XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) D	6) C	11) D	16) C	21) B
2) A	7) B	12) B	17) B	22) C
3) D	8) C	13) E	18) B	23) B
4) D	9) E	14) D	19) C	24) D
5) D	10) A ou B	15) C ou D	20) E	25) D

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (D) Como $AE = BE = CE$, então o triângulo ABC é retângulo em B. Dessa forma, podemos escrever $\alpha = 90° - \beta$. Como $CE = CD$, obtemos $\angle CED = \angle CDE = 80°$. Logo, como $\angle CED$ é ângulo externo ao triângulo BEC e $\angle ECB = \angle EBC = \beta$, concluímos que $\angle CED = \beta + \beta \therefore 2\beta = 80° \therefore \beta = 40°$ e $\alpha = 50°$. Portanto, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$.

2. (A) Reescrevemos todos os números de modo que seus numeradores se tornem 1. Teremos $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ e $\frac{x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Agora, o maior número é o que possui menor denominador. É imediato que dentre os denominadores apresentados, x e $x(x + 1)$ são os únicos menores que 1. Logo, o menor denominador é x e o maior dos números dados é $\frac{1}{x}$.

3. (D) Temos $a - \frac{1}{a} = \frac{80}{9}$, donde $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{6400}{81}$, e logo

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \frac{6400}{81} + 4 = \frac{6724}{81} = \left(\frac{82}{9}\right)^2$. Assim, $a + \frac{1}{a} = \frac{82}{9}$, pois $a + \frac{1}{a} > 0$.

4. (D) Seja P o número de funcionários que falam Português e I o número de funcionários que falam Inglês. É fácil ver que $\frac{20}{100}.P = \frac{80}{100}.I \Rightarrow P = 4I$.

Além disso, $4I + I - \frac{80}{100}.I = 84 \Rightarrow I = 20$. Com isso, o número de funcionários que falam as duas línguas é $\frac{80}{100}.I = 16$.

5. (D) Note que todos os cartões deixam resto 3 na divisão por 5. Então, para que a soma dos cartões seja 100, que é múltiplo de 5, precisamos de pelo menos cinco cartões. Rafael pode escolher 3, 13, 23, 28 e 33, assim a resposta é 5.

6. (C) Sejam k a velocidade de Penha (em vértices por segundo) e t o tempo decorrido até o encontro entre Nelly e Sônia. Como Nelly gasta $\frac{2}{4k}$ segundos até o segundo encontro, temos:

$$4kt + 2kt = n \quad \text{e} \quad 4k\left(t + \frac{2}{4k}\right) + k\left(t + \frac{2}{4k}\right) = n.$$

Daí $kt = \frac{5}{2}$ e $n = 15$.

7. (B) Sejam $a, b, c, d, e, f, g, h, i,$ os números ordenados assim: $a > b > c > d > e > f > g > h > i$.

Então, $e = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9} \Rightarrow 9e = a+b+c+d+e+f+g+h+i$. Além disso, $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 68 \Rightarrow a+b+c+d+e = 340$, e também temos a seguinte equação, $\frac{e+f+g+h+i}{5} = 44 \Rightarrow e+f+g+h+i = 220$. Portanto, somando, obtemos $9e + e = 560 \Rightarrow e = 56$.
E assim, a soma desejada será $9e = 504$.

8. (C) É verdade que 14 de junho de 2008 é um sábado. Logo, 14 de junho de 2009 será um domingo, de 2010 será uma segunda-feira, de 2011 será uma terça-feira, de 2012 (que é bissexto) será uma quinta-feira, de 2013 será uma sexta-feira e, finalmente, de 2014 será um sábado. Portanto a próxima vez que o dia 14 de junho será num sábado acontecerá daqui a 6 anos.

9. (E) Temos que $10x + 25y = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000 - 25y}{10}$, onde x e y são, respectivamente, as quantidade de moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Para que x seja um valor inteiro positivo basta que y seja qualquer número par entre 2 e 38. Logo, temos 19 maneiras diferentes.

10. (A) ou (B) ambas devem ser consideradas como resposta correta.
(A) Façamos $n = 2^k \cdot b$, com b ímpar. Seja $d(m)$ a quantidade de divisores de m. Queremos resolver a equação $d(n \cdot 2^n) = 2008 + d(n)$.
Um divisor de $n \cdot 2^n$ é um número da forma $2^\alpha \cdot x$, em que $0 \le \alpha \le k + n$ e x é um divisor de b. há $(k + n + 1)$ modos de escolhermos α e $d(b)$ modos de escolhermos x.
Logo, $d(n \cdot 2^n) = (k + n + 1) \cdot d(b)$. De modo análogo, cada divisor de n é da forma $2^\beta \cdot y$. Podemos escolher β de $k + 1$ modos e escolher y de $d(b)$ modos. Com isso, obtemos:

$$d(n \cdot 2^n) = \mathbf{(k + n + 1) \cdot d(b)} = 2008 + d(n) = \mathbf{2008 + (k + 1) \cdot d(b)}.$$

Daí, $n \cdot d(b) = 2008$, de onde concluímos que n é um divisor de $2008 = 2^3 \cdot 251$. Além disso, como b é um divisor ímpar de n, devemos ter $b = 1$ ou $b = 251$ (pois os fatores primos de n estão dentre os de 2008).

- Se $b = 1$, ficamos com $d(b) = 1$ e $n = 2008$. Neste caso, $n = 2^3 \cdot 251^1$ possui $4 \cdot 2 = 8$ divisores e $n \cdot 2^n = 2^{2011} \cdot 251$, que possui $2012 \cdot 2 = 4024$ divisores, possuindo 4016 divisores a mais que n (absurdo).
- Se $b = 251$, obtemos $d(b) = 2$ e $n = 1004$. Neste caso, $n = 2^2 \cdot 251^1$ possui $3 \cdot 2 = 6$ divisores e $n \cdot 2^n = 2^{1006} \cdot 251$, que possui $1007 \cdot 2 = 2014$ divisores, possuindo 2008 divisores a mais que n.

Portanto, $n = 1004$ e a soma de seus dígitos é $1 + 4 = 5$.

(B) Se considerarmos divisores negativos a argumentação segue:

$$2\cdot d(n\cdot 2^n) = \mathbf{(k + n + 1)\cdot 2\cdot d(b)} = 2008 + 2\cdot d(n) = \mathbf{2008 + (k + 1)\cdot 2\cdot d(b)}.$$

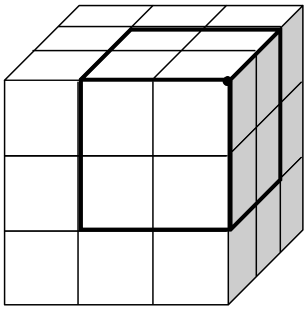
Daí, $2\cdot n\cdot d(b)=2008$ e de modo análogo conseguimos $n = 502$.

11. (D) Observe que

$$371^4 - 41^4 = (371^2 + 41^2)(371^2 - 41^2) = (371^2 + 41^2)(371 + 41)(371 - 41)$$
$$(371^2 + 41^2)\cdot 412\cdot 330.$$

Como $330 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$, claramente este número é múltiplo de 2, 3, 5 e 11. Além disso, como 7 divide 371, claramente 7 não divide $371^4 - 41^4$.

12. (B) O cubo terá um vértice cujas três faces adjacentes são todas azuis. Estas faces contêm um total de 19 cubinhos com pelo menos uma face azul. Destes, devemos descontar os 7 cubinhos (do canto destacado) que não têm face vermelha. Logo, exatamente 19 – 7 = 12 cubinhos têm pelo menos uma face de cada cor.



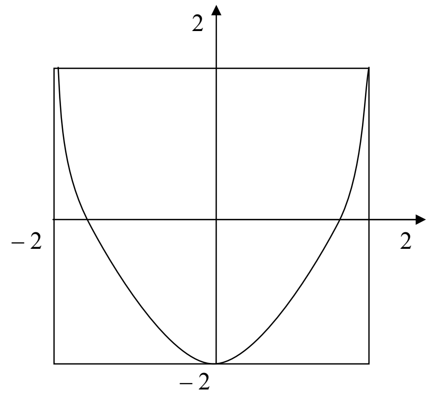
13. (E) Seja $f(x) = x^2 - 2$. Temos $f(b) = c$, $f(a) = c$ e $f(c) = a$.

Assim, queremos determinar o número de soluções reais de $f(f(f(x))) = x$. Se $|x| > 2, f(x) = x^2 - 2 = |x|^2 - 2 > |x| \geq x$ (pois $|x|^2 - |x| - 2 = (|x| - 2)(|x| + 1) > 0$).

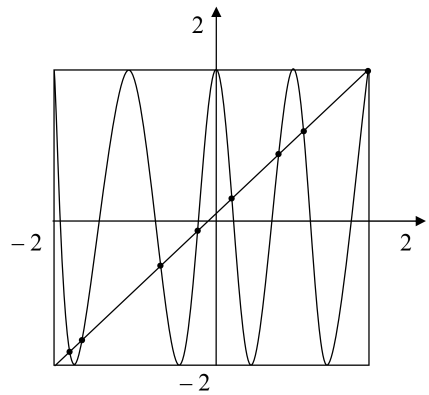
Assim, não há solução real com $|x| > 2$.

Se $x \in [-2,2]$, podemos escrever $x = 2\cos\theta$, para algum $\theta \in [0,\pi]$. Nesse caso, $f(x) = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$, $f(f(x)) = 2\cos 4\theta$ e $f(f(f(x))) = 2\cos 8\theta$. Queremos então contar o número de soluções reais de $\cos 8\theta = \cos\theta$, as quais vêm de $8\theta = \theta + 2k\pi,\ 0 \leq k \leq 3 \Rightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = 2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{7}\right)$, o que dá 4 soluções e de $8\theta = 2k\pi - \theta, 1 \leq k \leq 4 \Rightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{9} \Rightarrow x = 2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{9}\right)$, o que dá mais 4 soluções.

Obs. O gráfico de $f(x)$ para $x \in [-2,2]$ é da forma



Assim, os gráficos de $f(f(f(x)))$ e da reta $y = x$ são como abaixo, donde se conclui que a equação $f(f(f(x))) = x$ tem 8 soluções reais.



14. (D) Vamos contar o número de distribuições em que Arnaldo não recebe nenhuma carta de espadas. Como há 39 cartas não-espada, temos $\binom{39}{13}$ modos de escolhermos as cartas de Arnaldo. Depois disso, temos também $\binom{39}{13}$ modos de escolhermos as cartas de Bernaldo (as cartas dele podem ser de espadas) e $\binom{26}{13}$ modos de escolhermos as cartas de Cernaldo. Por último, só teremos 1 maneira de escolhermos as cartas de Dernaldo (ele ficará com as cartas que sobraram). Logo, há $\binom{39}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot 1$ distribuições em que Arnaldo não recebe cartas de espadas. De modo análogo, contando as distribuições em que nem Arnaldo nem Bernaldo recebem cartas de espadas, obtemos um total de $\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot 1$ distribuições. Logo, a probabilidade é:

$$\frac{\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot 1}{\binom{39}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot 1} = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{39}{13}} = \frac{\frac{26!}{13!13!}}{\frac{39!}{13!26!}} = \frac{26!26!}{39!13!}.$$

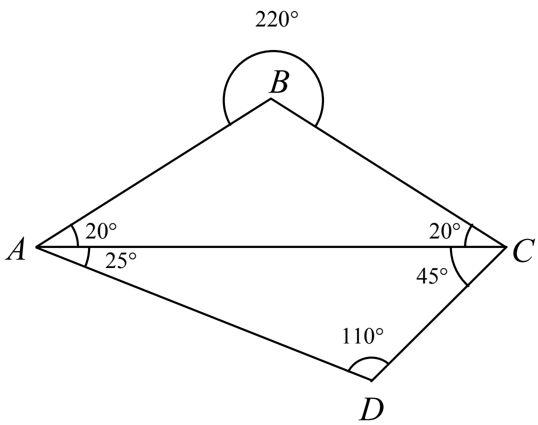
15. **(C) ou (D) ambas devem ser consideradas como resposta correta.**

(C) Escolhendo uma cor para o quadrado do centro (como o azul do exemplo), sobram 4 cores diferentes para pintar cada uma das quatro partes restantes do desenho, cada parte com uma cor diferente, e isso pode ser feito de $\frac{4\times3\times2\times1}{4}=6$ maneiras de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Pode-se verificar que há 4 maneiras iguais de se pintar os cartões, pois ao serem giradas, obtém-se a mesma. Como há 5 maneiras de escolher uma cor para o quadrado do centro, Soninha conseguirá produzir $5\times6=30$ cartões diferentes.

(D) Se considerarmos que a diagonal com quadradinhos pretos é distinta da outra, então só precisamos dividir por 2. Logo Soninha conseguirá 60 cartões diferentes.

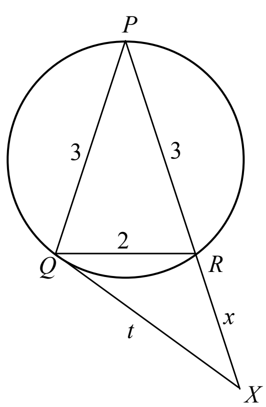
16. (C) Temos $AB = BC$ e o ângulo exterior $\angle ABC$ é igual a $2\cdot\angle ADC$. Isso implica que o ponto B é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ADC. Dessa forma,

$$\angle DBC = 2\cdot\angle DAC = 50°.$$

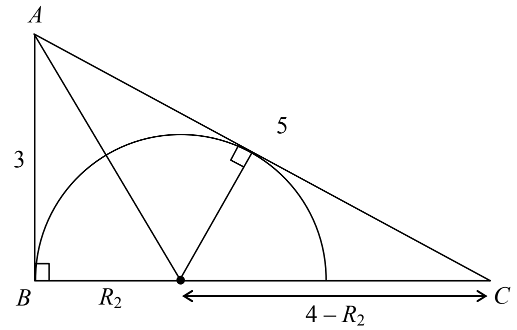


17. (B) Sejam $XR = x$ e $XQ = t$. Veja que $\angle XQR = \angle QPR = ½ \cdot$(arco QR). Portanto, os triângulos XRQ e XQP são semelhantes. Escrevendo a razão de semelhança para esses triângulos, obtemos: $\frac{x}{t}=\frac{t}{x+3}=\frac{2}{3}$.

Daí, $\frac{x}{t}\cdot\frac{t}{x+3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \therefore \frac{x}{x+3}=\frac{4}{9}\therefore x=\frac{12}{5}$.

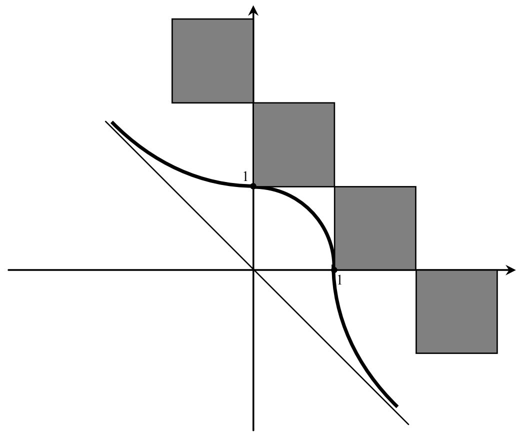


18. (B) Inicialmente, observe que o triângulo ABC é retângulo em B. Veja figura a seguir.



Veja que o centro da circunferência de raio R_2 está sobre a bissetriz interna do ângulo A. Logo, pelo teorema da bissetriz interna, temos $\frac{R_2}{3}=\frac{4-R_2}{5}$, de onde obtemos $R_2=\frac{3}{2}$. Por outro lado, a área de ABC é dada por $p{\cdot}R_1$, em que p é o semi-perímetro. Daí, segue-se que $\frac{3+4+5}{2}\cdot R_1=\frac{3\cdot 4}{2}$, de modo que $R_1 = 1$. Portanto, $\frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{3}$.

19. (C) Graficamente, podemos representar cada uma das equações dadas, obtendo exatamente duas soluções em comum.



Solução algébrica:

Se $x < 0$ e $y < 0$ temos $x\cdot|x|<0$ e $y\cdot|y|<0$, de modo que $x\cdot|x|+y\cdot|y|<0$ e não há soluções.

Se $x < 0$ e $y > 0$ temos $x\cdot|x|+y\cdot|y|=-x^2+y^2=(y-x)(y+x)=1$. Como $y - x > 0$, temos $x + y > 0$; considerando ainda que $y - x > y + x$, temos $(x+y)^2<(x+y)(y-x)=1\Rightarrow x+y<1\Rightarrow\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor<1$ e novamente não há soluções. Por simetria, se $x > 0$ e $y < 0$, também não temos soluções.

Se $x > 0$ e $y > 0$ temos $x\cdot|x|+y\cdot|y|=x^2+y^2=1$, o que implica $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, de modo que $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor=0$ e novamente não temos soluções.

Finalmente, falta considerar o caso em que x ou y é igual a zero. Substituindo x por zero, obtemos das duas equações que $y = 1$; analogamente, obtemos a solução (1,0).

Deste modo, o sistema admite duas soluções: (0,1) e (1,0).

20. (E) Seja $abcd$ um número paladino. Temos 9 possibilidades para escolhermos o dígito a, 9 para escolhermos b e 9 para escolhermos c. Uma vez escolhidos esses dígitos, devemos escolher o dígito d de modo que o número formado seja múltiplo de 9. Mas, só haverá um modo de escolhermos d: se $a + b + c$ deixar resto r na divisão por 9 (com $0\le r\le 8$), devemos escolher $d = 9 - r$. Logo, a quantidade de números paladinos é $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$.

21. (B) Veja que $f(f(x))=\dfrac{c\cdot\dfrac{cx}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{cx}{2x+3}+3}=\dfrac{c^2x}{(2c+6)x+9}=x$ se, e somente se, $c^2x=(2c+6)x^2+9x$. Daí, devemos ter $c^2 = 9$ e $2c + 6 = 0$, o que nos dá a única solução $c = -3$.

22) (C) Sejam V o volume do cone e v o volume da areia, indicado na figura 1. Fazendo semelhança entre os dois cones, de alturas 3 cm e 5 cm, obtemos $\dfrac{v}{V}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$. Na figura 2, temos semelhança entre dois cones, de alturas $(5 - h)$ cm e 5 cm, e volumes $V - v$ e V, respectivamente. Temos:

$$\left(\frac{5-h}{5}\right)^3=\frac{V-v}{V}=1-\frac{v}{V}=\frac{98}{125}\therefore\frac{5-h}{5}=\frac{\sqrt[3]{98}}{5}\therefore h=5-\sqrt[3]{98}.$$

23. (B) Como AC é um número de dois algarismos então $AC = 10A + C$. Com isso, $4.(10A + C) = 24C$, e daí $C = 2A$. Em particular C é par. Temos agora um novo tabuleiro

	X	**4**
	6*C*	
	C	**24**

Agora, $4X = 24.\ 6C$, então $X = 36C$. Com isso, o produto mágico será $(6C)^3$. Fazendo $C = 2$, temos que o produto será 1728 e assim a soma será 18. Note que nesse caso $A = 1 = C/2$. Para valores de C maiores ou iguais a 4 o número procurado terá mais que 4 algarismos.

O único quadrado mágico que satisfaz as condições do enunciado é:

6	**72**	**4**
8	**12**	**18**
36	**2**	**24**

24) (D) Formaremos a fila da seguinte maneira: inicialmente, posicionamos a pessoa mais alta. Então, a segunda pessoa poderá ocupar qualquer um dos dois lados em relação à primeira pessoa, de modo que há 2 modos da segunda pessoa ser posicionada. A terceira pessoa mais alta pode ser colocada em ambos os lados da fila então formada, tendo também 2 modos de entrar na fila. De um modo geral, cada pessoa terá dois modos de se posicionar na fila, escolhendo uma das duas extremidades. O total de posicionamentos feitos dessa forma é $1 \times 2^9 = 512$.

25. (D) Se a,b,c,d,e são cinco inteiros maiores que um, então $a,b,c,d,e\geq 2$, e com isso, a soma de quaisquer quatro deles é pelo menos 8. Observando a equação $b(a+c+d+e)=155=5.31$, onde 5 e 31 são primos, temos que $b=5$ e $a+c+d+e=31$. Portanto, $a+b+c+d+e=31+5=36$.

Obs. Note que $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 9$ e $e = 11$ é solução do sistema.