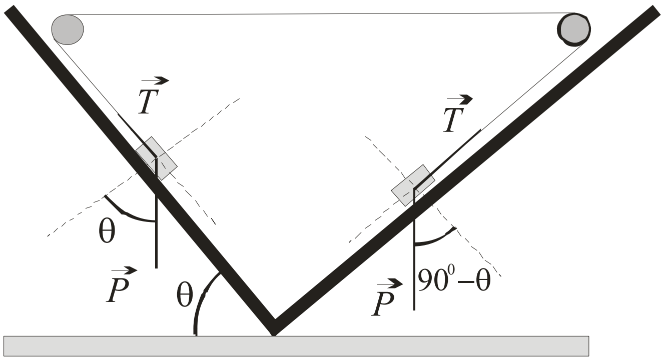
Gabarito – Prova de 3º Ano

1.



Considerando as equações de movimento apenas na direção paralela ao plano e tomando como positivo o sentido anti-horário, temos:

Para o corpo da esquerda: $m\,a = m\,g\,sen\theta - T$ (1)

Para o corpo da direita: $m\,a = T - m\,g\,sen(90^0 - \theta) = T - mg\cos\theta$ (2)

Somando uma equação com a outra obtemos: $a = \frac{g}{2}(sen\theta - \cos\theta)$

Para que a aceleração seja máxima, a diferença $(sen\theta - \cos\theta)$ deve ser máxima. O valor máximo a ser alcançado, em módulo, é 1. Como $0 \le \theta \le 90^0$, isto ocorre para dois valores de θ:

- $\theta = 0^0 \Rightarrow a = -\frac{g}{2} = -5\ m/s^2$, onde o sinal negativo indica que a aceleração tem sentido horário. Em outros termos, isto significa que o corpo da direita cai verticalmente, enquanto que o corpo da esquerda desliza horizontalmente sobre o plano.
  Usando a equação (1), obtém-se:
  $$T = m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta - m\,a = -m\left(-\frac{g}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad T = 30 \times 5 = 150\,N.$$
  Este mesmo resultado é encontrado usando a equação (2)
- $\theta = 90^0 \Rightarrow a = \frac{g}{2} = 5\ m/s^2$. O corpo da esquerda cai verticalmente, enquanto que o corpo da direita desliza horizontalmente sobre o plano.
  Usando a equação (1), obtém-se:
  $$T = m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta - m\,a = m\frac{g}{2} \qquad \Rightarrow \qquad T = 30 \times 5 = 150\,N.$$
  Este mesmo resultado é encontrado usando a equação (2)

---

2. **a)** Quando a massa é colocada sobre a mola, a força total que nela atua é:

$F = mg - k\,x$

No ponto de equilíbrio, x_e, a força é nula, de modo que

$x_e = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{g}{\omega^2}$, onde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ao se efetuar uma compressão x_o sobre a mola, o corpo irá oscilar em torno da posição de equilíbrio, e enquanto o objeto está preso à plataforma, o movimento é descrito pela equação

$x(t) = x_o \cos(\omega t + \varphi)$,

onde $x(t)$ é medido em relação à posição de equilíbrio, x_o é a amplitude de movimento e o sentido positivo é orientado para cima.

A aceleração é dada por $a(t) = -\omega^2 x_o \cos(\omega t + \varphi)$, ou simplesmente:

$a(t) = -\omega^2 x(t)$ (1)

A aceleração é, portanto, máxima nos extremos e nula no ponto de equilíbrio.

Observe que se $-x_o \le x < 0$ a aceleração é positiva, indicando que aponta para cima. Note que, no referencial da plataforma o corpo, devido à inércia, sofrerá uma aceleração para baixo, ficando "mais pesado" e não poderá se desprender da plataforma.

Para $0 < x \le x_o$ a aceleração é negativa, indicando que aponta para baixo. Contudo, no referencial da plataforma, o corpo sofre uma aceleração para cima de forma que ele exercerá sobre a plataforma uma força normal igual a:

$N = m(a - g)$

O corpo se desprenderá da plataforma quando $N = 0$, isto é quando $a = g$ no referencial da plataforma, ou $a(t) = -g$ no referencial do ponto de equilíbrio.

De acordo com a equação (1), isto ocorrerá em $x_d = \dfrac{g}{\omega^2}$. (2)

Contudo, x_o é a amplitude de movimento, de maneira que é necessário que $x_o \ge x_d$ para que o corpo desprenda da plataforma. O valor mínimo para que isto ocorra é:

$x_o(min) = \dfrac{g}{\omega^2}$

b) De acordo com o enunciado do problema, $\omega = 10\ rad/s$, de forma que usando (2) obtemos $x_o(min) = 10\ cm$. Como $x_o = 15\ cm$, o corpo irá se desprender da plataforma.

Assim, sendo a deformação inicial igual a x_o, a energia total do sistema será:

$E_T = \dfrac{k}{2} x_o^2 = \dfrac{m\omega^2}{2} x_o^2$.

No ponto onde o corpo começa a desprender, a energia será a soma da energia potencial mais a cinética. Por conservação de energia:

$\dfrac{m\omega^2}{2} x_o^2 = \dfrac{m\omega^2}{2} x_d^2 + \dfrac{m}{2} v_d^2$

Logo a velocidade v_d com que o corpo é lançado é:

$$v_d^2 = \omega^2 \left(x_o^2 - x_d^2\right)$$

(Observe nesta expressão que x_o deve ser maior que x_d, pois se isto não ocorresse o quadrado da velocidade seria negativo).

Se h' é a altura que o objeto atinge, medida a partir deste ponto, teremos:

$$\frac{m}{2} v_d^2 = mgh' \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{v_d^2}{2g} = \frac{\omega^2 \left(x_o^2 - x_d^2\right)}{2g}$$

A altura total que se pede na questão é em relação à posição de equilíbrio. Logo

$$h = x_d + h'$$

Usando (2) teremos

$$h = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{2g} x_o^2 - \frac{\omega^2}{2g} \frac{g^2}{\omega^4}$$

$$h = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\omega^2}{2g} x_o^2$$

Fazendo $\omega = 10\ rad/s$ e $x_o = 15\ cm$, obtemos

$$h = 16{,}25\ cm$$

---

3. a) Como a pressão é mantida constante, obtemos da equação dos gases ideais, $PV = nRT$, a relação:

$$\Delta T = \frac{P}{nR} \Delta V$$

Como a expansão ocorre com velocidade constante, teremos:

$$\Delta V = A\,\Delta x = A\,v\,\Delta t$$

Logo $\Delta T = \dfrac{PAv}{nR} \Delta t$

Substituindo os valores: $\Delta T = \dfrac{10^5 \times 300 \times 10^{-4} \times 16{,}6 \times 10^{-3}}{3 \times 8{,}3} \times 50$

Obtemos: $\Delta T = 100\,K$

b) A quantidade de energia transferida ao gás será:

$$\Delta Q = n C_P \Delta T$$

Sabemos que para gases ideais temos $C_P = C_V + R$, de modo que $C_P = \dfrac{7}{2} R$

Assim $\Delta Q = 3 \times \dfrac{7}{2} \times 8{,}3 \times 100$

$$\Delta Q = 8715\ J$$

---

4. No meio inicial devemos ter a relação $v = \lambda f$. No meio i, esta relação será: $v_i = \lambda_i f$, onde f não é alterado na passagem entre os meios. Dividindo estas equações, tem-se a relação:

$$\frac{v}{v_i} = \frac{\lambda}{\lambda_i} = n_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \frac{\lambda}{n_i},$$

onde, utilizando os dados do problema, temos: $n_1 = 1{,}5$ e $n_2 = 2$

Para o comprimento d do meio 1 cabem $N_1 = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{d\, n_1}{\lambda} = 1{,}5\frac{d}{\lambda}$ comprimentos de onda.

Analogamente para o meio 2 devemos ter $N_2 = \frac{d}{\lambda_2} = \frac{d\, n_2}{\lambda} = 2\frac{d}{\lambda}$.

Por outro lado, como as distâncias destes meios até P são as mesmas, para que haja interferência destrutiva em P, é necessário que as ondas que delas emergem devem estar em oposição de fase (isto é, se uma delas em um ponto é pico a outra deve ser um vale). Mas isto só acontece se a diferença $N_2 - N_1$ for um semi-inteiro. Assim

$$N_2 - N_1 = 0{,}5\frac{d}{\lambda} = (2m+1)\frac{1}{2}, \text{ onde } m = 0, 1, 2\ldots$$

Obtemos então $d = (2m+1)\lambda$

Logo os possíveis valores de d serão:

$$d = \lambda,\ 3\lambda,\ 5\lambda\ldots$$

Observação: *Uma solução mais formal para este problema é dado a seguir:*

Sejam as ondas no ponto P representadas por:

$$y_1 = y_o \cos(k_1 r_1 - \omega t + \varphi) \qquad e \qquad y_2 = y_o \cos(k_2 r_2 - \omega t + \varphi)$$

onde as distâncias foram medidas a partir do ponto onde as ondas entram nos meios 1 e 2. Note que as constantes de fase são iguais uma vez que, de acordo com o enunciado, elas entram em fase naqueles meios.

A onda total será:

$$y = y_1 + y_2 = y_o\left[\cos(k_1 r_1 - \omega t + \varphi) + \cos(k_2 r_2 - \omega t + \varphi)\right]$$

Resulta:

$$y = 2y_o \cos\left(\frac{k_2 r_2 - k_1 r_1}{2}\right)\cos\left(\frac{k_2 r_2 + k_1 r_1}{2} - \omega t + \varphi\right)$$

A intensidade da onda será proporcional ao quadrado da amplitude da onda resultante, ou seja:

$$I \,\alpha\, \cos^2\left(\frac{k_2 r_2 - k_1 r_1}{2}\right)$$

Observe a interferência será destrutiva se

$$\left(k_2 r_2 - k_1 r\right) = (2m+1)\,\pi \qquad onde \qquad m = 0, 1, 2.... \qquad (1)$$

Se ℓ é a distância de cada meio a P teremos:

$$k_1 r_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} d + \frac{2\pi}{\lambda} \ell = \frac{2\pi}{\lambda} d\, n_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \ell$$

e

$$k_2 r_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} d + \frac{2\pi}{\lambda} \ell = \frac{2\pi}{\lambda} d\, n_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \ell$$

Assim $\left(k_2 r_2 - k_1 r\right) = \frac{2\pi}{\lambda} d\,(n_2 - n_1)$

Usando (1) :

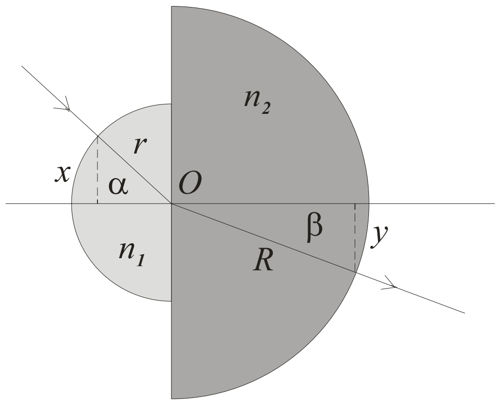
$$\frac{2\pi}{\lambda} d\,(n_2 - n_1) = (2m+1)\,\pi \qquad \Rightarrow \qquad d = (2m+1)\frac{\lambda}{2(n_2 - n_1)}$$

Substituindo os valores obtemos:

$d = (2m+1)\lambda$ *, ou seja:*

$d = \lambda,\ 3\lambda,\ 5\lambda \ldots$

5.



Para o primeiro objeto, aplicando a lei da refração para o raio que incide em O, teremos:

$n_1 sen\alpha = n_2 sen\beta$

Observando a figura, observa-se que:

$x = r\, sen\alpha$ e $y = R\, sen\beta$ (1)

Logo, $n_1 \frac{x}{r} = n_2 \frac{y}{R}$

Mas, de acordo com o problema, $x = y$ e $R = 2r$

O que nos leva a: $n_2 = 2n_1$.

a) Para o segundo objeto, o meio onde a luz incide inicialmente tem índice de refração n_2, enquanto que o segundo meio tem índice n_1. Devemos ter, então:

$n_2 sen\alpha = n_1 sen\beta$

Usando (1): $n_2 \frac{x}{r} = n_1 \frac{y}{R}$, ou

$$y = \frac{n_2}{n_1}\frac{R}{r}x$$

Teremos então: $y = 4x$

b) O fenômeno da reflexão total só ocorre quando o meio incidente tem índice de refração maior do que o índice do meio refrator. Assim, no primeiro objeto não haverá reflexão total para o feixe incidente.

Para o segundo meio, usamos a lei da refração:

$$n_2 sen\alpha = n_1 sen\beta$$

O ângulo limite α_ℓ ocorre quando $\beta = 90^0$, ou seja:

$$n_2 sen\alpha_\ell = n_1$$

Usando (1): $sen\alpha_\ell = \dfrac{x_\ell}{r}$

Logo $x_\ell = \dfrac{n_1}{n_2}r$

Resultando $x_\ell = \dfrac{r}{2}$

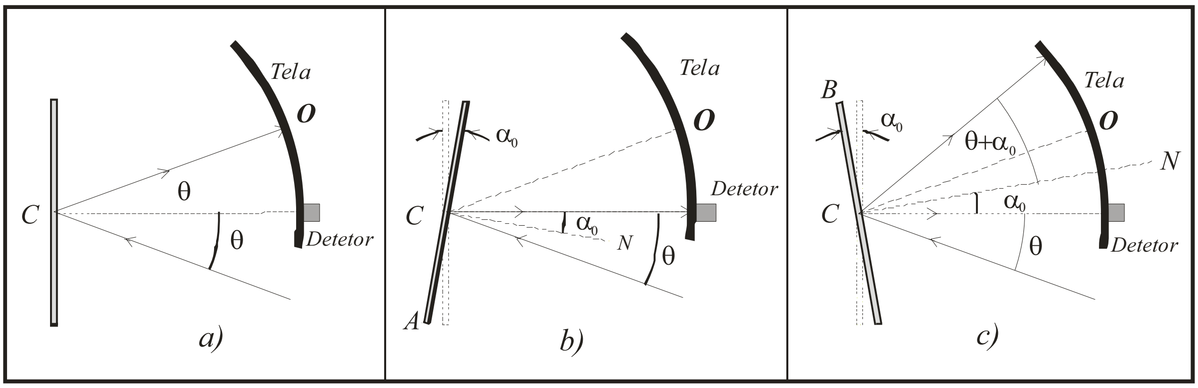
---

6. A figura abaixo mostra uma vista (de cima) do conjunto em três situações.

A figura (a) mostra o espelho em sua posição de equilíbrio (onde a torção do fio é nula). O feixe refletido incide sobre o espelho no ponto C e atinge a tela no ponto O. O detector está na direção da normal ao espelho.

A figura (b) mostra o espelho em uma de seus extremos de oscilação e neste instante o feixe refletido atinge o detector.

A figura (c) mostra o espelho em outra extremidade de oscilação. Observe que o ângulo de incidência no espelho é $(\theta + \alpha_0)$ e que o feixe refletido forma, em relação à CO, um ângulo $2\alpha_0$.



a. Segundo o enunciado, o feixe refletido atinge o detetor quando o espelho está formando um ângulo de máxima deflexão, α_0, em relação à sua posição de repouso (figura *b*). Neste instante, a normal CN ao espelho girou de α_0 em relação à sua posição de equilíbrio, de modo que o ângulo de reflexão é α_0. Usando a lei da reflexão, obtemos:

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{40}\, rad$$

Da figura sinal X tempo, obtém-se que o período de oscilação é $T = 0{,}4\ s$, de forma que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 5\pi\ rad/s$$

Para achar φ_o, devemos achar a posição do espelho em um determinado instante. Da figura S x t observa-se que quando $t = 0{,}1s$ sinal não é nulo, indicando que o espelho está numa de suas extremidade de oscilação, ou mais precisamente em $\alpha(0{,}1s) = -\alpha_0$. Assim,

$$\alpha(0{,}1s) = \alpha_0\ \mathrm{sen}(\omega \times 0{,}1 + \varphi_o) = -\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(0{,}5\pi + \varphi_0) = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_o = \left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi \quad m = 0, 1, 2\ldots$$

Logo $\varphi_o = (2m+1)\pi$, ou seja, $\varphi_o = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots.$

Como estas soluções são fisicamente equivalentes, escolhemos, por simplicidade, $\varphi_o = \pi$.

A equação de oscilação do espelho será:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{40}\mathrm{sen}(5\pi\, t + \pi)$$

b. A imagem descreve na tela um arco de circunferência onde O é o ponto central (figura c). Se o ângulo de torção é α, o feixe refletido forma um ângulo 2α em relação à CO. Isto corresponde, na tela, um arco de circunferência $s = 2\alpha R$. Assim,

$s(t) = s_o\ \mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi_0)$, onde $s_o = 2\alpha_o R = \dfrac{\pi}{20}\ m$

Teremos, então: $s(t) = \dfrac{\pi}{20}\mathrm{sen}(5\pi\, t + \pi)$

---

7. O primeiro fragmento penetra na região do campo magnético e, pelo fato da direção de seu movimento ser alterada, significa que ele sofreu a ação de uma força magnética, pois nesta região há apenas campo magnético. Contudo esta só atua em objetos carregados e com velocidade não nula. Isto implica então que o fragmento adquiriu uma carga q_1. O módulo desta força é dado por $F_M = |q_1| v B$. Esta força é sempre perpendicular ao vetor velocidade, de modo que o movimento descrito pelo fragmento é circular.

A aceleração é centrípeta, de modo que:

$$|q_1| v_1 B = \frac{m_1 v_1^2}{R}$$

$d = 2R = 2\dfrac{m_1 v_1}{|q_1| B} \qquad \Rightarrow \qquad |q_1| = \dfrac{2m_1 v_1}{dB}$

Como $m_1 = \dfrac{m_o}{2}$ e $v_1 = 3v_o$

teremos $|q_1| = \dfrac{3m_o v_o}{dB}$

Aplicando a regra da mão direita, deduz-se que, pelo tipo de trajetória descrita, este fragmento está *carregado negativamente*, de forma que

$q_1 = -\dfrac{3m_o v_o}{dB}$ (1)

O outro fragmento, por conservação de momento, deve ter $m_o v_o = m_1 v_1 + m_2 v_2$

Como $m_1 = m_2 = \dfrac{m_o}{2}$, obtemos $v_2 = -v_o$.

O sinal negativo indica que este fragmento retorna à região do campo $\vec{E}$.

Como o corpo é inicialmente neutro, devido à conservação de carga teremos $q_1 + q_2 = 0$, ou seja,

$q_2 = -q_1 = \dfrac{3m_o v_o}{dB}$

Como $\vec{E}$ está orientado na direção negativa do eixo Oy, e a carga é positiva, devemos ter:

$\vec{F} = q_2 \vec{E} = m_2 \vec{a} \quad \Rightarrow \quad a_y = -\dfrac{q_2 E}{m_2} = a \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{3m_o v_o E}{d\, B\, m_2}$

$a = -\dfrac{6E v_o}{dB}$

A equação horária será:

$x = -v_o t$

$y = -\dfrac{3E v_o}{dB} t^2$

Logo : $y(x) = -\dfrac{3E}{dB v_o} x^2$

---

8. **a)** De acordo com Bohr, quando ocorre uma transição de um nível de energia superior para outro inferior, há a emissão de um fóton de energia $\Delta E = E_s - E_i$. Como $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2} eV$, as três linhas de mais baixa energia da serie de Balmer terão energia:

Transição	Cálculo da energia (eV)	Energia do fóton emitido (eV)
$n_s = 3 \Rightarrow n_i = 2$	$\Delta E_1 = 13{,}6\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2}\right)$	$\Delta E_1 = 1{,}889$

$n_s = 4 \Rightarrow n_i = 2$	$\Delta E_2 = 13{,}6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$	$\Delta E_2 = 2{,}550$
$n_s = 5 \Rightarrow n_i = 2$	$\Delta E_3 = 13{,}6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)$	$\Delta E_3 = 2{,}856$

Como a função trabalho vale $\Phi = 2{,}656\, eV$, somente o fóton de energia ΔE_3 irá provocar efeito fotoelétrico. A energia cinética máxima dos elétrons ejetados será dada por:

$$(E_c)_{\max} = \Delta E_3 - \Phi$$

Obtemos então: $(E_c)_{\max} = 0{,}2\, eV$

b) De acordo com de Broglie o comprimento de onda associado a uma partícula de momento linear (quantidade de movimento) p é $\lambda = \frac{h}{p}$.

Por outro lado $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$

Resulta $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$

Substituindo os valores (e lembrando-se que $E_c = 0{,}2\, eV = 0{,}2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} J$) teremos:

$$\lambda = \frac{6 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9 \times 10^{-31} \times 3{,}2 \times 10^{-20}}}$$

Resulta:

$$\lambda = 2{,}5 \times 10^{-9}\ m = 2{,}5\ nm$$