

**XXX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase**

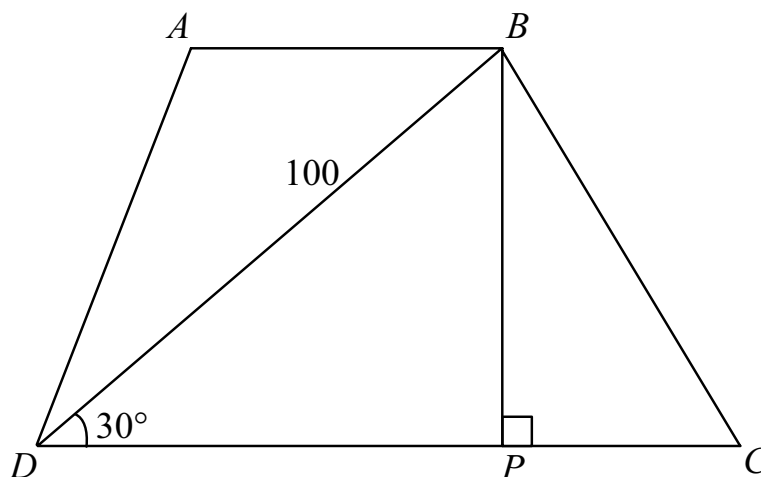
Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. **NENHUM PONTO** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	7500	9779	9376	256	18

01. Seja P a projeção ortogonal de B sobre \overline{CD} .



Temos que $CP = \frac{CD - AB}{2}$ logo $PD = CP + AB = \frac{AB + CD}{2}$. Assim, a área do trapézio é

$$S = BP \cdot \frac{AB + CD}{2} = BP \cdot PD = (100 \sin 30^\circ) \cdot (100 \cos 30^\circ) = 2500\sqrt{3} \text{ m}^2 \text{ e portanto } S\sqrt{3} = 7500.$$

02. Observe que para $i \geq 1$ temos

$$\lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = i \Leftrightarrow i \leq \sqrt[4]{n} < i+1 \Leftrightarrow i^4 \leq n < (i+1)^4 \text{ e assim há } (i+1)^4 - i^4 \text{ números } n \text{ tais que } \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = i.$$

Portanto a soma pedida é

$$1 \cdot (2^4 - 1^4) + 2 \cdot (3^4 - 2^4) + 3 \cdot (4^4 - 3^4) + 4 \cdot (5^4 - 4^4) + 5 \cdot (6^4 - 5^4) + 6 \cdot (2008 - 6^4 + 1) = 9779.$$

03. Seja n um inteiro de 4 dígitos. Temos que n é auto-replicante se e somente se $n^2 - n$ é divisível por 10000, isto é, $2^4 | n(n-1)$ e $5^4 | n(n-1)$. Como n e $n-1$ são primos entre si, temos 4 possibilidades:

- $2^4 | n$ e $5^4 | n$
- $2^4 | (n-1)$ e $5^4 | (n-1)$
- $2^4 | n$ e $5^4 | (n-1)$
- $2^4 | (n-1)$ e $5^4 | n$.

A primeira possibilidade implica que $10^4 | n$, o que é impossível pois $1000 \leq n \leq 9999$. Da mesma forma, a segunda não ocorre.

Na terceira possibilidade, de $5^4 | (n-1)$ temos que $n = 625k + 1$ para algum k inteiro e que $625k + 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k + 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k \equiv 15 \pmod{16}$

Assim, $k = 15 + 16\ell$ para algum ℓ inteiro e $n = 625(15 + 16\ell) + 1 = 9376 + 10000\ell$

E como $1000 \leq n \leq 9999$, a única possibilidade é $n = 9376$.

Finalmente, para a quarta possibilidade, temos que $n = 625k$, k inteiro, e que $n - 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{16}$.

Assim, $k = 1 + 16\ell$, ℓ inteiro, e $n = 625(1 + 16\ell) = 625 + 10000\ell$. Como $1000 \leq n \leq 9999$, não há soluções neste caso.

Logo o único número auto-replicante de 4 dígitos é 9376.

04. Da propriedade, decorre que 9 só pode aparecer ou como primeiro ou como último elemento da permutação e que os elementos de 1 a 8 formam uma permutação com a mesma propriedade. Assim, o número pedido é o dobro do número de permutações de 1, 2, ..., 8 com a mesma propriedade. Da mesma forma, o número de permutações de 1, 2, ..., 8 com a propriedade é o dobro do número de permutações de 1, 2, ..., 7 com a propriedade. Repetindo o raciocínio, concluímos que o número pedido é portanto $2^8 = 256$.

05. Seja $\alpha = \sqrt[3]{-27 + 5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27 + 5\sqrt{33}}$. Temos

$$\alpha^3 = -27 + 5\sqrt{33} - (27 + 5\sqrt{33}) - 3\sqrt[3]{-27 + 5\sqrt{33}} \cdot \sqrt[3]{27 + 5\sqrt{33}} \cdot (\sqrt[3]{-27 + 5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27 + 5\sqrt{33}})$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = -54 - 3\sqrt[3]{96} \cdot \alpha \Rightarrow (\alpha^3 + 54)^3 = -2^5 \cdot 3^4 \alpha^3$$

Agora faça $18y = \alpha^3$. Temos

$$(18y + 54)^3 = -2^6 \cdot 3^6 y \Leftrightarrow (y + 3)^3 = -2^3 y \Leftrightarrow y^3 + 9y^2 + 35y + 27 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y^2 + 8y + 27) = 0$$

Como α , e portanto y , são reais e $y^2 + 8y + 27 = 0$ não tem raízes reais, concluímos que $y = -1$ e portanto $\alpha = -\sqrt[3]{18}$ (pasmem!). Assim, α é raiz do polinômio $x^3 + 18 = 0$, que é o polinômio minimal de α já que $x^3 + 18 = 0$ não possui raízes racionais.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Olhando a equação módulo 7, temos: $m^2 \equiv 3^n$, porém m^2 só poderá ser congruente a 0, 1, 2, 4 enquanto que se n for ímpar 3^n só poderá ser congruente a 3, 5, 6, então n deverá ser par. Logo existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2n_0$. Voltando à equação original temos:

$m^2 + 161 = 3^{2n_0} \Leftrightarrow 3^{2n_0} - m^2 = 161 \Leftrightarrow (3^{n_0} - m)(3^{n_0} + m) = 161$. Como m e n são inteiro positivos, logo o módulo de $(3^{n_0} - m)$ é menor que $(3^{n_0} + m)$, e como $(3^{n_0} - m)$ é positivo e $161 = 7 \cdot 23$, então temos as opções:

- $3^{n_0} - m = 1$ e $3^{n_0} + m = 161 \Leftrightarrow 3^{n_0} = 81$ e $m = 80 \Leftrightarrow n_0 = 4$ e $m = 80 \Leftrightarrow n = 8$ e $m = 80$
- $3^{n_0} - m = 7$ e $3^{n_0} + m = 23 \Leftrightarrow 3^{n_0} = 15$ e $m = 8$. Não há solução inteira.

Logo $m = 80$ e $n = 8$ é a única solução.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Analisou a equação módulo 7: **[2 pontos]**
- Conclui que n é par: **[3 pontos]**
- Fatorou a equação: **[2 pontos]**
- Dividiu em casos e achou a única solução possível: **[3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Para que $f(f(x)) = f(x)$ então a imagem de f deverá só conter pontos fixos. Utilizando esse fato temos:

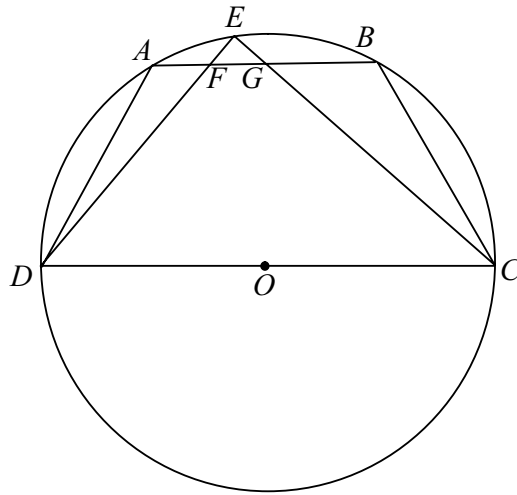
- Com 5 pontos fixos na imagem teremos 1 função possível.
- Com 4 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{1} \cdot 4 = 20$ funções
- Com 3 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{2} \cdot 3^2 = 90$ funções
- Com 2 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{3} \cdot 2^3 = 80$ funções
- Com 1 ponto fixo na imagem teremos $\binom{5}{4} \cdot 1^4 = 5$ funções

logo o total de funções f satisfazendo $f(f(x)) = f(x)$ igual a 196.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Reduziu o problema a contar o número de pontos fixos da imagem de $f(x)$: **[3 pontos]**
- Conclui que o total de funções com:
5 pontos fixos é igual a 1: **[1 ponto]**
4 pontos fixos é igual a 20: **[1 ponto]**
3 pontos fixos é igual a 90: **[1 ponto]**
2 pontos fixos é igual a 80: **[1 ponto]**
1 ponto fixo é igual a 5: **[1 ponto]**
- Concluiu que o total de funções possíveis é igual a 196: **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:



Como $\widehat{ABE} \cong \widehat{ADE}$ (ambos enxergam o arco \widehat{AE}) temos que $\triangle FBE \sim \triangle FDA$ e portanto

$$\frac{FB}{FD} = \frac{BE}{DA} \quad (1)$$

Analogamente, das semelhanças $\triangle EBG \sim \triangle ACG$, $\triangle AEG \sim \triangle CBG$ e $\triangle AEF \sim \triangle DBF$ obtemos respectivamente

$$\frac{BG}{CG} = \frac{EB}{AC} \quad (2)$$

$$\frac{AE}{CB} = \frac{AG}{CG} \quad (3)$$

$$\frac{AE}{DB} = \frac{AF}{DF} \quad (4)$$

Assim, utilizando o fato que $ABCD$ é isósceles (de modo que $AD = BC$ e $BD = AC$) temos

$$\begin{aligned} \frac{AF \cdot BG}{FG} &\stackrel{(2) \text{ e } (4)}{=} \frac{1}{FG} \cdot \frac{AE \cdot DF}{DB} \cdot \frac{CG \cdot EB}{AC} \\ &= \frac{1}{AC^2} \frac{(AE \cdot CG)(DF \cdot EB)}{FG} \stackrel{(1) \text{ e } (3)}{=} \frac{AD^2}{AC^2} \cdot \frac{AG \cdot BF}{FG} \\ &= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{(AF + FG)(BG + FG)}{FG} \\ &= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{FG(AF + FG + BG) + AF \cdot BG}{FG} \\ &= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right) \end{aligned}$$

Em suma, temos

$$\frac{AF \cdot BG}{FG} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AF \cdot BG}{FG} = \frac{AD^2 \cdot AB}{AC^2 - AD^2}$$

Utilizando o fato de que $ABCD$ é isósceles com base $CD = 50$ e altura 24, aplicando Pitágoras várias vezes é fácil calcular $AB = 14$, $AD = 30$, $AC = 40$.

Assim, $\frac{AF \cdot BG}{FG} = 18$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Percebeu as semelhanças $\Delta FBE \sim \Delta FDA$, etc. **[1 ponto]**
- Obteve as equações (1), (2), (3), (4): **[até 4 pontos: 1 ponto por cada equação]**
- Desenvolveu a expressão de $\frac{AF \cdot BG}{FG}$, obtendo uma equação para tal **[4 pontos]**
- Concluiu **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Vamos mostrar que o menor produto é obtido quando tomamos os elementos da diagonal principal.

Neste caso, o produto é dado por $(1+1)(2+2)(3+3)\dots(2008+2008) = 2^{2008} \cdot 2008!$

Suponha que todos os elementos $(1, 1), (2, 2), \dots, (i-1, i-1)$ tenham sido escolhidos mas que os elementos nas i -ésimas linha e colunas sejam (i, j) e (k, i) com j e k maiores ou iguais a $i+1$. Vamos mostrar que trocando estes dois elementos por (i, i) e (k, j) obtemos um produto menor. De fato, para isto devemos mostrar que

$$(i+i)(j+k) < (i+j)(i+k)$$

$$\Leftrightarrow 2i(j+k) < i^2 + (j+k)i + jk$$

$$\Leftrightarrow i^2 - (j+k)i + jk > 0$$

$$\Leftrightarrow (i-j)(i-k) > 0$$

O que é verdade, já que $i-j < 0$ e $i-k < 0$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Determinou que o menor produto ocorre tomando-se os elementos da diagonal principal **[2 pontos]**
- Provou que esta escolha é a que dá o menor produto **[6 pontos]**
- Concluiu e achou o mínimo **[2 pontos]**