um caminho que passa exatamente uma vez por cada uma das ruas? É permitido passar mais de uma vez por uma mesma casa.



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

10. O relógio de parede indica inicialmente meio-dia. Os ponteiros das horas e dos minutos irão formar um ângulo de 145 graus pela primeira vez:



A) entre 12h e 12h10min.
B) entre 12h10min e 12h15min.
C) entre 12h15min e 12h20min.
D) entre 12h20min e 12h25min.
E) após as 12h25min.

11. Considere o número inteiro positivo n tal que o número de divisores positivos do dobro de n é igual ao dobro do número de divisores positivos de n. Podemos concluir que n é

A) um número primo **B)** um número par **C)** um número ímpar
D) um quadrado perfeito **E)** potência inteira de 2

12. Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 34 **E)** 45

13. O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Questões → Estudantes ↓	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮				⋮		

Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Qual é o valor de m?

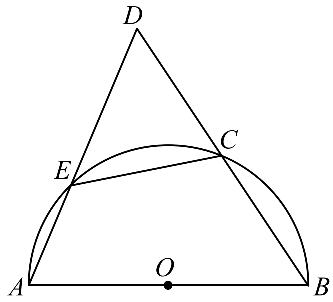
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

14. Seja $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ uma função tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$ para todo $x\in\mathbb{Z}$. Então $f(2009)$ é:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 2009

15. Na figura, $CD = BC$, $\angle BAD = 72^\circ$, AB é o diâmetro e O o centro do semicírculo.
Determine a medida do ângulo $\angle DEC$.

A) 36º
B) 42º
C) 54º
D) 63º
E) 18º



16. Sabe-se que $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos x, y reais. O menor valor real de k é

A) 9 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 36

17. A famosa *Conjectura de Goldbach* diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, 18 pode ser representado por 5 + 13 ou, ainda, por 7 + 11. Considerando todas as possíveis representações de 126, qual a maior diferença entre os dois primos que a formam?

A) 112 **B)** 100 **C)** 92 **D)** 88 **E)** 80

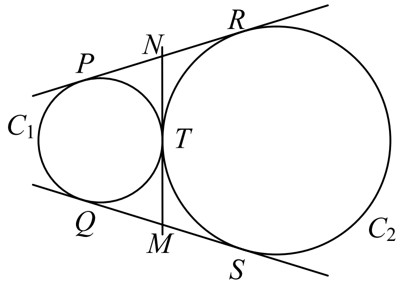
18. Um subconjunto de $\{1,2,3,\ldots,20\}$ é *superpar* quando quaisquer dois de seus elementos têm produto par. A maior quantidade de elementos de um subconjunto superpar é:

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 11

19. Para cada número natural n, seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de n. Por exemplo, $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$. Quanto é $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{10}$?

A) 2925 **B)** 3025 **C)** 3125 **D)** 3225 **E)** 3325

20. Os círculos C_1 e C_2, de raios 3 e 4, respectivamente, são tangentes externamente em T. As tangentes externas comuns tocam C_1 em P e Q e C_2 em R e S. A tangente interna comum em T corta as tangentes externas nos pontos M e N, como mostra a figura. A razão entre as áreas dos quadriláteros $MNPQ$ e $MNRS$ é



A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{13}{15}$

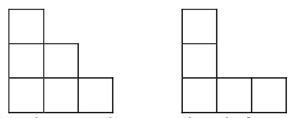
21. Dois carros deixam simultaneamente as cidades A e B indo de uma cidade em direção à outra, com velocidades constantes, e em sentidos opostos. As duas cidades são ligadas por uma estrada reta. Quando o carro mais rápido chega ao ponto médio M de AB, a distância entre os dois carros é de 96 km. Quando o carro mais lento chega ao ponto M, os carros estão a 160 km um do outro. Qual a distância, em km, entre as duas cidades?

A) 320 **B)** 420 **C)** 480 **D)** 520 **E)** 560

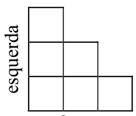
22. Seja $N = 8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}$, em que aparecem 2009 números 8. Agilulfo ficou de castigo: ele deve escrever a soma dos dígitos de N, obtendo um número M; em seguida, deve calcular a soma dos dígitos de M; e deve repetir o procedimento até obter um número de um único dígito. Vamos ajudar Agilulfo: esse dígito é

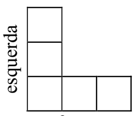
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 7 **E)** 8

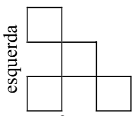
23. Alguns cubos foram empilhados formando um bloco. As figuras ao lado representam a vista da esquerda e da frente desse bloco. Olhando o bloco de cima, qual das figuras a seguir **não** pode ser vista?

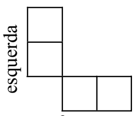


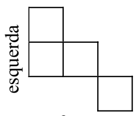
vista da esquerda vista da frente

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

24. Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?

A) 144 cm^2 **B)** 288 cm^2 **C)** 364 cm^2 **D)** 442 cm^2 **E)** 524 cm^2

25. Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão t. Então a distância entre o incentro e o baricentro deste triângulo é:

A) t **B)** $\frac{t}{2}$ **C)** $\frac{t}{3}$ **D)** $\frac{2t}{3}$ **E)** faltam dados