ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

O ELITE RESOLVE

ITA 2005
MATEMÁTICA

"É impossível para um homem aprender aquilo que ele acha que já sabe."

Epíteto

www.elitecampinas.com.br (19) 3251-1012

MÚLTIPLA ESCOLHA

NOTAÇÕES

C : conjunto dos números complexos.
Q : conjunto dos números racionais.
R : conjunto dos números reais.
Z : conjunto dos números inteiros.
N = {0, 1, 2, 3, ...}.
N* = {1, 2, 3, ...}.
$\emptyset$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A ; x \notin B\}$.
$[a, b] = \{x \in R, a \le x \le b\}$.
$]a, b[= \{x \in R, a < x < b\}$.
i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$.
$z = x + iy$, $x, y \in R$.
$\overline{z}$: conjugado do número complexo $z \in C$.
$|z|$: módulo do número complexo $z \in C$.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

1. Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0, 1} e as afirmações:
I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.
II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III. Existe uma função f: $S \to T$ injetiva.
IV. Nenhuma função g: $T \to S$ é sobrejetiva.
Então, é(são) verdadeira(s):
a) apenas I. b) apenas IV. c) apenas I e IV.
d) apenas II e III. e) apenas III e IV.

SOLUÇÃO:
I. Falsa, pois $\{0\} \subset S$ e não $\{0\} \in S$.
II. Falsa, pois $\{2\} \subset S \setminus U$, porém $S \cap T \cap U = \emptyset$
III. Falsa, pois como n(S) > n(T) não é possível fazer $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x \in S$
IV. Verdadeira, pois como n(T) < n(S) sempre haverá um elemento de S sem correspondente em T, ou seja, o contra-domínio é diferente da imagem.

ALTERNATIVA B

2. Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50. b) R$ 16,50. c) R$ 12,50. d) R$ 10,50. e) R$ 9,50.

SOLUÇÃO:
Sejam **s** o preço do sanduíche, **x** o da xícara de café, **t** o do pedaço de torta. Então:
Para a mesa 1, temos: 3s + 7x + t = 31,50 (I)
Para a mesa 2, temos: 4s + 10x + t = 42,00 (II)
Fazendo 3·I – 2·II temos: s + x + t = 10,50

ALTERNATIVA D

3. Uma circunferência passa pelos pontos A = (0, 2), B = (0, 8) e C = (8, 8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
a) (0, 5) e 6. b) (5, 4) e 5. c) (4, 8) e 5,5.
d) (4, 5) e 5. e) (4, 6) e 5.

SOLUÇÃO:
Como A = (0, 2) e B = (0, 8) têm a mesma abscissa, e sabemos que a mediatriz de AB (a reta y = 5) passa pelo centro da circunferência D, temos que $y_D=5$.
Como B = (0, 8) e C = (8, 8) têm a mesma ordenada, e sabemos que a mediatriz de BC (a reta x = 4) passa pelo centro da circunferência D, temos que $x_D=4$.
Assim, o centro da circunferência é D = (4, 5).
Para o raio temos:
$$r = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(0-4)^2 + (2-5)^2} \Rightarrow r = 5$$

ALTERNATIVA D

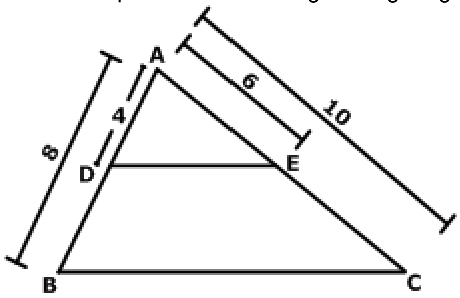
4. Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:
a) $x \in]0, 2[$. b) x é racional. c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
d) x^2 é irracional. e) $x \in]2, 3[$.

SOLUÇÃO:
Como $7 - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ tem-se:
$$x = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$
Logo, x é racional.

ALTERNATIVA B

5. Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:
a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $\frac{3}{8}$. d) $\frac{3}{10}$. e) $\frac{3}{4}$.

SOLUÇÃO:
A partir dos dados da questão temos a seguinte figura geométrica:

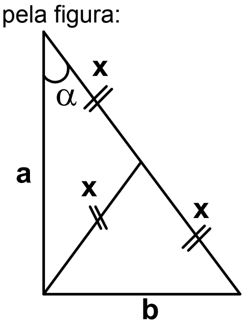


Logo, temos a razão entre as áreas:
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AD \cdot AE \cdot \text{sen}\hat{A}}{\frac{1}{2}\cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}\hat{A}} = \frac{4\cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

ALTERNATIVA D

6. Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a
a) $\frac{4}{5}$. b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$. e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

SOLUÇÃO:
Como o triângulo é retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa, isso pode ser observado pela figura:



Pelas condições do problema: $x = \sqrt{ab}$
Por Pitágoras:
$$a^2 + b^2 = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4ab$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 4b^2}}{2} = b(2 \pm \sqrt{3})$$
Considerando a > b, vem:
$$a = b(2+\sqrt{3})$$

Portanto:

$$\cos\alpha = \frac{a}{2x} = \frac{a}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{ab}}{2b} = \frac{\sqrt{b^2\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2b}$$

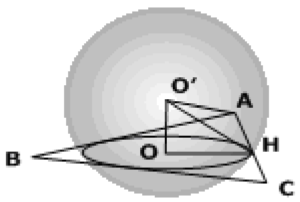
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ALTERNATIVA C

7. A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$. b) 6. c) 5. d) 4. e) $2\sqrt{5}$.

SOLUÇÃO:



Considere o triângulo eqüilátero ABC, O o centro da circunferência e O' o centro da esfera. Sendo ℓ o lado do triângulo:

$$OH = \frac{1}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ e } AO = \frac{2}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Sendo O'H o raio da esfera, então:

$$O'H^2 = OH^2 + OO'^2 \Leftrightarrow 4^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + OO'^2 \Leftrightarrow OO' = \sqrt{13}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras em ΔO'AO:

$$O'A^2 = O'O^2 + AO^2 \Leftrightarrow O'A^2 = 13 + 12$$

Logo, O'A = 5.

ALTERNATIVA C

8. Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

a) 4. b) 3. c) 6. d) 5. e) 7.

SOLUÇÃO:

Na P.A. dada tem-se

$$a_1 = \frac{\pi\cdot r^3}{18},\ R = \frac{\pi\cdot r^3}{45} \text{ e } S_n = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

Aplicando a fórmula da soma da P.A., tem-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{\left\{\frac{\pi r^3}{18} + \frac{\pi r^3}{18} + (n-1)\cdot\frac{\pi r^3}{45}\right\}\cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\{\frac{\pi r^3}{18} + \frac{\pi r^3}{18} + (n-1)\cdot\frac{\pi r^3}{45}\right\}\cdot n}{2} = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

Assim, simplificando a equação acima, temos:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{n}{45} - \frac{1}{45}\right).n = \frac{4}{3}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 45, vem:

$$(5 + n - 1)n = 60 \Rightarrow (n + 4)\cdot n = 60$$

Como a equação acima admite 6 e –10 como raízes, chegamos a conclusão que a esfera é intersectada por 6 planos meridionais.

ALTERNATIVA C

9. Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11. b) 32. c) 10. d) 20. e) 22.

SOLUÇÃO:

Sendo n o número de lados da base do prisma, fazemos a soma dos ângulos das faces laterias mais a soma dos ângulos das bases, logo:

$360^o\cdot n + 2\cdot[180^o\cdot(n-2)] = 7200^o \Rightarrow -720^o + 720^o\cdot n = 7200^o \Rightarrow n = 11$

Como o prisma é composto por duas bases de 11 lados, então seu número total de vértices é 22.

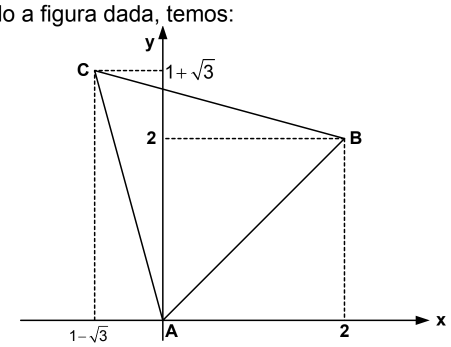
ALTERNATIVA E

10. Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por A = (0, 0), B = (2, 2) e C = $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

a) $\frac{8}{3}$. b) 3. c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. e) 8.

SOLUÇÃO:

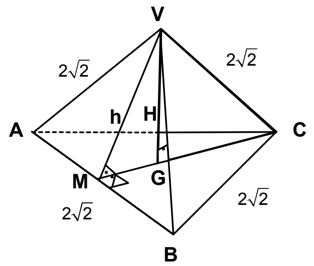
Desenhando a figura dada, temos:



Cálculo do lado do tetraedro:

$$AB = \ell = 2\sqrt{2}$$

Cálculo do volume do tetraedro com base ABC:



Aplicando Pitágoras no triângulo VMB:

$$VB^2 = MB^2 + VM^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 6$$

Aplicando Pitágoras no triângulo VMG:

$$VM^2 = MG^2 + VG^2 \Leftrightarrow h^2 = \left(\frac{1}{3}h\right)^2 + H^2 \Leftrightarrow H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}A_B\cdot H \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{8}{3}$$

Logo o volume da pirâmide é 8/3.

ALTERNATIVA A

11. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a

a) $-\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 1. e) $\frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO:

Seja $p(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ e considerando a, b e c reais, temos que a soma dos coeficientes é dada por

$$p(1) = (a - 2b + c + 1)^5 = 32$$

Então:

$a - 2b + c + 1 = 2 \Rightarrow a - 2b + c = 1$ (I)

Como 0 e –1 são raízes, então:

$p(0) = c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$ (II)

$p(-1) = a + 2b + c + 1 = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -1$ (III)

De (I), (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} a-2b+c=1 \\ c=-1 \\ a+2b+c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases} \therefore\ a+b+c=-\frac{1}{2}$$

OBSERVAÇÃO: Caso os coeficientes a, b e c fossem complexos não reais, então na extração da raiz quinta da equação $(a - 2b + c + 1)^5 = 32$, obteríamos 5 diferentes valores para a soma a + b + c.

ALTERNATIVA A

12. O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499. b) 2501. c) 2500. d) 3600. e) 4900.

SOLUÇÃO:

Dada a inequação: $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\le 0{,}01$

Podemos reescreve-la como:

$$\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\le\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\le\frac{1}{100}\Rightarrow\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\ge 100$$

Como sabemos que $\sqrt{2500}=50$, para a desigualdade ser verdadeira devemos ter $n\ge 2501$.

ALTERNATIVA B

13. Seja D = R \ {1} e f : D → D uma função dada por

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.
II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III. $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, para todo $x\in D$, $x\neq 0$.
IV. $f(x)\cdot f(-x)=1$, para todo $x\in D$.

Então, são verdadeiras

a) apenas I e III. b) apenas I e IV. c) apenas II e III.
d) apenas I, III e IV. e) apenas II, III e IV.

SOLUÇÃO:

Analisando as afirmações:

I. Verdadeira. Para saber se f é injetiva e sobrejetiva, basta verificar se é bijetiva, então f deve possuir inversa:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow y=\frac{f^{-1}(y)+1}{f^{-1}(y)-1}$$

Para $f^{-1}(y)\neq 1$:

$$f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$$

Encontramos então a inversa, que é igual a função original, e uma vez que existe inversa, a função é bijetiva.

II. Falsa. Ficou provado em (I) que f é bijetiva logo também é sobrejetiva.

III. Verdadeiro. Calculando o resultado da soma tem-se:

$$f(x)+f(1/x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{1/x+1}{1/x-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{(1+x)/x}{(1-x)/x}$$

$$\Rightarrow f(x)+f(1/x)=\frac{x+1}{x-1}-\frac{1+x}{x-1}=0$$

IV. Falsa. Calculando o valor de f(-x) em x = -1 tem-se:

$$f(-x) = f(-(-1)) = f(1)$$

Porém, f(1) não existe, uma vez que x = 1 não está no domínio de f. Logo, não existe o produto P = f(x)·f(-x) para x = – 1, invalidando a afirmação pois o produto não existe para todo $x\in D$.

ALTERNATIVA A

14. O número complexo 2 + i é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q,$$

com $p, q \in R$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

a) 4. b) –4. c) 6. d) 5. e) –5.

SOLUÇÃO:

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes do polinômio, então:

$$x_1 = 2 + i \text{ e } x_2 = \overline{x_1} = 2 - i$$

Pelas relações de Girard:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}=-1\Rightarrow 2+i+2-i+x_3+x_4=-1$$

$$\Rightarrow x_3 + x_4 = -5$$

ALTERNATIVA E

15. Considere a equação em x

$$a^{x+1}=b^{1/x},$$

onde a e b são números reais positivos, tais que ln b = 2 ln a > 0. A soma das soluções da equação é

a) 0. b) –1. c) 1. d) ln 2. e) 2.

SOLUÇÃO:

Dada a equação:

$$a^{x+1}=b^{\frac{1}{x}}$$

Aplicando ln dos dois lados, temos:

$$(x+1)\ln a=\frac{1}{x}\ln b$$

Como, dado do enunciado, $\ln b=2\ln a>0$, podemos fazer:

$$(x+1)\ln a=\frac{1}{x}\ln b\Rightarrow(x+1)\ln a=\frac{1}{x}2\ln a\Rightarrow(x+1)=\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0$$

Logo, a soma das raízes da equação é:

$$S=\frac{-1}{1}\Rightarrow S=-1$$

ALTERNATIVA B

16. O intervalo $I\subset R$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\frac{1+x}{2}+\arctan\frac{1-x}{2}\ge\frac{\pi}{6}$$

é

a) [–1, 4]. b) [–3, 1]. c) [–2, 3]. d) [0, 5]. e) [4, 6].

SOLUÇÃO:

Sabe-se que:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

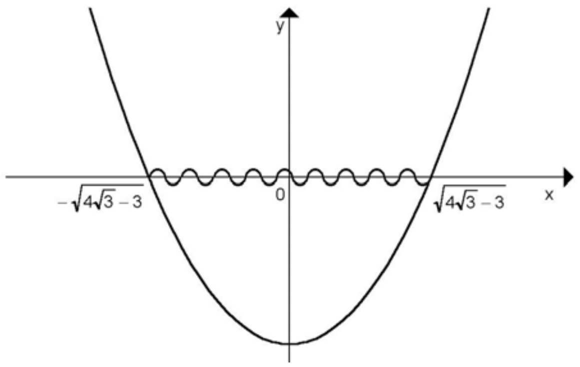
Aplicando a função tangente a ambos os membros da inequação dada, temos:

$$\frac{\dfrac{1+x}{2}+\dfrac{1-x}{2}}{1-\left(\dfrac{1+x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{2}\right)}\ge\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo:

$$\frac{1}{1-\dfrac{(1-x^2)}{4}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{4}{3+x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x^2\le 4\sqrt{3}-3$$

A figura abaixo apresenta o conjunto solução dessa inequação:



Dos intervalos apresentados, o único que contém o intervalo solução é [-2;3].

ALTERNATIVA C

17. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\dfrac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor:
a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$..
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

SOLUÇÃO:
Sabe-se que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
Como $|z| = 1$, então $z \cdot \bar{z} = 1$.
Substituindo o resultado acima na expressão dada temos:

$$\left|\frac{1-\bar{z}\cdot w}{z-w}\right| = \left|\frac{z\cdot\bar{z}-\bar{z}\cdot w}{z-w}\right| = \left|\frac{\bar{z}(z-w)}{(z-w)}\right| = |\bar{z}| = |z| = 1$$

Logo, $\left|\dfrac{1-\bar{z}\cdot w}{z-w}\right| = 1$, $\forall w \in \mathbb{C} \,/\, w \neq z$.

ALTERNATIVA D

18. O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a
a) –1. b) 0. c) 1. d) 2. e) –2.

SOLUÇÃO:
A condição necessária para que o sistema linear não admita solução é det = 0:

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b^3 + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

Para b = – 1:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Somando-se as três equações, obtemos 0 = 3, que é um absurdo, portanto verificando que o sistema não admite solução.

ALTERNATIVA A

19. Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de P_1+P_2 é
a) 0,21. b) 0,25. c) 0,28. d) 0,35. e) 0,40.

SOLUÇÃO:
Calculo de P_1:
Temos inicialmente 16 bolas na urna, sendo 11 não-azuis, tirando as bolas sem reposição, a probabilidade P_1 é dada por:

$$P_1 = \frac{11}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}$$

Calculo de P_2:

$$P_2 = V + A + B$$

Onde:
V = Probabilidade de serem todas verdes
A = Probabilidade de serem todas azuis
B = Probabilidade de serem todas brancas

Temos:

$$V = \frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14};\ A = \frac{5}{16}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14};\ B = \frac{7}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}$$

Logo:

$$P_1 + P_2 = P_1 + V + A + B = \frac{11\cdot10\cdot9 + 4\cdot3\cdot2 + 5\cdot4\cdot3 + 7\cdot6\cdot5}{16\cdot15\cdot14}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1284}{3360} \cong 0{,}382$$

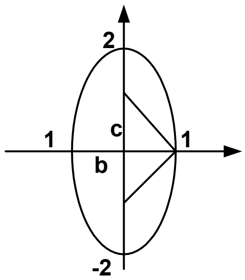
Das alternativas dadas, o valor que mais de aproxima é 0,40.

ALTERNATIVA E

20. A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$.
d) $\sqrt{3}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. e) $2\sqrt{3}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

SOLUÇÃO:
Supondo que os eixos da elipse são paralelos aos eixos cartesianos:



Equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Onde a é o semi-eixo maior e b é o semi-eixo menor.
Como (1, 0) e (0, – 2) pertencem a elipse; temos:

$$\begin{cases} \dfrac{0^2}{a^2} + \dfrac{1^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(-2)^2}{a^2} + \dfrac{0^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Pelas relações geométricas, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

Onde c é a metade da distância focal.
Sendo **e** a excentricidade da elipse e $\mathbf{d_f}$ a distância focal, podemos escrever:

$$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ d_f = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ d_f = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO: Caso os eixos da elipse não forem paralelos aos eixos cartesianos, então esta questão teria infinitas soluções, pois infinitas elipses satisfariam o enunciado.

ALTERNATIVA E

DISSERTATIVAS

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21. Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ \text{para } n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

SOLUÇÃO:
Para K = 1:

$$\begin{cases} a_3 = \sqrt{2} + \pi \\ a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi \end{cases} \Rightarrow a_6 = \sqrt{2} + 3\pi \Rightarrow a_6 = a_3 + 2\pi$$

Temos também que:

$$a_6 = a_3 + 3r$$

Logo:

$$a_3 + 3r = a_3 + 2\pi \Rightarrow r = 2\pi/3$$

Temos:

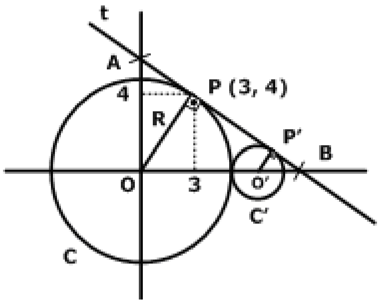
$$a_1 = a_3 - 2r$$

Logo:

$$a_1 = \sqrt{2} + \pi - 2\cdot(2\pi/3) \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - \pi/3$$

22. Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

SOLUÇÃO:
Considere a figura:



Equalção da reta $\overline{OP}$: y = kx
Substituindo no ponto P: 4 = k·3

Logo: $(\overline{OP}) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$

Equação da reta t (perperndicular a $\overline{OP}$): $y = \frac{-3}{4}x + b$

Substituindo no ponto P: $4 = \frac{-3}{4}3 + b$

Logo: $b = \frac{25}{4}$

Assim: $A\left(0, \frac{25}{4}\right)$

Para y=0 (ponto B): $\frac{3}{4}x = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

Logo: B $\left(\frac{25}{3}, 0\right)$.

Para determinarmos o raio da circunferência maior:

$$R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

Observando a semelhança dos triângulos ΔOBP e ΔO'P'B:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{O'P'}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}} \Rightarrow \frac{5}{r} = \frac{\frac{25}{3}}{\left(\frac{25}{3} - 5 - r\right)} \Rightarrow \frac{10}{3} - r = \frac{5r}{3} \Rightarrow \frac{8r}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

Logo:

$$x_{o'} = R + r \Rightarrow x_{o'} = \frac{25}{4} \quad \text{e} \quad y_{o'} = 0$$

Assim, resulta a circunferência C': $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$

23. Sejam A e B matrizes 2×2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

SOLUÇÃO:
a) Se B é inversivel então existe B^{-1}, tal que

$$B\cdot B^{-1} = 1$$

Sendo AB = BA temos:

$$A = A \Leftrightarrow A\cdot 1 = A \Leftrightarrow A\cdot B\cdot B^{-1} = A$$
$$\Leftrightarrow B\cdot A\cdot B^{-1} = A \Leftrightarrow B^{-1}\cdot B\cdot A\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot A$$
$$\Leftrightarrow 1\cdot A\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot A \Leftrightarrow A\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot A$$

b) Resolvendo a equação:

$$A^2 + 2AB - B = 0 \Leftrightarrow B = A^2 + 2AB \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B = A\cdot(A + 2B)$$

Tomando o determinante:

$$\det B = \det [A\cdot(A + 2B)] = \det A\cdot\det (A + 2B) \neq 0$$

Pois B é inversivel.
Se det A·det (A + 2B) ≠ 0, então det A ≠ 0 e portanto A é inversivel.

24. Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n - 1$ ângulos (internos) do polígono é 2004º, determine o número n de lados do polígono.

SOLUÇÃO:
A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é:

$$S_i = (n - 2)\cdot 180º$$

Pelo enunciado, temos:

$$S_i = S + a = 2004º + a$$

Onde S é a soma de (n – 1) ângulos internos do polígono e a é medida de um desses ângulos.
Então:

$$180º\,(n - 2) = 2004º + a \Rightarrow a = 180º\cdot(n - 2) - 2004º$$

Mas, como se trata de um polígono convexo:

$$0 < a < 180º \Rightarrow 0 < 180º\cdot(n - 2) - 2004º < 180º$$
$$\Rightarrow 0 < (n - 2) - 11{,}133 < 1 \Rightarrow 13{,}133 < n < 14{,}133$$

Portanto, n = 14, pois n ∈ N.

25. (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.
(b) Conclua de (a) que α é um número racional.

SOLUÇÃO:
a) Fazemos:

$$\alpha = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

Logo:

$$\alpha^3 = x + 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2} + y$$

$$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2} + 2$$

$$\alpha^3 = 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Substituindo na equação:

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\cdot\alpha - 4 = 0$$

Resulta:

$$4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Logo, como a igualdade é verdadeira, podemos verificar que α é raiz da equação dada.

26. Considere a equação em x ∈ R

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx},$$

sendo m um parâmetro real.
(a) Resolva a equação em função do parâmetro m.
(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

SOLUÇÃO:
a) $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx} \Leftrightarrow x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$
Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$x^2 = 1 + mx - 2\sqrt{(1+mx)(1-mx)} + 1 - mx$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 - 2\sqrt{1-m^2x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-m^2x^2} = 2 - x^2$$

Elevando novamente ao quadrado, temos:

$$4(1 - m^2x^2) = (2 - x^2)^2$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4m^2x^2 = 4 - 4x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4m^2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\,(x^2 - 4 + 4m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm 2\sqrt{1-m^2} \end{cases} \quad \therefore S = \left\{0, 2\sqrt{1-m^2}, -2\sqrt{1-m^2}\right\}$$

b) Para que a equação admita solução não nula é necessário primeiramente que:

$$1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \quad (I)$$

Testando as soluções, temos:

$$x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-m^2} = \sqrt{1+2m\sqrt{1-m^2}} - \sqrt{1-2m\sqrt{1-m^2}}$$

Elevando ao quadrado:

$$4 - 4m^2 = 1 + 2m\sqrt{1-m^2} - 2\sqrt{1-4m^2(1-m^2)} + 1 - 2m\sqrt{1-m^2}$$

$$\sqrt{4m^2 - 4m + 1} = 2m^2 - 1$$

A condição de existência da equação acima é:

$$2m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (II)$$

Além disso, devemos fazer a seguinte consideração:

$$x = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$$

Se $x > 0$ é solução, temos $\sqrt{1+mx} > \sqrt{1-mx}$, logo $m > 0$.

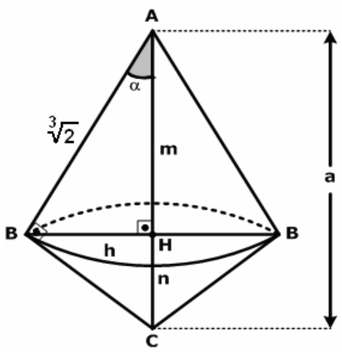
Se $x < 0$ é solução, temos $\sqrt{1+mx} < \sqrt{1-mx}$, logo $m > 0$.

Logo: m > 0 (III)

De (I), (II) e (III) temos: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$.

27. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm³. Determine os ângulos deste triângulo.

SOLUÇÃO:



O volume V do sólido gerado pela rotação completa do triangulo ABC. retângulo em B, e, conforme a figura, tal que:

$$V = 1/3\ \pi h^2 m + 1/3\ \pi h^2 n = 1/3\ \pi h^2(m + n)$$

$$\Leftrightarrow V = 1/3\ \pi h^2 a = \pi \Leftrightarrow h^2 a = 3 \quad (I)$$

No triangulo ABC, tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos\alpha} \quad (II)$$

No triangulo AHB tem-se:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{2}\cdot \text{sen}\,\alpha \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$h^2 a = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2}\cdot \text{sen}\,\alpha)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos\alpha} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = 3 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2\alpha) = 3\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 60^\circ, \text{ pois } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Os ângulos do triangulo ABC são, portanto,

$$B\hat{A}C = \alpha = 60^\circ;\ B\hat{C}A = 90^\circ - \alpha = 30^\circ;\ A\hat{B}C = 90^\circ$$

28. São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

SOLUÇÃO:

Seja P, a função probabilidade definida no espaço de eventos do problema. Sejam, também, definidos os seguintes eventos:

V_1: face visível do cartão selecionado é vermelha;

V: face oculta do cartão selecionado é vermelha;

A: cartão de duas faces vermelhas é selecionado;

A probabilidade de o cartão escolhido ter vermelho como cor da outra face P(V) pode ser calculada da seguinte maneira:

$P(V) = P(V \mid V_1)$, onde:

$P(V \mid V_1)$ é a probabilidade de a outra face ser vermelha, dado que a primeira face selecionada foi vermelha.

Podemos calcular então:

$$P(V) = P(V \mid V_1) = \frac{P(V \cap V_1)}{P(V_1)} = \frac{P(A)}{P(V_1)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

29. Obtenha todos os pares (x, y), com x, y $\in [0, 2\pi]$, tais que

$$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 1/2$$

$$\text{sen}x + \cos y = 1$$

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo a primeira equação temos:

$$\text{sen}x\cdot\cos y + \text{sen}y\cdot\cos x - \text{sen}x\cdot\cos y - \text{sen}y\cdot\cos x = 1/2$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}x\cdot\cos y = 1/2 \Rightarrow \text{sen}x\cdot\cos y = 1/4$$

Temos então o novo sistema de equações:

$$\begin{cases} \text{sen}x + \text{coxy} = 1 \\ \text{sen}x \cdot \cos y = 1/4 \end{cases}$$

Assim, senx e cosy são as raízes de uma equação de segundo grau cuja soma é 1 e o produto é 1/4. Logo:

$$w^2 - w + 1/4 = 0 \Rightarrow w = 1/2$$

Logo:

$\text{sen}x = 1/2 \Rightarrow x = 30^\circ$ ou $x = 150^\circ$

$\cos y = 1/2 \Rightarrow y = 60^\circ$ ou $x = 300^\circ$

Assim os possíveis pares (x, y) pertencem ao conjunto:

$$\{(30^\circ, 60^\circ), (30^\circ, 300^\circ), (150^\circ, 60^\circ), (150^\circ, 300^\circ)\}$$

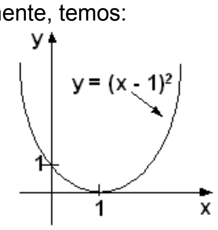
30. Determine todos os valores reais de a para os quais a equação

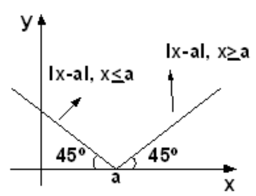
$$(x - 1)^2 = |x - a|$$

admita exatamente três soluções distintas.

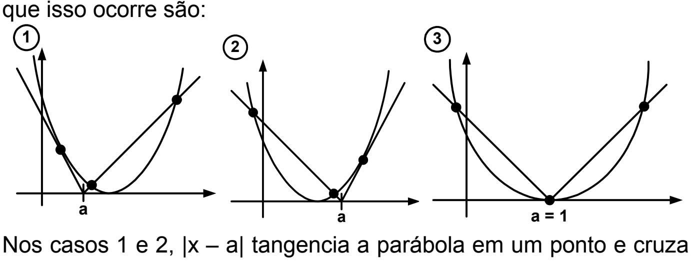
SOLUÇÃO:

Graficamente, temos:





Para que a equação $(x - 1)^2 = |x - a|$ admita exatamente três soluções distintas, é necessário que o gráfico de $|x - a|$ intercepte a parábola $y = (x - 1)^2$ em três pontos diferentes. As situações em que isso ocorre são:



Nos casos 1 e 2, $|x - a|$ tangencia a parábola em um ponto e cruza em outros dois pontos.

1) No ponto de tangência para x < a, temos:

$$(x - 1)^2 = |x - a| = a - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = a - x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - a = 0$$

Para que ocorra tangência, $\Delta = 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3/4$

2) No ponto de tangência para x > a, temos:

$$(x - 1)^2 = |x - a| = x - a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x - a \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + a = 0$$

Novamente, $\Delta = 5 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 5/4$

Podemos observar no gráfico do caso 3, quando a = 1, temos a intersecção das curvas em três pontos.

Logo, os valores procurados de a são 3/4, 1 e 5/4.