ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas

ELITE RESOLVE UNICAMP 2007
2ª FASE

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br
(19) 3251 1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

"Pão por quilo divide opiniões em Campinas" (*Correio Popular*, 21/10/2006).
Uma padaria de Campinas vendia pães por unidade, a um preço de R$0,20 por pãozinho de 50g. Atualmente a mesma padaria vende o pão por peso, cobrando R$4,50 por quilograma do produto.

a) Qual foi a variação percentual do preço do pãozinho provocada pela mudança de critério para o cálculo do preço?
b) Um consumidor comprou 14 pãezinhos de 50 g, pagando por peso, ao preço atual. Sabendo que os pãezinhos realmente tinham o peso previsto, calcule quantos reais o cliente gastou nessa compra.

Resolução

a) Em 1 quilo temos 20 partes de 50 gramas. De acordo com o enunciado, se a unidade do pãozinho custa R$0,20, o quilo custará 20 × R$ 0,20 = R$ 4,00; assim, como o preço passou a ser R$4,50 por quilo, temos uma variação de R$0,50 sobre R$4,00, que nos dá uma variação de 12,5%.
b) Por hipótese, o peso comprado foi de

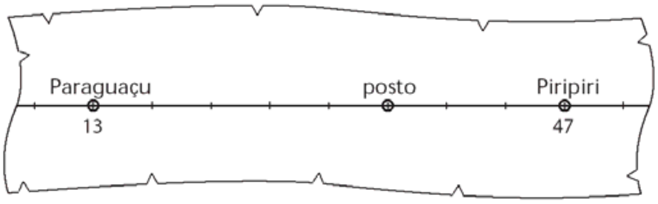
$$14 \times 50g = 700g = 0{,}7 \text{ kg}.$$

Portanto, o gasto com essa compra foi de

$$\mathbf{0{,}7 \times R\$\ 4{,}50 = R\$\ 3{,}15.}$$

QUESTÃO 2

A figura abaixo mostra um fragmento de mapa, em que se vê um trecho reto da estrada que liga as cidades de Paraguaçu e Piripiri. Os números representados no mapa representam as distâncias, em quilômetros, entre cada cidade e o ponto de início da estrada (que não aparece na figura). Os traços perpendiculares à estrada estão uniformemente espaçados de 1 cm.



a) Para representar a escala de um mapa, usamos a notação 1:X, onde X é a distância real correspondente à distância de 1 unidade do mapa. Usando essa notação, indique a escala do mapa dado acima.
b) Repare que há um posto exatamente sobre um traço perpendicular à estrada. Em que quilômetro (medido a partir do ponto de início da estrada) encontra-se tal posto?
c) Imagine que você tenha que reproduzir o mapa dado usando a escala 1:500000. Se você fizer a figura em uma folha de papel, qual será a distância entre Paraguaçu e Piripiri?

Resolução

a) A cidade de Paraguaçu se encontra no quilômetro 13, enquanto a cidade de Piripiri se encontra no quilômetro 47. Assim, a distância entre as duas cidades é 47 – 13 = 34 km. Observando o mapa, temos as cidades estão separadas por 8 cm, ou seja:

$$8 \text{ cm} : 34 \text{ km} \Rightarrow 1 \text{ cm} : \frac{34}{8}\,km \Rightarrow$$

$$1 \text{ cm} : 4{,}25 \text{ km} = 425000 \text{ cm}.$$

Assim, **a escala do mapa é 1:425000.**
b) A distância entre o posto e Paraguaçu, no mapa, é de 5 cm, o que equivale a uma distância real de 5.4,25 = 21,25 km. Assim, o posto se encontra a 21,25 km de Paraguaçu, e esta se encontra a 13 km do início da estrada, portanto, **o posto está a 21,25 + 13 = 34,25 km do início da estrada**.
c) A distância entre as cidades é de 34 km. Utilizando-se a escala 1:500000, temos que cada centímetro corresponderá a uma distância de 5 km. Assim, a distância, em centímetros, entre as duas cidades é dada por $\frac{34}{5} = 6{,}8$ cm.

QUESTÃO 3

Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210 mm x 297 mm. Considere que uma folha A4 com 0,1 mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.
a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número k de dobras feitas.
b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

Resolução

a) Por hipótese, a seqüência dos números de dobras, **k**, forma uma PG de razão 2. Assim, temos:

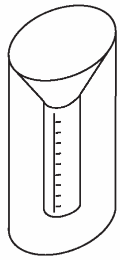
Número de dobras	Espessura (mm)
0	0,1
1	0,2
2	0,4
3	0,8
. . .	. . .
k	$0{,}1.2^k$

Logo, a expressão do termo geral dessa PG é $0{,}1.2^k$.
b) Ao dobrar seis (6) vezes, temos que a altura do paralelepípedo formado é $0{,}1.2^6$=6,4mm.
Para calcular as outras duas dimensões, consideremos o número de dobras.
Por hipótese, a dobra será feita na perpendicular à maior dimensão; assim, a dobra 1 será com relação ao lado de 297mm, resultando em 148,5mm e 210mm para as dimensões.
A dobra 2 será com relação ao lado de 210mm, resultando em 148,5mm e 105mm para as dimensões.
Continuando com este procedimento, temos que cada um desses lados será dividido mais 2 vezes.
Como em cada dobra, a dimensão divide-se por dois, temos que em duas dobras, a dimensão irá se dividir em 4, portanto, uma das dimensões será de $\frac{148{,}5}{4} = 37{,}125$mm e a outra será de $\frac{105}{4} = 26{,}25$mm .
Logo, as dimensões do paralelepípedo são, em milímetros:

$$\mathbf{6{,}4 \times 26{,}25 \times 37{,}125}$$

QUESTÃO 4

Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida ao lado. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20 cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60 cm de altura e sua base tem 1/10 da área da abertura superior do pluviômetro. (Obs.: a figura não está em escala).



a) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.
b) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2 cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500m de comprimento por 300 m de largura.

Resolução

Como o diâmetro da abertura é de 20cm, o raio da mesma é de 10cm, e a sua área é de $100\pi cm^2$. Como a área do cilindro interno é 1/10 da área superior, então a área do cilindro interno é $10\pi cm^2$.

a) O volume do cilindro interno é calculado por $V_{cilindro}=A_{base}.altura$; como a altura é 60cm, temos que seu volume é $V_{cilindro}= 60 \times 10\pi \Rightarrow$ $\mathbf{V_{cilindro} = 600\pi cm^3}$.

b) Para calcular o volume precipitado, temos que calcular a área do terreno retangular do enunciado, e a altura de água que foi precipitada no terreno. A área do terreno retangular do enunciado com medidas de 300m e 500m, é de $300.500=150000m^2$.

A altura de água precipitada é diretamente proporcional à área de captação; a área de captação do pluviômetro é a área da abertura circular no topo. Como tal área é **10 vezes maior** do que a área do cilindro interno, a altura da água no terreno é **10 vezes menor** do que a altura no cilindro interno; logo, o volume de água é:

$$V_{água} = 150000.\frac{0{,}02}{10}m^3 = 300m^3.$$

QUESTÃO 5

Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço no quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo corretas as informações da pesquisa e definindo a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes.

a) Em que caso a receita do restaurante será maior: se o preço subir para R$ 18,00 / kg ou para R$ 20,00 / kg?

b) Formule matematicamente a função $f(x)$, que fornece a receita do restaurante como função da quantia x, em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição.

c) Qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Resolução

a) Se o preço subisse para R$ 18,00 por quilo, o restaurante deixará de vender o equivalente a (18 - 15) x 5 = 15 kg de comida. Assim, a receita nesse caso seria:

18 x (100 - 15) = R$ 1530,00

Se o preço subisse para R$ 20,00 o quilo, o restaurante deixará de vender o equivalente a (20 - 15) x 5 = 25 kg de comida. Assim, a receita nesse caso seria:

20 x (100 - 25) = R$ 1500,00

b) A cada x reais que o preço por quilo aumenta, o restaurante passa a vender 5x quilos de comida **a menos**. Ou seja, se o preço por quilo passa a ser (15 + x), a quantidade vendida passa a ser (100 – 5x). Adicionalmente, nada é dito sobre o que ocorre com a venda, se o preço baixar para menos de R$ 15,00/kg, assim f(x) não pode ser definida com os dados do enunciado para valores de x negativos. Logo:

$$f(x) = (15 + x)(100 - 5x) = -5x^2 + 25x + 1500 \text{ , } x > 0.$$

c) Sendo o gráfico da função f uma parábola de concavidade negativa (voltada para baixo), ela atinge um ponto de máximo cujas coordenadas são $(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$.

Em particular, $x_V = -\frac{25}{2\cdot(-5)} = 2{,}5$

Assim o preço por quilo que dá a maior receita possível é:

15 + 2,5 = R$ 17,50.

NOTA: para este item deve-se assumir também que o preço mínimo é R$ 15,00/kg, uma vez que nada se pode afirmar sobre as vendas para preços abaixo de R$ 15/kg.

QUESTÃO 6

Dois prêmios iguais serão sorteados entre dez pessoas, sendo sete mulheres e três homens. Admitindo que uma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, responda às perguntas abaixo.

a) De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos entre as dez pessoas?

b) Qual é a probabilidade de que dois homens sejam premiados?

c) Qual é a probabilidade de que ao menos uma mulher receba um prêmio?

Resolução

a) Devemos escolher duas pessoas entre as dez possíveis, sendo que a ordem em que essas pessoas são escolhidas não importa, já que os prêmios são iguais. Assim, o número de possibilidades é $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$.

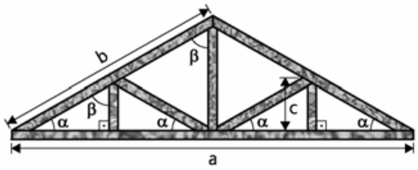
b) Temos que escolher dois homens dentre os três possíveis, e isso pode ser feito de $\binom{3}{2} = 3$ maneiras distintas, de modo que a probabilidade pedida é: $\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

c) O evento [ao menos uma mulher sorteada] é o evento complementar ao evento considerado no item (b), [dois homens sorteados]. Assim, a probabilidade que pelo menos uma mulher seja sorteada é:

$$1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

QUESTÃO 7

Na execução da cobertura de uma casa, optou-se pela construção de uma estrutura, composta por barras de madeira, com o formato indicado abaixo.



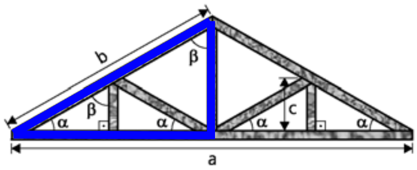
Resolva as questões abaixo supondo que α = 15°. **Despreze a espessura das barras** de madeira e não use aproximações em seus cálculos.

a) calcule os comprimentos b e c em função de a, que corresponde ao comprimento da barra da base da estrutura.

b) Assumindo, agora, que a = 10 m, determine o comprimento total da madeira necessária para construir a estrutura.

Resolução

a) De acordo com a figura, temos que b é a hipotenusa do triangulo retângulo cujo cateto adjacente à α é $\frac{a}{2}$:



Assim, temos que $\cos\alpha = \frac{a}{2b} \Rightarrow b = \frac{a}{2\cos 15^o}$. (I)

Ainda de acordo com a figura, temos que o triângulo cujo cateto oposto à α é c, é semelhante ao triângulo retângulo cujo cateto adjacente à α é $\frac{a}{2}$; logo, temos :

$$tg\alpha = \frac{c}{a/4} \Rightarrow c = \frac{a}{4}tg\alpha \Rightarrow c = \frac{a}{4}tg15^o. \qquad (II)$$

Usando as fórmulas de soma e subtração de arcos e arco metade, temos:

$$\cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o.\cos 30^o + sen45^o.sen30^o \Rightarrow$$

$$\cos 15^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad (III)$$

$$tg15^o = \sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{1+\cos 30^o}} \Rightarrow tg15^o = 2-\sqrt{3}. \qquad (IV)$$

Logo, de (I) e (III), temos:

$$b = \frac{a}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) \Rightarrow b = a\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

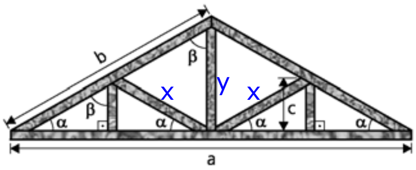
De (II) e (IV), temos:

$$c = \frac{a}{4}.\left(2-\sqrt{3}\right)$$

b) O comprimento total de madeira utilizado, de acordo com a figura é:

$$C = a + 2b + 2c + 2x + y, \qquad (V)$$

onde x e y são dados na figura a seguir:



Da figura, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{c}{\text{sen}15^o} \text{ e } tg\alpha = \frac{y}{a/2} \Rightarrow y = \frac{a}{2}tg15^o = \frac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Usando a fórmula de adição de arcos, temos:

$$sen15^o = sen(45^o - 30^o) = sen45^o \cos 30^o - sen30^o \cos 45^o =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Logo, $x = \dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$. Racionalizando, temos: $\Rightarrow x = c\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

Assim, substituindo c:

$$x = \frac{a}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

Substituindo os valores de b, c, x e y na equação (V), vem:

$$C = a + 2.\frac{a}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + 2.\frac{a}{4}\left(2-\sqrt{3}\right) + 2.\frac{a}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + \frac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$
$$C = a + \frac{3a}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + a\left(2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$
$$C = 3a + \frac{3a}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) - a\sqrt{3}$$

Como a = 10 m, então

$$C = 30 + 15\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) - 10\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$C = 5\left(6 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right).$$

QUESTÃO 8

Seja dado o sistema linear:

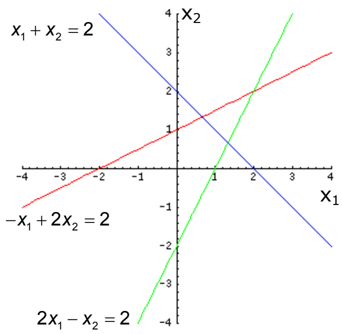
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique.

b) Para determinar uma solução aproximada de um sistema linear $Ax = b$ impossível, utiliza-se o método dos quadrados mínimos, que consiste em resolver o sistema $A^T Ax = A^T b$. Usando esse método, encontre uma solução aproximada pra o sistema dado acima. Lembre-se de que as linhas de M^T (a transposta de uma matriz M) são iguais às colunas de M.

Resolução

a) Cada uma das equações representa uma reta no plano cartesiano. O gráfico que mostra as três retas é:



Como não existe nenhum ponto comum às três retas simultaneamente, então não existe nenhum par $(x_1; x_2)$ de números reais que satisfaça às três equações simultaneamente, ou seja, o sistema linear dado é impossível.

b) A matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

E temos também $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Assim: $\begin{cases} A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \\ A^T b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \end{cases}$.

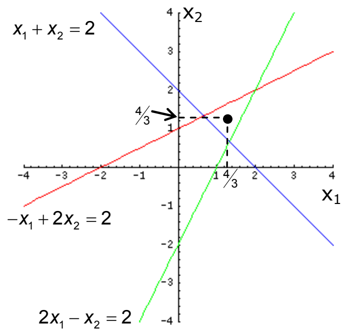
Logo, o sistema que queremos resolver agora é:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e somando com a segunda, temos:

$$2\cdot(6x_1 - 3x_2) + (-3x_1 + 6x_2) = 2\cdot 4 + 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}.$$

Substituindo na segunda equação do último sistema, encontramos $x_2 = \frac{4}{3}$. Portanto, $S = \left\{\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$. Note que a solução é também o baricentro do triângulo formado pelas 3 retas. Podemos ainda visualizar graficamente esta solução:



QUESTÃO 9

Em um triângulo com vértices A, B e C, inscrevemos um círculo de raio r. Sabe-se que o ângulo Â tem 90° e que o círculo inscrito tangencia o lado BC no ponto P, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos $\overline{PB} = 10$ e $\overline{PC} = 3$.

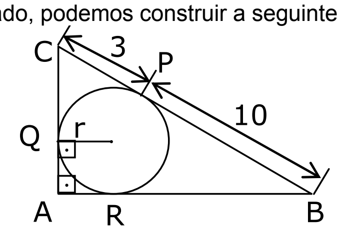
a) Determine r

b) Determine $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

c) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

Resolução

A partir do enunciado, podemos construir a seguinte figura:



Chamando de Q e R os outros pontos de tangencia, e usando a propriedade das secantes, temos:

$$\overline{PC} = \overline{QC} \Rightarrow \overline{QC} = 3$$
$$\overline{PB} = \overline{BR} \Rightarrow \overline{BR} = 10$$

Como o raio r da circunferência é perpendicular aos catetos, $\overline{AR} = \overline{AQ} = r$

Por pitágoras, temos:

$$\left(\overline{BC}\right)^2=\left(\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2 \Rightarrow 13^2=(10+r)^2+(3+r)^2 \Rightarrow r^2+13r-30=0 \Rightarrow$$

$$r=2 \;\; ou \;\; r=-15.$$

Logo, r = 2.

b) Pela figura construída, $\overline{AB}=\overline{BR}+r \Rightarrow \overline{AB}=12$ e

$$\overline{AC}=r+\overline{QC} \Rightarrow \overline{AC}=5\text{ cm}.$$

c) A área pedida é: $A_{triângulo}$ - $A_{círculo}$.

$$A_{triângulo}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{2} \Rightarrow A_{triângulo}=\frac{12\cdot 5}{2}=30$$

$A_{círculo}=\pi.2^2 \Rightarrow A_{círculo}=4\pi$;

Portanto, a área pedida é 30 – 4π unidades de área.

QUESTÃO 10

O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t)=P_0\cdot 2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial do estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante $t=0$.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b.

b) Dada uma concentração inicial P_0, de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \approx 3{,}32$.

Resolução

a) $\dfrac{P_0}{2}=P_0\cdot 2^{-b\cdot 29} \Rightarrow 2^{-29b}=2^{-1} \Rightarrow -29b=-1 \Rightarrow b=\dfrac{1}{29}$

b) Tendo o valor de **b**, obtemos a função $P(t)=P_0\cdot 2^{-\frac{t}{29}}$.

$$\frac{20}{100}P_0=P_0\cdot 2^{-\frac{t}{29}} \Rightarrow \frac{2}{10}=2^{-\frac{t}{29}} \Rightarrow \frac{1}{10}=\frac{2^{-\frac{t}{29}}}{2}$$

$$10^{-1}=2^{-\left(\frac{t}{29}+1\right)} \Rightarrow \log_2 10^{-1}=\log_2 2^{-\left(\frac{t}{29}+1\right)}$$

$$-\log_2 10=-\left(\frac{t}{29}+1\right) \Rightarrow 3{,}32=\frac{t}{29}+1 \Rightarrow \;\; t = 67{,}28 \text{ anos.}$$

QUESTÃO 11

Seja dada a reta x – 3y + 6 = 0 no plano xy.

a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas do plano passam por P e formam um ângulo de 45° com a reta dada acima?

b) Para o ponto P com coordenadas (2;5), determine as equações das retas mencionadas no item (a).

Resolução

a) O ângulo α entre duas retas é dado por:

$$tg\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Como $\alpha=45° \Rightarrow tg\alpha=1>0$

Sendo o valor do lado esquerdo positivo, a equação modular admitirá duas respostas distintas para m_s (com m_r conhecido) e, portanto, existem **duas** retas que satisfazem às condições do enunciado (o gráfico ilustrando tal situação está no final do item b).

b) $x-3y+6=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x+2 \Rightarrow m_r=\dfrac{1}{3}$

$$tg\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right| \Rightarrow 1=\left|\frac{\frac{1}{3}-m_s}{1+\frac{1}{3}\cdot m_s}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}-m_s=\pm(1+\frac{1}{3}m_s) \Rightarrow m_s=-\frac{1}{2} \;\; ou \;\; m_s=2$$

A equação das retas procuradas pode ser obtida através da equação: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$

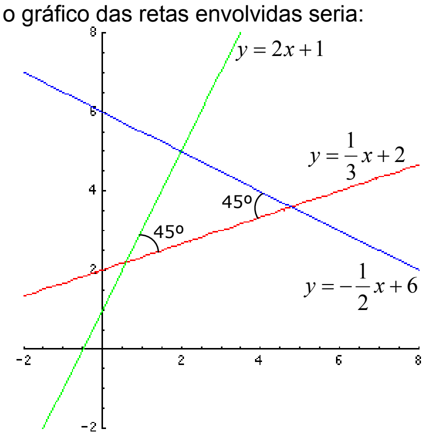
(I) Para $m_s=-\dfrac{1}{2}$, temos:

$$y-5=-\frac{1}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+6$$

(II) Para $m_s=2$, temos:

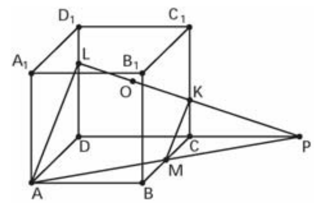
$$y-5=2\cdot(x-2) \Rightarrow y=2x+1$$

Observação: o gráfico das retas envolvidas seria:



QUESTÃO 12

Seja ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$ um cubo com aresta de comprimento 6 cm e sejam M o ponto médio de BC e O o centro da face CDD$_1$C$_1$, conforme mostrado na figura.



a) Se a reta AM intercepta a reta CD no ponto P e a reta PO intercepta CC$_1$ e DD$_1$ em K e L, respectivamente, calcule o comprimento dos segmentos CK e DL.

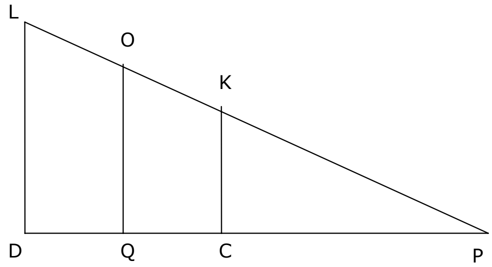
b) Calcule o volume do sólido com vértices A, D, L, K, C e M.

Resolução

a) Da semelhança dos triângulos PAD e PMC, temos que:

$$\frac{PD}{DA}=\frac{PC}{CM} \Rightarrow \frac{PC+6}{6}=\frac{PC}{3} \Rightarrow PC=6 \;\; cm.$$

Traçando uma reta paralela ao segmento LD pelo ponto O, obtemos:



Da semelhança dos triângulos PKC e POQ e observando que QO = QC = 3, pois O é o centro da face à qual pertence, temos:

$$\frac{CK}{QO}=\frac{CP}{QP} \Rightarrow \frac{CK}{3}=\frac{6}{6+3} \Rightarrow CK=2 \;\; cm$$

Da semelhança dos triângulos PLD e POQ, temos:

$$\frac{LD}{OQ}=\frac{PD}{PQ} \Rightarrow \frac{LD}{3}=\frac{6+6}{6+3} \Rightarrow LD=4 \;\; cm$$

b) O sólido considerado é um tronco de pirâmide, sendo seu volume dado pela diferença entre os volumes das pirâmides PADL e PMCK, ambas com vértice em P. Logo:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{AD\cdot DL}{2}\cdot PD-\frac{1}{3}\cdot\frac{MC\cdot CK}{2}\cdot PC$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 4}{2}\cdot 12-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 6=42 \;\; cm^3$$