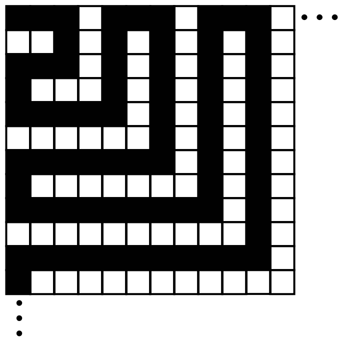
XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. Séries)

PROBLEMA 1

Parte das casas de um quadriculado com o mesmo número de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) é pintada de preto, obedecendo ao padrão apresentado pelo desenho ao lado.

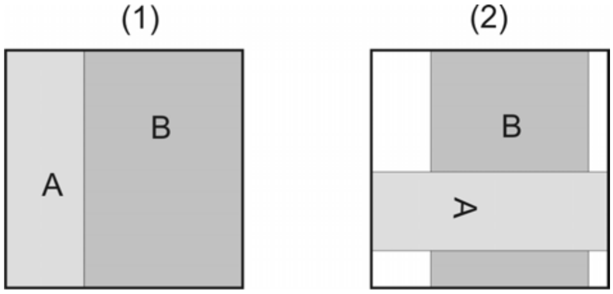
a) Quantas casas serão pintadas num quadriculado com 14 linhas e 14 colunas, de acordo com esse padrão?

b) Quantas linhas tem um quadriculado com 199 casas pintadas?



PROBLEMA 2

Uma sala quadrada com 81 m^2 de área tem o seu piso inteiramente coberto por dois tapetes retangulares A e B, que não se superpõem, conforme mostrado na figura (1) abaixo. Em certo momento, o tapete B é deslocado, o tapete A é girado de 90^o e colocado sobre o tapete B, conforme indicado na figura (2).



Sabendo que a área do tapete B é o dobro da área do tapete A, calcule a área da parte do piso que ficou descoberta.

PROBLEMA 3

Em uma face de cada um de três cartões foi escrito um número inteiro positivo. Em seguida, os cartões foram colocados lado a lado sobre uma mesa, com a face numerada para baixo.

Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo sabem que:

I. Os números escritos nos cartões são todos diferentes.
II. A soma dos três números é 13.
III. Os números crescem da esquerda para a direita.

a) Considerando as condições I, II e III, escreva todas as possibilidades de numeração dos cartões.

b) Agora é hora de descobrir os números que foram escritos nos cartões.

Primeiramente, Arnaldo olha o número do primeiro cartão à esquerda e diz que não tem informações suficientes para descobrir os outros dois números sem levantar os outros cartões. Depois, Bernaldo levanta o último cartão à direita, olha o número e diz também que não consegue descobrir os dois números à esquerda, sem levantar todos os cartões. E o mesmo acontece com Cernaldo, que levanta o cartão do meio, olha seu número e afirma que não consegue descobrir os números nos outros dois cartões.

Sabendo que todos ouvem o que os demais dizem, mas não vêem o cartão que o outro olhou, qual número está escrito no cartão do meio?

PROBLEMA 4

Considere a tabela a seguir com quatro linhas (fileiras horizontais) e quatro colunas (fileiras verticais) a qual está preenchida com números naturais, ocorrendo repetições de números:

1	0	0	3
5	1	2	4
1	1	2	3
6	1	4	0

Ao somarmos cada uma de suas linhas (L1, L2, L3 e L4) e colunas (C1, C2, C3 e C4) obtemos 8 números distintos: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13. Veja:

	C1	C2	C3	C4	*Soma da linha*
L1	1	0	0	3	*4*
L2	5	1	2	4	*12*
L3	1	1	2	3	*7*
L4	6	1	4	0	*11*
Soma da coluna	*13*	*3*	*8*	*10*	

Apresente, se for possível:

a) uma tabela com 4 linhas e 4 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 8.

b) uma tabela com 8 linhas e 8 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 16.

c) uma tabela com 9 linhas e 9 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 18.

Atenção: caso seja impossível montar alguma tabela, você deve explicar por quê.

PROBLEMA 5

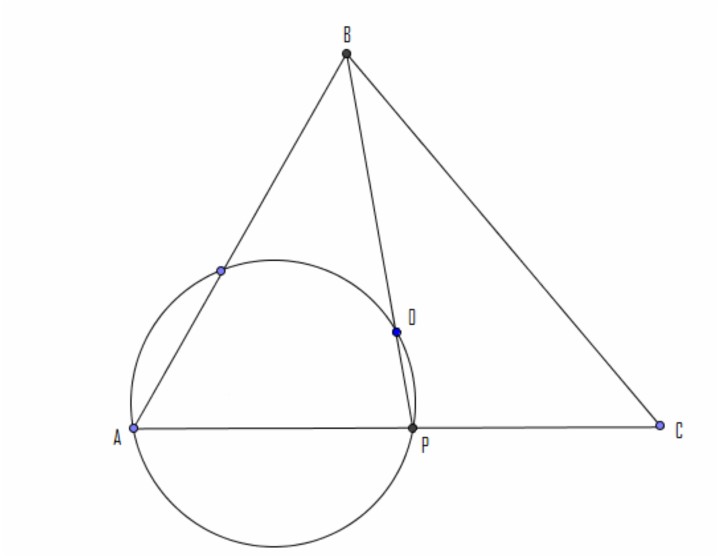
Sendo $\mathrm{A} = \underbrace{555555\cdots5}_{\text{2007 cincos}} \times \underbrace{222222\cdots2}_{\text{2007 dois}}$, calcule a soma dos algarismos de $9 \times \mathrm{A}$. Não se esqueça de justificar a sua resposta.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a intersecção das retas BO e AC e S a circunferência circunscrita a AOP. Suponha que $BO = AP$ e que a medida do arco OP em S que não contém A é 40°. Determine a medida do ângulo $\angle OBC$.

Obs: A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus vértices e seu centro é chamado de circuncentro.



PROBLEMA 2

Considere a tabela a seguir com quatro linhas (fileiras horizontais) e quatro colunas (fileiras verticais) a qual está preenchida com números naturais, ocorrendo repetições de números:

1	0	0	3
5	1	2	4
1	1	2	3
6	1	4	0

Ao somarmos cada uma de suas linhas (L1, L2, L3 e L4) e colunas (C1, C2, C3 e C4) obtemos 8 números distintos: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13. Veja:

	C1	C2	C3	C4	*Soma da Linha*
L1	1	0	0	3	*4*
L2	5	1	2	4	*12*
L3	1	1	2	3	*7*
L4	6	1	4	0	*11*
Soma da Coluna	*13*	*3*	*8*	*10*	

Apresente, se for possível:

a) uma tabela com 4 linhas e 4 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 8.

b) uma tabela com 8 linhas e 8 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 16.
c) uma tabela com 9 linhas e 9 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 18.
Atenção: caso seja impossível montar alguma tabela, você deve explicar por quê.

PROBLEMA 3

Mostre que existe um inteiro positivo a tal que $\dfrac{a^{29}-1}{a-1}$ tem pelo menos 2007 fatores primos distintos.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Prove que não existem soluções inteiras e positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo retângulo isósceles. K e M são pontos sobre hipotenusa AB, com K entre A e M, e o ângulo $\angle KCM = 45^\circ$. Prove que $AK^2 + MB^2 = KM^2$.

PROBLEMA 6

Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro $n \times n$. Ludmilson e Ednalva jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Ludmilson consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Ednalva consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Ludmilson e Ednalva jogam alternadamente, sendo Ludmilson o primeiro a jogar. Quando Ludmilson não puder fazer sua jogada, então Ednalva fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se é possível que Ednalva ganhe o jogo, não importando como Ludmilson jogue, em cada um dos seguintes casos:

a) $n = 10$.

b) Caso geral (n qualquer).

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$ tem pelo menos uma solução real.

PROBLEMA 2

Para quantos números inteiros c, $-2007 \le c \le 2007$, existe um inteiro x tal que $x^2 + c$ é múltiplo de 2^{2007}?

PROBLEMA 3

São dados n pontos no plano, os quais são os vértices de um polígono convexo. Prove que o conjunto das medidas dos lados e das diagonais do polígono tem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos distintos.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x. Por exemplo, $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1{,}2 \rfloor = -2$.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final.
É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

PROBLEMA 5

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD, Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD. Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.

PROBLEMA 6

Dados números reais $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, suponha que todo número real ocorre no máximo duas vezes entre as diferenças $x_j - x_i$, com $1 \le i < j \le n$. Prove que há pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ números reais que ocorrem exatamente uma vez entre tais diferenças.

Observação: caso você tenha se esquecido da prova de ontem, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x. Por exemplo, $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1{,}2 \rfloor = -2$.