

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) B	6) E	11) C	16) C	21) C
2) C	7) B	12) A	17) B	22) A
3) D	8) B	13) D	18) E	23) C
4) D	9) C	14) C	19) B	24) B
5) D	10) E	15) C	20) E	25) C

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br

1. **(B)** Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter $X = 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9 ; $Y = 2, 3, \dots, 9$ e $Z = 5, 6, 7, 8$ ou 9 . Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja $6 \times 8 \times 5 = 240$.

2. **(C)** Como $15m = 20n \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$ e a fração $\frac{4}{3}$ é irredutível, $m = 4k$ e $n = 3k$, k inteiro positivo.

Assim, $mn = 12k^2$, que é múltiplo de 12. Tomando $k = 1$, verificamos que as demais alternativas são incorretas.

3. **(D)** Temos $x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x \cdot x^2 = x(x + 3) \Leftrightarrow x^3 = x^2 + 3x = (x + 3) + 3x = 4x + 3$.

4. **(D)** O ângulo entre as retas AC e BD é 90 graus. Como $B'D'$ foi obtido a partir de uma rotação de 25 graus de BD , o ângulo entre as AC e $B'D'$ é 25 graus menor, sendo igual a $90 - 25 = 65$ graus.

5. **(D)** Um dos cinco números é divisor da soma dos outros quatro se, e somente se, é divisor da soma dos cinco números. Tal soma é $20 + 24 + 28 + 38 + 42 = 152 = 4 \cdot 38$, que é divisível por 38.

6. **(E)** As seguintes situações podem ocorrer para que Agilulfo não fique de castigo:

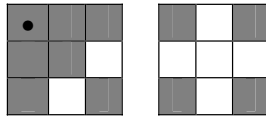
- Agilulfo volta depois da escola com uma advertência e sua mãe não está em casa;
- Agilulfo volta depois da escola sem advertência e sua mãe não está em casa;
- Agilulfo volta depois da escola sem advertência e sua mãe está em casa;

Com isso, Agilulfo pode tanto ter recebido como não ter recebido advertência e sua mãe pode estar ou não estar em casa, de modo que nenhuma das afirmações nas alternativas A a D é certamente verdadeira.

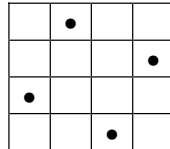
7. **(B)** Diremos que uma casa *ataca outra* se elas estiverem na mesma linha, coluna ou diagonal do tabuleiro.

Em um tabuleiro 2×2 duas casas quaisquer se atacam, de modo que não é possível colocar 2 peças que não se ataquem no tabuleiro.

Em um tabuleiro 3×3 , cada casa do canto ataca outras 6, sobrando somente 2 casas que estão na mesma diagonal; portanto, se colocarmos peça em uma das casas do canto não é possível colocar as outras duas. Todavia, não é possível colocar 3 peças sem que duas se ataquem se não for permitido escolher casas do canto:



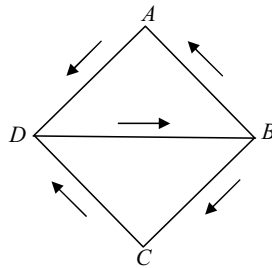
A figura a seguir exhibe uma possibilidade para $n = 4$.



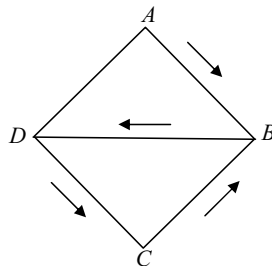
8. (B) Temos $\angle ALK = 180^\circ - \angle KLM - \angle BLM = 180^\circ - 90^\circ - \angle BLM = 90^\circ - \angle BLM = \angle BML$, ambos os ângulos $\angle KAL$ e $\angle LBM$ são retos, de modo que os triângulos KAL e LBM são congruentes. Portanto, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio $AKMB$ é igual a $\frac{AK + BM}{2} \cdot AB = \frac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$ e, conseqüentemente, a área de $CDKM$ é $4^2 - 8 = 8$.

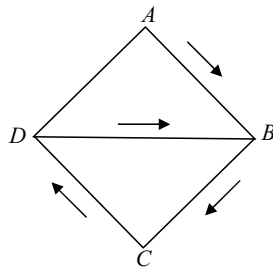
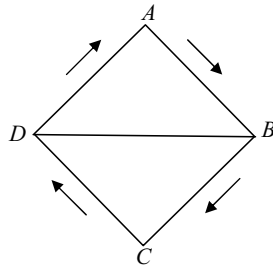
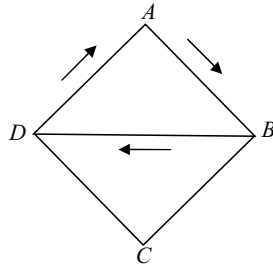
9. (C)

Possível caminho: $BADBCD$

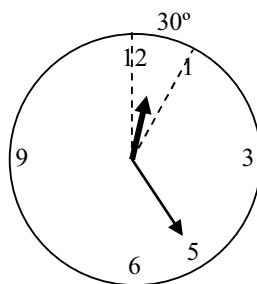


É impossível começar pelas casas A ou C , basta ver as situações abaixo:

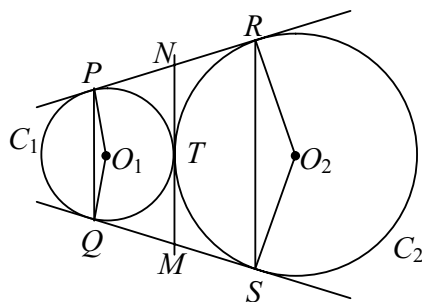




10. (E) Entre 12h e 12h30min, o ângulo entre os ponteiros cresce continuamente. Como o ângulo formado entre os ponteiros às 12h25min é menor do que $5 \cdot 30^\circ - \frac{20}{60} \cdot 30^\circ = 140^\circ$, o ângulo entre os ponteiros formam 145 graus pela primeira vez após as 12h25min.



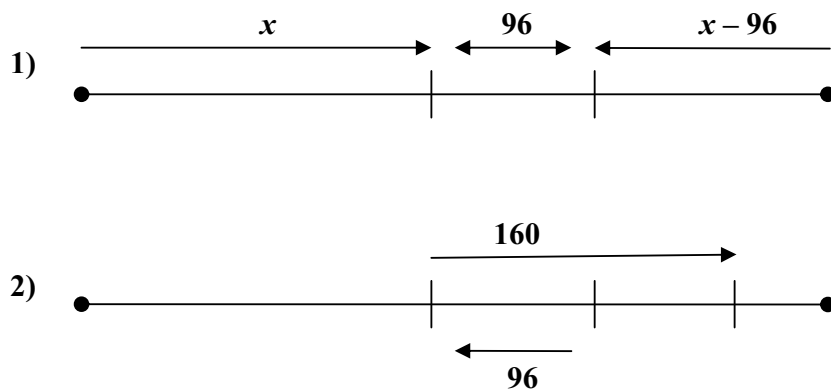
11. (C) Sendo $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a fatoração cannica de n , temos $2n = 2^{\alpha+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Assim, a quantidade de divisores positivos de n  $(\alpha+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$ e a quantidade de divisores positivos de $2n$  $(\alpha+1+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$. Essa quantidade  o dobro da anterior quando



Sejam O_1 e O_2 os centros de C_1 e C_2 , respectivamente. Os triângulos O_1PQ e O_2RS são semelhantes, assim $\frac{PQ}{RS} = \frac{O_1P}{O_2R} = \frac{3}{4}$. Além disso, os segmentos tangentes NP , NT e NR são congruentes e MN é paralelo a PQ e RS . Assim, M e N são pontos médios de QS e PR , respectivamente. Assim, MN é base média do trapézio $PQSR$, de modo que $MN = \frac{PQ+RS}{2}$. Assim, $\frac{PQ}{3} = \frac{RS}{4} = \frac{MN}{\frac{3+4}{2}} = \frac{MN}{3,5}$.

A razão entre as áreas dos trapézios $MNPQ$ e $MNRS$, que têm alturas iguais, é $\frac{\frac{MN+PQ}{2}}{\frac{MN+RS}{2}} = \frac{3,5+3}{3,5+4} = \frac{13}{15}$.

21. (C) Seja $2x$ a distância entre as cidades, em quilômetros. Quando o carro mais rápido chega ao ponto M , ele percorre x km e o mais lento, $x - 96$ km (situação 1).



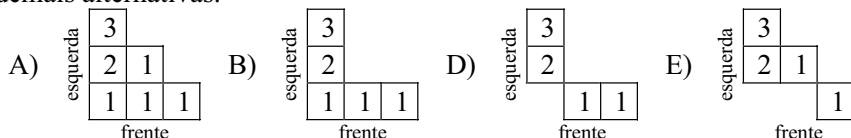
Quando o carro mais lento chega ao ponto M , ele percorre mais 96 km e o carro mais rápido mais 160 km.

Como as velocidades dos carros são constantes, $\frac{x-96}{x} = \frac{96}{160} \Leftrightarrow 5(x-96) = 3x \Leftrightarrow 2x = 480$ km.

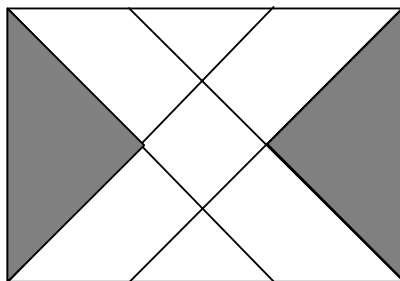
22. (A) Como $8^{8 \cdot 8} \equiv (-1)^{8 \cdot 8} \equiv 1 \pmod{9}$, a soma dos dígitos de todos os números que Agilulfo deve escrever é congruente a 1 módulo 9. Portanto, quando Agilulfo obtiver um número de um único dígito, ele vira 1.

23. (C) Considere a quantidade de cubos no quadradinho central da vista de cima apresentada na alternativa C. Esse é o único do meio da vista da frente e portanto deve ter 1 cubo; esse é também o único do meio da vista da esquerda e portanto deve ter 2 cubos, o que não é possível. Então a vista de cima não pode ser a que está apresentada na alternativa C.

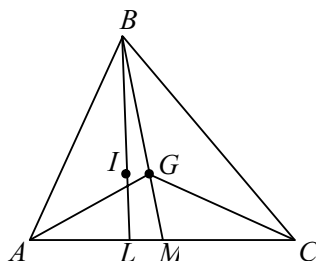
As figuras a seguir indicam possíveis quantidades de cubos em cada quadradinho da vista de cima das demais alternativas.



24. (B) A figura abaixo mostra todos os pontos amarelos, que são dois triângulos de área $\frac{24 \cdot 12}{2} = 144$. Dessa forma, a área total é 288.



25. (C) Sejam (AB, AC, BC) a progressão aritmética, G o baricentro de ABC e I o incentro de ABC . Sejam também $b = AC$ e r o inraio de ABC .



A área de AGC é um terço da área de ABC , que é igual a $\frac{r(b-t+b+b+t)}{2} = \frac{3br}{2}$. Assim, a área de AGC é $\frac{br}{2} = \frac{AC \cdot r}{2}$. Logo a altura relativa a G de AGC é r e, portanto, as distâncias de I e G a AC são iguais, o que prova que GI é paralelo a AC .

Sendo BL a bissetriz de $\angle ABC$ e M o ponto médio de AC , temos $AM = \frac{b}{2}$ e, pelo teorema das

bissetrizes, $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b-t}{b+t} \Leftrightarrow \frac{AL}{AL+LC} = \frac{b-t}{b-t+b+t} \Leftrightarrow \frac{AL}{b} = \frac{b-t}{2b} \Leftrightarrow AL = \frac{b-t}{2}$. Assim,

$$AM - AL = \frac{b}{2} - \frac{b-t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Os triângulos BLM e BIG são semelhantes, assim, $\frac{IG}{LM} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IG = \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{3}$.

Outra solução: utilizando as notações da solução anterior, $G = \frac{A+B+C}{3}$ e

$$I = \frac{(b-t)C + bB + (b+t)A}{b-t+b+b+t} = \frac{b(A+B+C) + t(A-C)}{3b} = \frac{A+B+C}{3} + \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} = G + \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b}$$

$$\Rightarrow I - G = \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{t \cdot \overrightarrow{CA}}{3b} \Rightarrow |\overrightarrow{GI}| = \frac{t \cdot |\overrightarrow{CA}|}{3b} = \frac{t \cdot b}{3b} = \frac{t}{3} \Leftrightarrow GI = \frac{t}{3}$$