Gabarito para a prova de 2º e 3º anos.

Observações para as comissões que irão corrigir as provas

1. Cada questão vale **10** (dez) pontos, de modo que a prova vale **80** pontos (oitenta) pontos.
2. Estamos **sugerindo** uma pontuação parcial de forma a aproveitar (ao máximo) o que o aluno desenvolveu.
3. Como existem diversas formas de se chegar ao resultado, o examinador deverá ser flexível na aplicação dessa pontuação.

01. Como Maria deixa a pedra cair a partir do repouso, o movimento da pedra é o de queda livre que cai de uma altura H em um tempo de queda t_q dado por

$$H = \frac{gt_q^2}{2} \Longrightarrow t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 20}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2s.$$

(3 pontos)

O som, com velocidade v_s, produzido pelo choque da pedra após atingir o solo chega até Eva depois de um tempo t_s igual a

$$\sqrt{d^2 + H^2} = v_s t_s \Longrightarrow t_s = \frac{\sqrt{d^2+H^2}}{v_s},$$

(3 pontos)

onde d é a distância entre os edifícios.

Sabendo que a soma dos tempos é igual a $t = 2{,}06s$, podemos escrever

$$t = t_q + t_s \Longrightarrow 2,06 = 2 + \frac{\sqrt{d^2+20^2}}{340} \Longrightarrow 0,06 = \frac{\sqrt{d^2+20^2}}{340} \Longrightarrow$$

$$0,06 \times 340 = \sqrt{d^2 + 400} \Longrightarrow (20,4)^2 = d^2 + 400 \Longrightarrow$$

$$d^2 = 416,16 - 400 \Longrightarrow d^2 = 16,16 \Longrightarrow d = \sqrt{16,16} = 4,4\ m.$$

(4 pontos)

02. Considerando as energias mecânicas no ponto a, mais alto do iglu, como E_a e no ponto b, onde o esquimó perde o contato com a superfície do iglu, a uma altura h, como sendo igual a E_b, podemos escrever pela conservação da energia mecânica

$$E_a = E_b \Longrightarrow mgR = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh \Longrightarrow R = \tfrac{1}{2g}v^2 + h \Longrightarrow h = R - \tfrac{v^2}{2g}. \quad (1)$$

(2 pontos)

A segunda lei de Newton envolvendo as forças atuando no esquimó no ponto b é dada por

$$mg\cos\theta - N = m\tfrac{v^2}{R}, \quad (2)$$

(2 pontos)

Onde N é a força de reação normal à superfície naquele ponto e θ é o ângulo entre o raio R e a linha que liga o ponto b à base do iglu e que tem altura h.

Quando o esquimó perde o contato com o iglu, a força de reação normal $N = 0$. Assim, como $\cos\theta = h / R$, a (2) se torna

$$mg\cos\theta = m\tfrac{v^2}{R} \Longrightarrow g\cos\theta = \tfrac{v^2}{R} \Longrightarrow g\tfrac{h}{R} = \tfrac{v^2}{R} \Longrightarrow \tfrac{v^2}{g} = h. \quad (3)$$

Agora usando a (3), a (1) toma a forma

$$h = R - \tfrac{h}{2} \Longrightarrow \tfrac{3h}{2} = R \Longrightarrow h = \tfrac{2R}{3} = \tfrac{2\times 3{,}75}{3} = \tfrac{7{,}5}{3} = 2{,}5\ m. \quad (4)$$

(1 ponto)

b) Usando a (4), a (3) nos dá

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{10 \times 2{,}5} = \sqrt{25} = 5\ m/s.$$

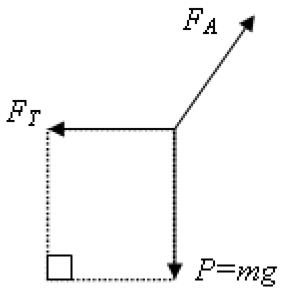
(5 pontos)

03. a) Com velocidade angular $2\omega_0$ a força normal que atua na pessoa é

$$F_N = m\frac{(2\omega_0 R)^2}{R} = 4m\omega_0^{\,2}R\ .$$

O processo de frenagem acrescenta ao corpo da pessoa uma força tangencial, horizontal, de intensidade F_T. Esta força, juntamente com o peso ($P = mg$) da pessoa deve se anular com a força de atrito, F_A, tal que a pessoa permaneça parada em relação à parede cilíndrica, como mostra o esboço

$$F_A^{\,2} = (mg)^2 + F_T^2$$



A força de atrito máxima é μF_N, então, escrevendo a força tangencial como $F_T = m\alpha R$, onde α é a aceleração angular, obtemos

$$\left(4\mu m\omega_0^2 R\right)^2 = (mg)^2 + (m\alpha R)^2 \quad \therefore$$

$$\alpha = \sqrt{16\mu^2\omega_0^4 - \left(\frac{g}{R}\right)^2}\ .$$

ω_0 é a velocidade angular mínima para que não haja deslizamento da pessoa, em movimento uniforme ($F_T = 0$). Então, $mg = \mu m\dfrac{(\omega_0 R)^2}{R}\ \therefore \mu\,\omega_0^{\,2} = \dfrac{g}{R}$. Assim, α pode ser escrita como

$$\alpha = \frac{g}{R}\sqrt{15}$$ **(5 pontos)**

b) A aceleração resultante (entre as componentes tangencial e centrípeta) será $a_R = \sqrt{(\alpha R)^2 + \left(4\omega_0^2 R\right)^2}\ \therefore\ a_R = g\sqrt{15 + \dfrac{16}{\mu}}$. **(5 pontos)**

04. Inicialmente a esfera possui uma energia potencial igual a mgR,

onde o zero da energia potencial se encontra no ponto mais baixo de sua trajetória. Assim sendo, nesse ponto mais baixo sua energia cinética vale

$\frac{1}{2}mv_{1i}^2.$

Aplicando o princípio de conservação da energia mecânica nesses dois pontos, podemos encontrar a velocidade inicial da esfera antes da colisão com o bloco

$$mgR = \frac{1}{2}mv_{1i}^2 \Longrightarrow v_{1i} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,45} = \sqrt{9} = 3\ m/s.$$

(2 pontos)

Logo após a colisão elástica entre a esfera e o bloco inicialmente em repouso ($v_{2i} = 0$), a velocidade v_{2f} do bloco depois da colisão é dada por

$$v_{2f} = \frac{2m}{m+M}v_{1i} = \frac{2\times4}{4+6} \times 3 = \frac{8\times3}{10} = \frac{24}{10} = 2,4\ m/s.$$

(2 pontos)

Após a colisão, o bloco desliza sobre uma superfície plana de comprimento d com atrito cinético. O movimento nessa região causa perda de energia mecânica na forma de energia térmica E_t

$$E_t = -f_{at}d = -\mu_c N d = -\mu_c M g d = -0,4 \times 6 \times 10 \times 0,5 = 12\ J.$$

(2 pontos)

A energia mecânica restante

$$E_f = \frac{1}{2}Mv_{2f}^2 - E_t = \frac{6\times(2,4)^2}{2} - 7,2 = 17,3 - 12 = 5,3\ J.$$

(2 pontos)

é suficiente para que o bloco continue se movendo sobre uma superfície sem atrito que tem uma curvatura. O bloco se move até atingir uma altura máxima h.

Encontramos a altura máxima com o auxílio da equação abaixo para a conservação da energia mecânica

$$E_f = Mgh \Longrightarrow h = \frac{E_f}{Mg} = \frac{5,3}{6\times10} = 0,088\ m = 8,8\ cm.$$

(2 pontos)

05. **a)** A velocidade de escape de um planeta de massa M , é definida como a mínima velocidade necessária para que um objeto de massa m, ao ser lançado para fora do planeta, não retorne mais para a superfície desse planeta. Significa então que sob a ação apenas da força gravitacional desse planeta, a energia total desse objeto é zero. Assim, podemos escrever uma equação para a conservação da energia do objeto próximo à superfície do planeta e no infinito como

$$E = \frac{-GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = 0.$$

da qual resulta

$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R}.$$

(2 pontos)

Por outro lado, usando a segunda lei de Newton para as forças atuando no objeto orbitante temos

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

da qual obtemos

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

(2 pontos)

Assim, a relação entre v_{esc} e v pode ser calculada

$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R} = 2v^2 \Longrightarrow v_{esc} = \sqrt{2}v.$$

(1 ponto)

b) Quando a pedra é arremessada para cima com velocidade inicial v_0, sua energia total próximo da superfície do planeta é dada por

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h} \Longrightarrow v_0^2 - \frac{2GM}{R} = -\frac{2GM}{R+h} \Longrightarrow v_0^2 - v_{esc}^2 = -\frac{2GM}{R+h} \Longrightarrow$$

$$v_{esc}^2 - v_0^2 = \frac{2GM}{R+h} \Longrightarrow R + h = -\frac{2GM}{v_{esc}^2 - v_0^2} \Longrightarrow h = \frac{2GM}{v_{esc}^2 - v_0^2} - R = \frac{Rv_{esc}^2}{v_{esc}^2 - v_0^2} - R \Longrightarrow$$

$$h = \frac{Rv_{esc}^2 - Rv_{esc}^2 + Rv_0^2}{v_{esc}^2 - v_0^2} = \frac{Rv_0^2}{v_{esc}^2 - v_0^2}.$$

(5 pontos)

Considerar (3 pontos) para conservação da energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}$$

Resultado sem que o aluno substitua a velocidade de escape:

$$h = \frac{Rv_0^2}{\frac{2GM}{R} - v_0^2}$$

06. Como os blocos são sistemas de partículas, os mesmos podem ser considerados como sendo compostos de vários subsistemas. Assim, podemos, por exemplo, tratar o bloco de comprimento

l_2 cima, como composto de dois sub-blocos, um de comprimento l_2 e outro de comprimento $L-l_2$. A força da gravidade assim atua em seus respectivos centros de massa localizados em $l_2/2$ e $(L-l_2)/2$, respectivamente. Como suas densidades são uniformes, suas massas são proporcionais a seus comprimentos.

Com isso, podemos escrever a segunda lei de Newton para o equilíbrio estático, com eixo de rotação entre os dois sub-blocos e com sentido positivo o anti-horário, como

$$\rho(L-l_2)\tfrac{(L-l_2)}{2}g - \rho l_2 \tfrac{l_2}{2} g = 0 \Longrightarrow l_2^2 = (L-l_2)^2 \Longrightarrow$$

$$l_2^2 = L^2 - 2Ll_2 + l_2^2 \Longrightarrow L^2(L-2l_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$l_2 = \tfrac{L}{2}.$$

(5 pontos)

Podemos fazer o mesmo para o eixo de rotação que fica entre os dois sub-blocos de baixo. Assim temos

$$\rho(L-l_1)\tfrac{(L-l_1)}{2}g - \rho l_1 \tfrac{l_1}{2} g + \rho(L-l_1-l_2)\tfrac{(L-l_1-l_2)}{2}g - \rho(l_1+l_2)\tfrac{(l_1+l_2)}{2}g = 0 \Longrightarrow$$

$$(L-l_1)^2 - l_1^2 + (L-l_1-l_2)^2 - (l_1+l_2)^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$L^2 - 2Ll_1 + l_1^2 - l_1^2 + l^2 - 2L(l_1+l_2) + (l_1+l_2)^2 - (l_1+l_2)^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$2L^2 - 2Ll_1 - 2Ll_2 - 2Ll_1 = 0 \Longrightarrow 4l_1 = 2(L-l_2) = 2(L-L/2) = 2L/2 = L \Longrightarrow$$

$$l_1 = \tfrac{L}{4}.$$

(5 pontos)

$$l_1 + l_2 = \frac{3}{4}L$$

Caso o aluno chegue ao mesmo resultado usando considerações e argumentos corretos, considerar a resposta como correta (10 pontos)

07. Considerando a origem da energia potencial no fundo da câmara de gás, podemos escrever a equação para o equilíbrio entre as forças peso Mg do pistão, a força exercida

pela pressão do gás e a pressão atmosférica P_o

$$Mg + P_0 A = \frac{nRT}{Ah} A \Longrightarrow h = \frac{nRT}{Mg + P_0 A}.$$

(10 pontos)

Se o aluno fizer sem a pressão atmosférica, considerar a resposta como certa:

$$h = \frac{nRT}{MgA}$$

(10 pontos)

08. Usando a lei de Snell entre o ar e o meio líquido, temos

$1 = n \sin \theta,$ **(5 pontos)**

Onde θ é o ângulo entre a linha que ligam os pontos A e B e a linha da parede esquerda do recipiente que contém o líquido. Como esse ângulo é determinado pelas dimensões do recipiente, ele tem a expressão

$\sin \theta = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}.$

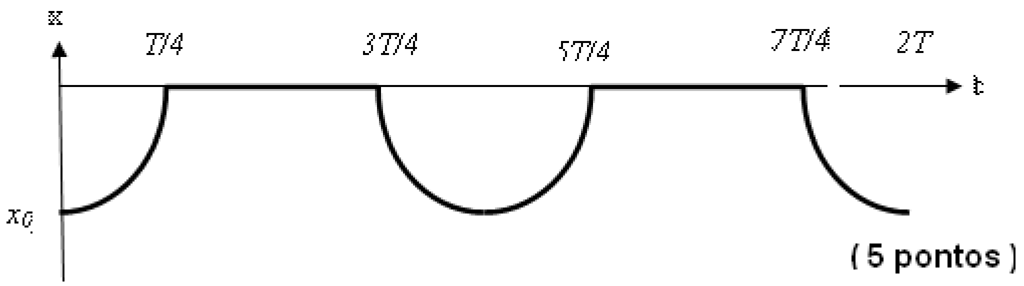
Assim, obtemos

$n = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{l^2+h^2}}{l}.$ **(5 pontos)**

09. a) Considerando inicialmente apenas o bloco 1, quando o colocamos em sua posição inicial e o abandonamos, ele passa a descrever um MHS com o centro de massa descrevendo a função horária

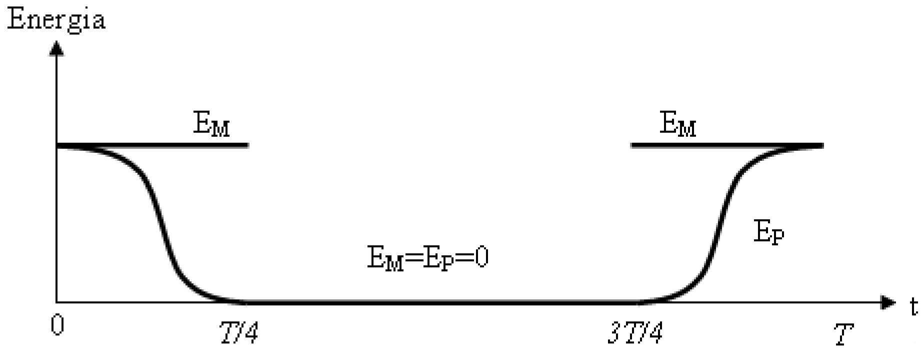
$x_1(t) = x_0 \cos(\omega t)$, sendo $x_0 = -\frac{l_0}{4}$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Depois de decorrido ¼ do período $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, o bloco 1 se choca com o bloco 2 , de forma perfeitamente elástica, na posição em que as molas encontram-se relaxadas, havendo transferência total de momento e energia cinética, isto é, o bloco 1 fica em repouso, $x_1(t) = 0$, enquanto o bloco 2 continua para a direita, voltando a se chocar após T/2 do primeiro choque. Após o segundo choque o bloco 2 permanece em repouso e o bloco 1 repete o movimento até ocorrer o terceiro choque após T/2 do segundo e assim, sucessivamente. Desta forma, o gráfico $x_1(t) \times t$, para dois períodos, será



- se o aluno fizer o esboço correto sem os valores nos eixos, considerar (3 pontos)

b) A energia potencial do bloco 1 é $E_P(t) = \frac{1}{2}kx_1^2(t)$ e a energia mecânica é constante e igual a $E_M = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{4}\right)^2$ quando o bloco se encontra em movimento, e nula quando ele se encontra em repouso.



(5 pontos)

- se o aluno fizer o esboço correto sem os valores nos eixos, considerar (3 pontos)

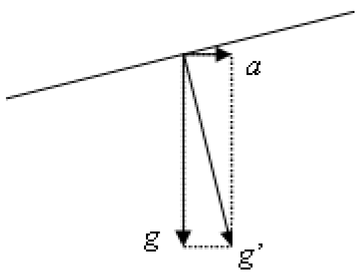
10. a) Em relação ao aquário, referencial não inercial, podemos considerar a situação estática na presença de uma gravidade efetiva perpendicular a superfície do líquido, de intensidade $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$

Usando o teorema de Steven, a pressão em um ponto dentro do líquido a uma distância h da superfície é dada por $P = P_{atm} + \rho h\sqrt{g^2 + a^2}$, onde P_{atm} é a pressão da atmosfera. **(5 pontos)**

- Se o aluno não considerar a pressão atmosférica a resposta esta correta.

b) O empuxo, considerando a situação estática, usando o teorema de Arquimedes, será perpendicular a superfície do líquido, dado por $E = \rho V\sqrt{g^2 + a^2}$. **(5 pontos)**

O empuxo tem direção e sentido do vetor -g'



11. A aresta do cubo, de comprimento *L*, a uma temperatura *T*, é dada por $L = L_0 \left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$.

A área *A* de uma das faces, como função da temperatura, será

$A = L_0^2 \left(1 + \alpha(T - T_0)\right)^2$. O termo $\left(\alpha(T - T_0)\right)^2$, obtido ao desenvolvermos o binômio, é desprezível quando comparado com o termo $2\alpha\left(T - T_0\right)$. Assim podemos escrever

$A = A_0\left(1 + 2\alpha(T - T_0)\right)$,onde $A_0 \equiv L_0^2$. Ou ainda $\dfrac{A - A_0}{A_0} \cong 2\alpha(T - T_0) \approx 2 \times 10^{-2}$. **(5 pontos)**

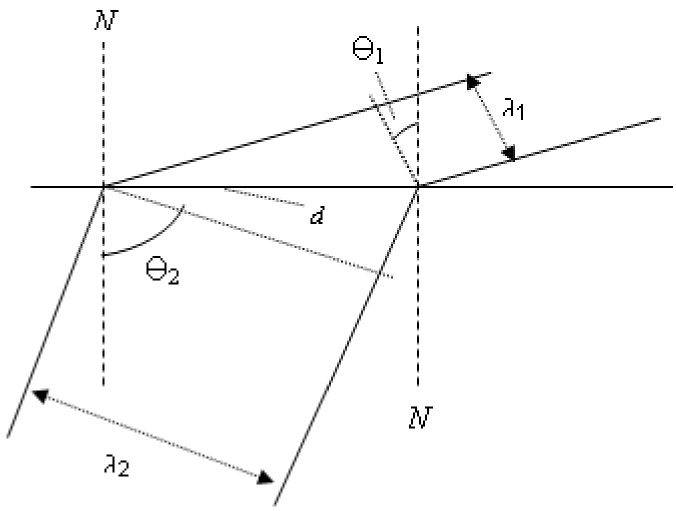
O volume V como função da temperatura *T* será dado por

$V = A_0 L_0 \left(1 + 2\alpha(T - T_0)\right)\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$. Novamente, o termo $2\alpha^2(T - T_0)^2$, é desprezível quando comparado com $3\alpha(T - T_0)$. Assim, obtemos

$V \cong V_0(1 + 3\alpha(T - T_0))$, onde $V_0 \equiv A_0 L_0$. Ou ainda $\dfrac{V - V_0}{V_0} \cong 3\alpha(T - T_0) \approx 3 \times 10^{-2}$.

(5 pontos)

12. a) Considerando a refração apresentada esquematicamente abaixo, onde λ_1 é o comprimento de onda no meio 1 (onda incidente), λ_2 é comprimento de onda no meio 2 (onda refratada), Θ_1 é o ângulo de incidência, Θ_2 o ângulo de refração e cada *N,* uma reta normal à superfície. Como a frequência é a mesma nos dois meios, e a velocidade no meio 2 é cinco vezes a velocidade no meio 1, temos $\lambda_1/\lambda_2=1/5$.



Da figura acima vemos que

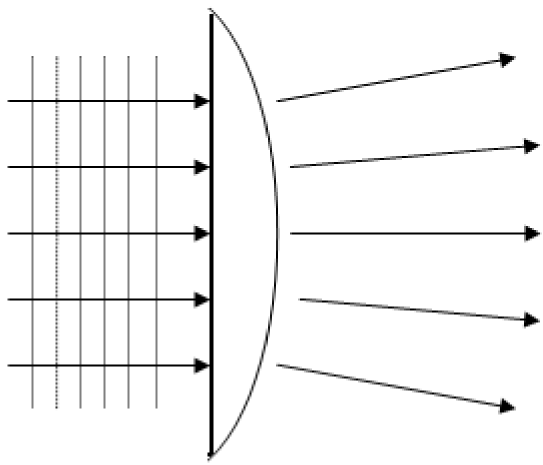
$$d\,sen(\Theta_1)=\lambda_1 \quad \text{e} \quad d\,sen(\Theta_2)=\lambda_2 \text{ , logo,}$$

$$\lambda_1/sen(\Theta_1) = \lambda_2/sen(\Theta_2),$$

Assim, para $\Theta_2=\pi/2$, $sen(\Theta_1)=\lambda_1/\lambda_2=0,2$.

Concluindo, o maior ângulo de incidência para que haja refração é $\Theta_1=arcsen(0,2)$. **(5 pontos)**

b) Na primeira interface a onda refrata sem se desviar. Na segunda, pelo que já foi demonstrado no item a) o ângulo de refração é menor que o ângulo de incidência, originado um comportamento divergente da onda refratada.



(5 pontos)

13. a) Em um gás ideal a energia interna é proporcional a temperatura e não depende do volume, indicando que a variação de energia interna será maior, naquele que sofrer maior variação de temperatura.

Na transformação isocórica a temperatura final T_A será determinada através da equação

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{(P_0/2)}{T_A} \quad \therefore \quad T_A = \frac{T_0}{2}.$$

Na transformação isotérmica, a temperatura não varia, portanto a temperatura final $T_B = T_0$, com volume final $V_B = 2V_0$

Na transformação adiabática o volume final V_C pode ser obtido da equação

$$P_0 V_0{}^{\gamma} = (P_0/2) V_C{}^{\gamma} \quad \therefore \quad V_C = 2^{\frac{1}{\gamma}} V_0.$$

De imediato percebe-se que $V_0 < V_C < 2V_0$, identificando-se em um diagrama $P \times V$, através das isotermas, $PV = nRT = cte.$, que $T_A < T_C < T_B = T_0$, identificando a transformação isocórica como aquela que sofreu maior variação em valor absoluto de sua energia interna. **(5 pontos)**

- se o aluno fizer considerações corretas e chegar à transformação isocórica vale **3 pontos** o item.

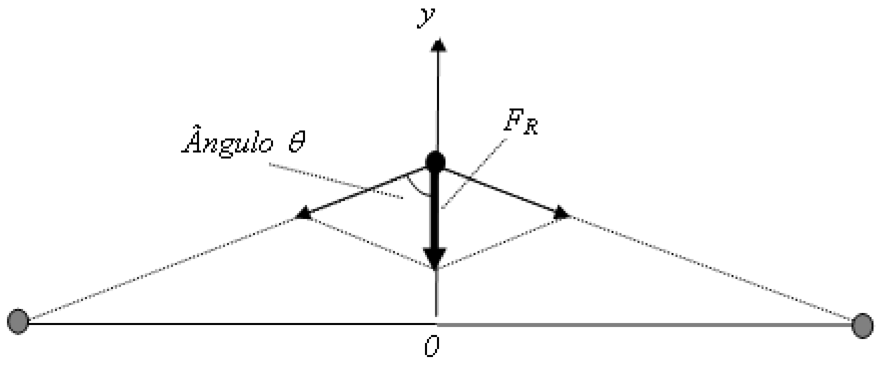
b) Na transformação adiabática, a temperatura final T_C pode ser determinada através das equações

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{(P_0/2) V_C}{T_C} \quad \text{e} \quad P_0 V_0{}^{\gamma} = (P_0/2) V_C{}^{\gamma} \therefore T_C = 2^{\frac{1}{\gamma}-1} T_0 \quad \therefore$$

$$T_C = 2^{\frac{2}{5}} 300K.$$

(5 pontos)

14. Inicialmente, determinemos a força elétrica resultante sobre a carga negativa, esboçada a seguir



$$F_R = -2\cos(\theta)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right)}$$, onde $\cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$ $\therefore$

$$F_R = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 y}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} \quad \therefore \quad F_R = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}\left(1+\left(\frac{2y}{L}\right)^2\right)^{-3/2} \quad \therefore$$

usando a aproximação sugerida pois $\left(\frac{2y}{L}\right)^2 << 1$, obtemos

$$F_R \cong -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{2y}{L}\right)^2\right)$$, o que nos levando para uma aproximação linear

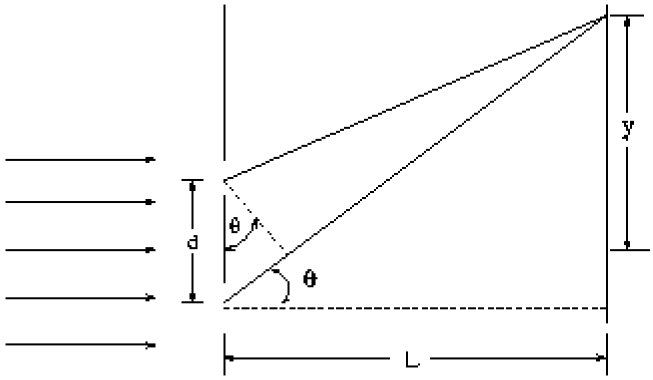
$$F_R \cong -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} \equiv -ky$$, onde $k \equiv \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}$,

que é a mesma lei de força em um sistema massa-mola, $F = -ky$, onde a freqüência angular é $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Assim a freqüência angular do movimento da carga negativa para pequenas oscilações é

$$\omega \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{q^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}}.$$

(10 pontos)

15. A figura a seguir esboça o feixe incidente, a parede com as duas fendas, o anteparo onde serão observadas as franjas e a notação usada.



$d = 0{,}5mm$; *y* é a distância entre o centro do máximo central e um ponto qualquer no plano do anteparo. Para pequenos ângulos temos a condição de ocorrência de máximos $dsen(\theta) = n\lambda$, para *n* inteiro. $\lambda = 5000\overset{0}{A}$. Para *n=0*, temos o máximo central e, para *n=1*, $sen(\theta_1) = \frac{\lambda}{d} \cong \frac{y}{L}$, com $y = 1mm$, a distância entre dois máximos. Daí, $L \cong \frac{dy}{\lambda}$ =1 m. **(10 pontos)**

16. O sistema é conservativo. Portanto, pode-se aplicar o principio de conservação da energia mecânica.

A conservação da energia mecânica aplicada aos pontos A e B, onde $v_A = 0$, fornece:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \Rightarrow q(V_B - V_A) = \frac{1}{2}m\left(v_A^2 - v_B^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(0 - v_B^2\right)\right);$$

$$q(V_B - V_A) = -\frac{1}{2}mv_B^2.$$ **(4 pontos)**

De maneira análoga, a conservação da energia aplicada aos pontos C e B, onde $v_A = 0$ e $v'_B = 2v_B$, fornece:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + qV_C = \frac{1}{2}mv_B'^2 + qV_B \Rightarrow q(V_B - V_C) = \frac{1}{2}m\left(v_C^2 - v_B'^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(0 - v_B'^2\right)\right) = -\frac{1}{2}m(2v_B)^2;$$

$$q(V_B - V_C) = -2mv_B^2.$$ **(4 pontos)**

Agora, comparando os resultados anteriores, onde $V_A = 452V$ e $V_C = 791V$, obtém-se:

$$\frac{q\left(V_B - V_A\right)}{q\left(\left(V_B - V_C\right)\right)} = \frac{-\frac{1}{2}mv_B^2}{-2mv_B^2} \Rightarrow \frac{V_B - V_A}{V_B - V_C} = \frac{1}{4};$$

$$V_B = \frac{1}{3}\left(4V_A - V_C\right) = \frac{1}{3}\left(4x452 - 791\right) = 339V.$$ **(2 pontos)**