

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

PROBLEMA 2

Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S , sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

PROBLEMA 3

Sejam x, y, z reais quaisquer tais que $x + y + z = xy + yz + zx$. Encontre o valor mínimo de

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}$$

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo P a interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a $ABCD$, prove que OP é perpendicular a CD .

PROBLEMA 5

Prove que para quaisquer inteiros $a > 1$ e $b > 1$ existe uma função f dos inteiros positivos nos inteiros positivos tal que $f(a \cdot f(n)) = b \cdot n$ para todo n inteiro positivo.

PROBLEMA 6

O profeta venusiano Zabruberson enviou a seus discípulos uma palavra de 10000 letras, sendo cada uma delas A ou E: a *Palavra Zabrubica*. Seus seguidores passaram a considerar, para $1 \leq k \leq 10000$, cada palavra formada por k letras consecutivas da Palavra Zabrubica uma *palavra profética* de tamanho k . Sabe-se que há no máximo 7 palavras proféticas de tamanho 3. Determine o número máximo de palavras proféticas de tamanho 10.