O Elite Resolve

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Você na elite das universidades!

ITA 2004
MATEMÁTICA

✓ GABARITO ITA 2004 – MATEMÁTICA

1. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto *U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}:*

I. $\varnothing \in U \quad e \quad n(U)=10$.

II. $\varnothing \subset U \quad e \quad n(U)=10$.

III. $5 \in U \quad e \quad \{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e III. b) apenas II e IV. c) apenas II e III. d) apenas IV. e) todas as afirmações.

Alternativa C

Analisando as afirmações:

I - falsa: a relação de pertencer ocorre entre elementos e conjuntos. A relação de conter ou estar contido ocorre entre dois ou mais conjuntos, portanto, o correto seria $\varnothing \subset$ U.

II - verdadeira: vide afirmativa I. Além disso, U possui 10 elementos.

III - verdadeira: 5 é elemento (logo $5 \in$ U) e {5} é subconjunto de U (logo $\{5\} \subset$ U)

IV - falsa, pois $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$

2. Seja o conjunto $S=\{r\in Q: r\geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \quad e \quad \frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e II. b) I e III. c) II e III. d) I. e) II.

Alternativa D

I -verdadeira: $\frac{5}{4} \in \mathrm{Q}$ e $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2$, logo $\frac{5}{4} \in$ S.

$\frac{7}{5} \in \mathrm{Q}$ e $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \leq 2$, logo $\frac{7}{5} \in$ S.

II - falsa: existem infinitos números racionais entre 0 e $\sqrt{2}$ e, sendo o conjunto dos números racionais um subconjunto de R, todos eles pertencem também a R, logo a intersecção possui um número infinito de elementos. Por exemplo: $\frac{5}{4} \in$ S, $\frac{5}{4} \in \mathrm{R}$ e $0 \leq \frac{5}{4} \leq \sqrt{2}$, logo $\frac{5}{4} \in \{x \in \mathrm{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

III – falsa: Como $\sqrt{2} \notin \mathrm{Q}$, $\sqrt{2} \notin$ S.

3. Seja α um número real, com 0 < α < 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de *x* tais que $\alpha^{2x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.

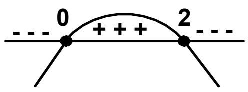
a) $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ b) $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ c) $]0,2[$ d) $]-\infty,0[$ e) $]2,+\infty[$

Alternativa C

$$\alpha^{2x}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right]^{2x^2} < 1 \Rightarrow \alpha^{2x}.\left[\alpha^{-1/2}\right]^{2x^2} < \alpha^0 \Rightarrow \alpha^{2x}.\alpha^{-x^2} < \alpha^0 \Rightarrow \alpha^{-x^2+2x} < \alpha^0$$

Como temos 0 < α < 1, logo:

$-x^2 + 2x > 0 \Rightarrow$



portanto 0 < x < 2 ou S=]0, 2[.

4. Considere a função *f:R→C, f(x)=2cosx+2isenx*. Então, $\forall$ *x, y* $\in$ *R*, o valor do produto *f(x)f(y)* é igual a

a) *f(x+y)*   b) *2 f(x+y)*   c) *4 i f(x+y)*   d) *f(xy)*   e) *2f(x)+2 i f(y)*

Alternativa B

$$\begin{cases} f(x) = 2 \cos x + 2i \text{ sen } x = 2 (\cos x + i \text{ sen } x) \\ f(y) = 2 \cos y + 2i \text{ sen } y = 2 (\cos y + i \text{ sen } y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) \,.\, f(y) = 4 [\cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y + i (\text{sen } y \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos y)] = [\cos (x+y) + i \text{ sen } (x+y)]$$

Portanto:

$$f(x) \,.\, f(y) = 2 \,.\, 2 [\cos (x+y) + i \text{ sen } (x+y)] = 2 f(x+y)$$

5. Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210   b) 315   c) 410   d) 415   e) 521

Alternativa A

O número de triângulos que podem ser formados com estes 12 pontos é igual ao número de maneiras de escolher-se 3 pontos distintos entre estes 12 menos o número de maneiras de escolher-se 3 dos cinco pontos que estão na mesma reta, pois estes não formam um triângulo.

$$C_{12,\,3} - C_{5,3} = \frac{12\,.\,11\,.\,10}{6} - \frac{5\,.\,4\,.\,3}{6} = 220 - 10 = 210$$

6. Seja x ∈ R e a matriz A = $\begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

a) ∀ x ∈ R, A possui inversa.
b) Apenas para x > 0, A possui inversa.
c) São apenas dois valores de x para o qual a possui inversa.
d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

Alternativa A

det A = $\begin{vmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{vmatrix}$ $=2^x.(\log_2 5-(x^2+1)^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ det A = $2^x.(\log_2 5-(x^2+1)^{-1})$.

A é inversível se e somente se det A $\neq$ 0. Suponha det A =0:

$2^x.(\log_2 5-(x^2+1)^{-1}) = 0 \Rightarrow \log_2 5-(x^2+1)^{-1} = 0$, pois 2^x é sempre positivo.

Assim $\log_2 5 = 1/(x^2+1) \Rightarrow (x^2 +1) = 1/\log_2 5 \Rightarrow x^2 = \log_5 2 - 1$;

Como $\log_5 2 - 1 < 0$, então conclui-se que $x^2 < 0$. Portanto não existe x real que satisfaça a equação det A = 0, daí conclui-se que $\forall$ x $\in$ R, A possui inversa.

7. Considerando as funções

$$\text{arcsen}:[-1,+1]\to\left[-\pi/2,\pi/2\right] \qquad \text{e} \qquad \text{arccos}:[-1,+1]\to[0,\pi],$$

assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5}+\text{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

Alternativa B

Seja $\begin{cases} x=\text{arcsen}\frac{3}{5}\Rightarrow \text{sen } x=\frac{3}{5}; x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right] \\ y=\text{arccos}\frac{4}{5}\Rightarrow \cos y=\frac{4}{5}; y\in[0,\pi] \end{cases}$. Logo: $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5}+\text{arccos}\frac{4}{5}\right)=\cos(x+y)$

Além disso, sabe-se que:

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1 \Rightarrow \cos^2x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow \cos x=\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}^2y+\cos^2y=1 \Rightarrow \text{sen}^2y=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow \text{sen } y=\frac{3}{5}$$

Como $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\text{sen } x\cdot\text{sen } y$ então $\cos(x+y)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$

8. Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5º. Então, seu maior ângulo mede, em graus,

a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

Alternativa E

A soma dos ângulos internos de um polígono é $S_n = (n - 2)\,180^o$. Para n = 9 temos $S_n = 1260^o$.

Sejam $a_1, a_2,..., a_9$ os ângulos internos do polígono e r a razão da PA. Então:

$a_1 = a_5 - 4r$ $a_6 = a_5 + r$
$a_2 = a_5 - 3r$ $a_7 = a_5 + 2r$
$a_3 = a_5 - 2r$ $a_8 = a_5 + 3r$
$a_4 = a_5 - r$ $a_9 = a_5 + 4r$

Portanto: $a_1 + a_2 + ... + a_9 = 9\,a_5 = S_n = 1260^o \Rightarrow a_5 = 140^o$

$\therefore\ a_9 = 140^o + 4 \cdot 5^o = 160^o$

9. O termo independente de *x* no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\dfrac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

Alternativa E

$$B = \left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12} \Rightarrow B = \left[\sqrt{\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{5}{3}x^{\frac{1}{2}}}\right]^{12} = \left[\sqrt{\frac{3}{5}}\ x^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}}\ x^{\frac{1}{6}}\right]^{12}$$

O termo geral do binômio será:

$$Ti = \binom{12}{i}(-1)^i.\left[\sqrt{\frac{3}{5}}\right]^{12-i}.\left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right]^{i}.\ x^{\frac{i-12}{3}+\frac{i}{6}}$$

Para o termo i ser independente de x, devemos ter o expoente de x igual a zero, ou seja:

$\dfrac{i-12}{3} + \dfrac{i}{6} = 0 \Rightarrow 2i - 24 + i = 0 \Rightarrow i = 8$

então:

$$T_8 = \binom{12}{8}(-1)^8\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^8 = 495.\frac{9}{25}.\frac{25}{9}\sqrt[3]{\frac{25}{9}} =$$

$$= 495\sqrt[3]{\frac{25}{9}.\frac{3}{3}} = \frac{495}{3}\sqrt[3]{75} = 165\sqrt[3]{75}$$

10. Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada *nxn* , n ≥ 2:
I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
II. Se A = (a_{ij}) é tal que $a_{ij} = 0$ para i > j, com i,j = 1,2,…, n, então det A = $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det B = det A.
Então podemos afirmar que é (são) verdadeira(s):

a) apenas I b) apenas III c) apenas I e II d) apenas II e III e) todas

Alternativa D

I – falsa. Para que o determinante de uma matriz seja nulo, basta que uma fila (linha ou coluna) seja combinação linear de outra, o que não requer que a fila seja nula. Por exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

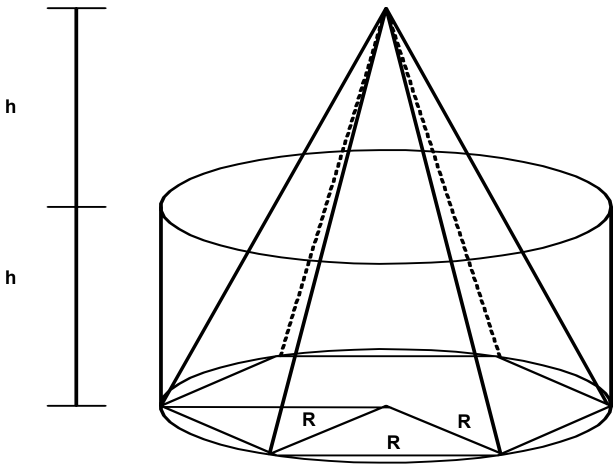
II – verdadeira. Basta aplicar o teorema de Laplace ou Chiò sucessivamente em cada linha (ou coluna) e chegamos ao valor det A = $a_{11} . a_{22} ... a_{nn}$.

III – verdadeira. det B = $(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)$. det A = $((\sqrt{2})^2$ - 1) det A = 1 · det A

11. Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360 π cm^3, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm^2, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$ d) $108\sqrt{3}$ e) $45\sqrt{427}$

Alternativa A



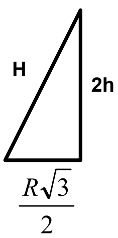
Cálculo de R:
A área da base da pirâmide é dada por:

$$A_B = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = \frac{2.54}{3} \Rightarrow R = 6\,cm$$

Cálculo de h:

$$V_{cil} = \pi R^2 h = 360\pi \Rightarrow 36h = 360 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Seja H a altura da face lateral:



$$H^2 = (2.10)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2 = 400 + 27 = 427 \Rightarrow H = \sqrt{427}$$

área lateral: 6.(área de cada face)= $6 \cdot \frac{R\sqrt{427}}{2} = 18\sqrt{427}$ cm^2

12. O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em *x*) $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + tg\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$

Alternativa D

Seja Int = $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\alpha = 0$ (I)

fazendo $y = x^2$ tem-se $y^2 - \sqrt[4]{48}\,y + \text{tg}\alpha = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt[4]{48} \pm \sqrt{\sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha}}{2} \Rightarrow \sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha \geq 0 \Rightarrow \text{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$.

Portanto, para que todas as soluções de (I) sejam reais é necessário que $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$ e $\text{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$ (II)

(Pois $x = \pm\sqrt{y}$)

(i) $y_1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{48} + \sqrt{\sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha} \geq 0$ que é verdade $\forall\ \alpha \in$ Int tal que $\text{tg}\,\alpha \leq \sqrt{3}$

(Pois $\sqrt{m^2}$ = $|m| \geq 0$, por definição)

(ii) $y_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha} \leq \sqrt[4]{48} \Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt{48} - 4tg\alpha}\right)^2 \leq \left(\sqrt[4]{48}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{48}} - 4\text{tg}\alpha \leq \cancel{\sqrt{48}}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha \geq 0 \text{ (III)}$$

Portanto, de (II) e (III) temos que as soluções da equação (I) (em x) são todas reais quando

$$0 \leq \text{tg}\alpha \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \text{ pois } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \text{ ou seja, } \alpha \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$$

13. Sejam as funções *f* e *g* definidas em R por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		*g*	
Valor mínimo	*Ponto de mínimo*	*Valor máximo*	*Ponto de máximo*
-1	< 0	$\frac{9}{4}$	> 0

Então, a soma de todos os valores de *x* para os quais $(f o g)(x)=0$ é igual a

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Alternativa D

$f(x) = x^2 + \alpha x$

Valor mínimo de f = $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(\alpha^2 - 4\cdot 1\cdot 0)}{4} = -\frac{\alpha^2}{4} = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$ (I)

Ponto mínimo de $f < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$ (II)

De (I) e (II): $\alpha = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$

$g(x) = -x^2 - \beta x$

Valor máximo de g = $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-\beta)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 0}{-4} \Rightarrow \frac{\beta^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = \pm 3$ (III)

Ponto de máximo de $g > 0 \Rightarrow -\frac{\beta}{2} > 0 \Rightarrow \beta < 0$ (IV)

De (III) e (IV): $\beta = -3 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 3x$

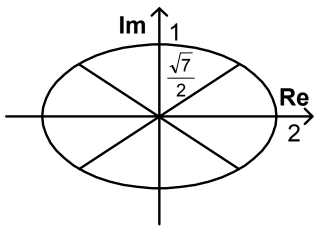
$(f o g)(x) = f(g(x)) = (-x^2+3x)^2 + 2(-x^2+3x) = 0$
$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 + 6x = 0$
$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x = 0$

Soma das raízes = $-\frac{(-6)}{1} = 6$

14. Considere todos os números z = x + iy que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{81}{25}$ d) $\frac{25}{7}$ e) 4

Alternativa B



$z = x + iy \Leftrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, mas $|z| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ logo $x^2 + y^2 = \frac{7}{4}$

Como os pontos devem estar sobre a elipse, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{7}{4} \\ x^2 + 4\,y^2 = 4 \end{cases}$$

$3y^2 = \frac{16-7}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x^2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Logo, $z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_3 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_4 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

O produto $z_1, z_2 . z_3 , z_4$ vale: $\left(1+\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{3}{4}\right)=\frac{49}{16}$

15. Para algum número real r, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo mais está próximo de r?

a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

Alternativa B

1ª SOLUÇÃO:

$p(x) \equiv 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$
$p(x) \equiv 8x^3 + 20x^2 - 24x^2 - 60x + 18x + 45$
$p(x) \equiv 4x^2 (2x + 5) - 12x(2x + 5) + 9 (2x + 5)$
$p(x) \equiv (2x + 5) . (4x^2 - 12x + 9)$
$p(x) \equiv (2x + 5) . (2x - 3)^2$

Assim, as raízes do polinômio são $-\frac{5}{2}$ (raiz simples) e $\frac{3}{2}$ (raiz dupla) logo $r=\frac{3}{2}=1{,}5$

2ª SOLUÇÃO:

Como $p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$ então r é raiz de p(x) e de p'(x).
Mas $p'(x) = 24x^2 - 8x - 42$. Fazendo p'(x) = 0:

$24x^2 - 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{7}{6}$

como $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ e $p\left(-\frac{7}{6}\right) \neq 0$, temos que p(x) é divisível por $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

Portanto r = 1,5.

16. Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288 .$$

a) Uma elipse. b) Uma parábola. c) Uma circunferência.
d) Uma hipérbole. e) Uma reta.

Alternativa C

Seja L_i a linha i do determinante dado. Realizando as operações $L_1 - L_4$, $L_2 - L_4$ e $L_3 - L_4$, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288$$

Aplicando o Teorema de Laplace na 4ª coluna, temos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288$$

Realizando agora L_1 - L_3 e L_2 - L_3, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y \\ 36 & 0 & 6 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(-3)\begin{vmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y \\ 6 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y + 10(x - 2) - 6(x - 2) - (x^2 + y^2 - 4) = -16$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

Logo, o lugar geométrico é uma circunferência de centro C(2; 3) e raio 5.

17. A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in C$, é igual a

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Alternativa A

$z^3 + z^2 - z.\bar{z} + 2z = 0 \Rightarrow z.(z^2 + z - \bar{z} + 2) = 0 \Rightarrow z = 0$ é raiz

Fazendo $z = x + yi$:

$x^2 - y^2 + 2xyi + x + iy - x + yi + 2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - y^2 + 2 + (2xy + 2y)i = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2xy + 2y = 0 \Rightarrow 2y.(x+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (I) ou } x = -1 \text{ (II)} \\ x^2 - y^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

De (I): $y = 0 \Rightarrow x^2 = -2$ (impossível)

De (II): $x = -1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ (ok)

Assim as três raízes são $z_1 = 0$, $z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$ e $z_3 = -1-\sqrt{3}\,i$

Logo $z_1 + z_2 + z_3 = -2$

18. Dada a equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que *m* é uma constante real, considere as seguintes informações:

I. Se $m \in]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.

II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.

III. $\forall m \in R$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III d) II e III e) I e II

Alternativa E

$x^3 + (m+1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$

$x^3 + x^2 + mx^2 + mx + 9x + 9 = 0$

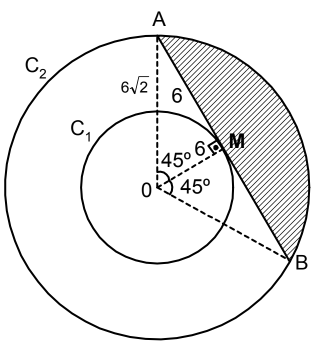
$x^2(x+1) + mx(x+1) + 9(x+1) = 0$
$(x+1).(x^2 + mx + 9) = 0$
ou $x + 1 = 0$, e portanto -1 é raiz, $\forall\ m \in \mathbb{R}$.
ou $x^2 + mx + 9 = 0$
$\triangle = m^2 - 36$
então temos:
Se $\triangle < 0$ então $-6 < m < 6$, duas raízes não reais, portanto I é verdadeira e III é falsa.
Se $\triangle = 0 \Leftrightarrow m = \pm 6$, uma raiz de multiplicidade 2, portanto II é verdadeira

19. Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de *6 cm* e $6\sqrt{2}$ *cm*, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm^2,

a) $9(\pi - 3)$ b) $18(\pi + 3)$ c) $18(\pi - 2)$ d) $18(\pi + 2)$ e) $16(\pi + 3)$

Alternativa C

Vejamos a figura a seguir:



No $\triangle OAM$, temos: $AM^2 + 6^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM = 6$
Logo: m(AÔM) = m(BÔM) = 45º
Seja S a área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$:

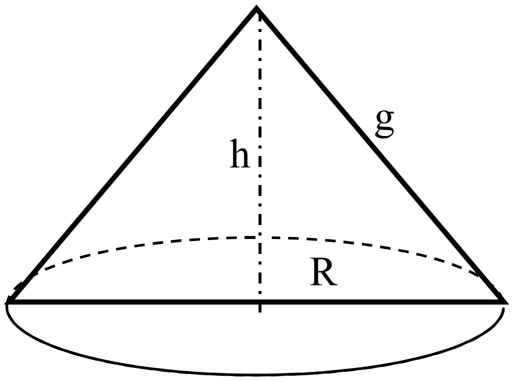
$$S = S_{\text{menor setor circular AOB}} - 2 \cdot S_{\text{triângulo AOM}} = \frac{1}{4}\pi(6\sqrt{2})^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6$$

$$\Leftrightarrow S = 18(\pi - 2)\ \text{cm}^2.$$

20. A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um circulo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a:

a) πR^3 b) $\pi\sqrt{2}\,R^3$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$ d) $\pi\sqrt{3}\,R^3$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

Alternativa E



Diâmetro do círculo = 2R + 2g
Área total do cone = $A_t = \pi(R+g)^2/3 \Rightarrow \pi R^2 + \pi Rg = \pi(R+g)^2/3 \Rightarrow g^2 - Rg - 2R^2 = 0$
$g = (R \pm 3R)/2$; $g > 0 \Rightarrow g = 2R$
$h^2 = g^2 - R^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$

$$\text{Volume} = V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 (R\sqrt{3}) \Rightarrow V = \pi R^3 \sqrt{3}/3 = \pi R^3/\sqrt{3}$$

21. Seja *A* um conjunto não-vazio.
a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de m.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

SOLUÇÃO:
a) Se um conjunto A tem *m* elementos, o número de elementos das partes de A (P(A)) é dado por: $n(P(A)) = 2^m$
b) Foi dado que: $P^{k+1}(A) = P(^k(A))$
Para $k = 1 \Rightarrow P^2(A) = P(P^1(A))$ onde $P^1(A) = P(A) = 2^2 = 4$
$n(P^2(A)) = 2^4 = 16$
Para $k = 2 \Rightarrow P^3(A) = P(P^2(A)) = 2^{16} = 65536$
Logo, $P^3(A) = 65536 > 65000$ e o valor mínimo de k é 3.

22. Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

SOLUÇÃO:
Seja:
S a probabilidade de se retirar uma bola verde;
P_b a probabilidade de escolher a caixa branca;
P_{vb} a probabilidade de pegar bola verde na caixa branca;
P_p a probabilidade de escolher a caixa preta;
P_{vp} a probabilidade de pegar bola verde na caixa preta.

Então $P_b = \frac{3}{36}$ $P_{vb} = \frac{5}{8}$ $P_p = \frac{33}{36}$ $P_{vp} = \frac{3}{5}$ e

$$S = P_b \cdot P_{vb} + P_p \cdot P_{vp} = \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{8} + \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{96} + \frac{11}{20} = \frac{25+264}{480} = \frac{289}{480}$$

23. Determine os valores reais do parâmetro *a* para os quais existe um número real *x* satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

SOLUÇÃO:
$\sqrt{1-x^2}$ existe apenas se -1 ≤ x ≤ 1, então podemos afirmar que existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que x = senα e $\sqrt{1-x^2} = \cos\alpha$. Assim: cos $\alpha \geq a$ - sen α
$a \leq$ senα + cosα
Observando que *a* deve ser menor ou igual ao valor máximo da soma (senα + cosα) e que este valor é positivo temos:

$$a \leq Max[\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha] \Rightarrow a \leq Max\left[\sqrt{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2}\right] \Rightarrow a \leq Max\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}2\alpha}\right] \Rightarrow a \leq \sqrt{1+Max(\operatorname{sen}2\alpha)} \Rightarrow$$
$$a \leq \sqrt{1+1} \Rightarrow a \leq \sqrt{2}$$

24. Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$.

SOLUÇÃO:
$$Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} = cis\frac{\pi}{4} \Rightarrow z^{60} = cis\frac{60\pi}{4} = cis\,15\pi = -1$$
A expressão z + z^2 + z^3 + ... + z^{60} é uma PG de a_1= z e r = z. Logo:
$$\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|\frac{z(z^{60}-1)}{z-1}\right| = \left|\frac{z(z^{60}-1)}{z-1}\right| = \frac{|z|\left|z^{60}-1\right|}{|z-1|} =$$
$$= \frac{|z||-1-1|}{|z-1|} = \frac{2|z|}{|z-1|} = \frac{2}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1\right|} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} =$$
$$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

25. Para *b* > 1 e *x* > 0, resolva a equação em *x*: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

SOLUÇÃO:
$$(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$$
Aplicando logaritmo de base 2 aos dois lados da equação:
$\log_b 2 \,.\, \log_2 2x = \log_b 3 \,.\, \log_2 3x \Leftrightarrow \log_b 2\,(1 + \log_2 x) = \log_b 3 \,.\, (\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow$
$1 + \log_2 x = \log_2 b \,.\, \log_b 3\,(\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow 1 + \log_2 x = \log_2 3\,(\log_2 3 + \log_2 x) \Leftrightarrow$
$1 + \log_2 x = (\log_2 3)^2 + \log_2 3 \,.\, \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x\,(1 - \log_2 3) = (\log_2 3)^2 - 1 \Leftrightarrow$
$-\log_2 x\,\cancel{(\log_2 3 - 1)} = (\log_2 3 + 1)\,\cancel{(\log_2 3 - 1)} \Leftrightarrow \log_2 x = -(\log_2 3 + \log_2 2) = -\log_2 6 = \log_2 6^{-1} \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{6}$

26. Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo]0,1[?

1ª SOLUÇÃO:
Seja r a raiz dupla em questão e m a terceira raiz. Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r+r+m=-3 & (1) \\ r.r+r.m+r.m=-2 & (2) \\ r.r.m=-d & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) vem:

$$\begin{cases} 2r+m=-3 \\ r^2+2rm=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2r-3 \\ r^2+2rm=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r^2+2r(-2r-3)=-2 \Leftrightarrow 3r^2+6r-2=0 \Leftrightarrow r=-1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Como r $\in$]0, 1[, então $r=-1+\frac{\sqrt{15}}{3}$

Assim: $m=-2\left(-1+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)-3 \Leftrightarrow m=\frac{-3-2\sqrt{15}}{3}$

Substituindo os valores obtidos de r e m na relação (3), obtemos:

$$d=-r^2m=-\left(-1+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2\left(\frac{-3-2\sqrt{15}}{3}\right) \Leftrightarrow d=\frac{10\sqrt{15}-36}{9}$$

2ª SOLUÇÃO:
Seja $f(x)=x^3+3x^2-2x+d=0$. Uma raiz dupla de f(x) deve ser raiz da derivada $f'(x)=3x^2+6x-2$. As raízes de $3x^2+6x-2=0$ são $-1-\frac{\sqrt{15}}{3}$ e $-1+\frac{\sqrt{15}}{3}$; destas, $\frac{\sqrt{15}}{3}-1$ é a única no intervalo $]\,0,1\,[$.

Logo f(x) terá raiz dupla em $]\,0,1\,[$ se, e somente se, $f\left(\frac{\sqrt{15}}{3}-1\right)=0$. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini:

$\frac{\sqrt{15}}{3}-1$	1	3	-2	d
	1	$\frac{\sqrt{15}}{3}+2$	$\frac{\sqrt{15}-7}{3}$	$\underbrace{4-\frac{10\sqrt{15}}{9}+d}_{0}$

Logo $d=\frac{10\sqrt{15}}{9}-4=\frac{10\sqrt{15}-36}{9}$.

27. Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação

$$sen(3\alpha)+sen(3\beta)+sen(3\gamma)=0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a 60º.

SOLUÇÃO:
Sendo α, β e γ os ângulos inteiros de um triângulo, então temos: $\alpha + \beta + \gamma = 180º \Leftrightarrow \gamma = 180º - (\alpha + \beta)$
Da relação fornecida:
$\text{sen}3\alpha + \text{sen}3\beta + \text{sen}3\gamma = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{sen}3\alpha + \text{sen}3\beta + \text{sen}\{3[180º - (\alpha + \beta)]\} = 0$
Aplicando as fórmulas de prostaférese, temos:

$$2\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right)+\text{sen}(3\alpha+3\beta)=0 \Leftrightarrow$$

$$2\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right)+2\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right).2\cos\frac{3\alpha}{2}.\cos\frac{3\beta}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \text{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\alpha}{2}=0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\beta}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{3\alpha+3\beta}{2}=180º \\ \text{ou} \\ \frac{3\alpha}{2}=90º \\ \text{ou} \\ \frac{3\beta}{2}=90º \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha+\beta=120º \\ \text{ou} \\ \alpha=60º \\ \text{ou} \\ \beta=60º \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = 60º \text{ ou } \beta = 60º \text{ ou } \gamma = 60º$$

28. Se A é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo i, j = 1, ..., n, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

SOLUÇÃO:
Como A é quadrada, de ordem 3 e diagonal, vem:

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Sendo A ortogonal, $A^{-1} = A^T$. Como $AA^{-1} = I$, $AA^T=I$:

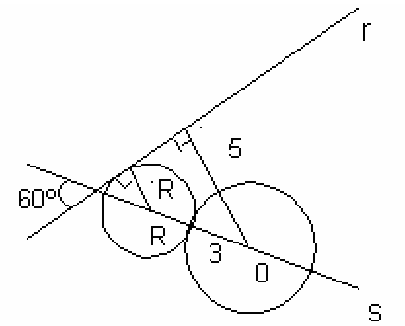
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

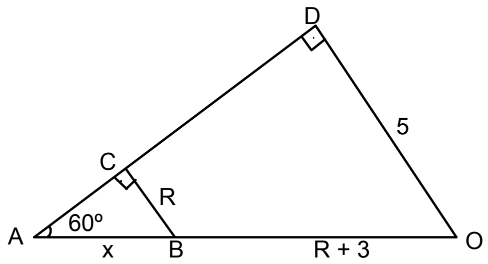
Logo, existem 8 matrizes que satisfazem as condições do problema, que são da forma: $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

29. Sejam *r* e *s* duas retas que se interceptam segundo um ângulo de 60º. Seja C_1 uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro *O* se situa em *s*, a 5 cm de *r*. Determine o raio da menor circunferência tangente à C_1 e à reta *r*, cujo centro também se situa na reta *s*.

SOLUÇÃO:



A menor circunferência que cumpre as exigências enunciadas está representada acima.
Para determinar seu raio, pode-se aplicar semelhança de triângulos:



$$\Delta \text{ ABC: sen } 60º = \frac{R}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

$$\Delta \text{ AOD: sen } 60º = \frac{5}{x+R+3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 10 = \sqrt{\cancel{3}}\,\frac{2\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{3}}R + \sqrt{3}\,(R+3) \Rightarrow$$

$$10 = (2+\sqrt{3})\,R + 3\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{10-3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{20-16\sqrt{3}+9}{4-3} \Rightarrow$$

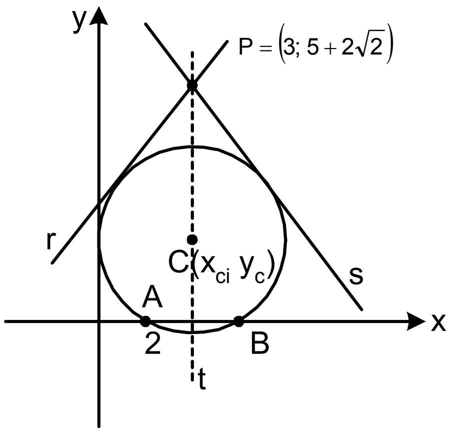
$$R = \left(29-16\sqrt{3}\right)cm$$

30. Sejam os pontos A: (2, 0), B: (4, 0) e P: (3, 5 + 2$\sqrt{2}$).

a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

SOLUÇÃO:



a) O centro da circunferência procurada está sobre a reta t : x = 3 (// ao eixo y)
A distância de C até A é raio da circunferência e vale 3:

$$d_{CA} = \sqrt{(x_c - 2)^2 + y_c^{\ 2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-2)^2 + y_c^2} = 3 \ \therefore 1 + y_c^2 = 9$$

e $y_c = 2\sqrt{2}$

(pois o centro da circunferência está no 1º quadrante)

Logo, a equação é $(x-3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$

b) a equação do feixe de retas que passa por $P\left(3;\ 5 + 2\sqrt{2}\right)$ é

$$y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right) = m(x-3) \Rightarrow mx - y - 3m + 5 + 2\sqrt{2} = 0$$

A distância de C até as retas r e s é o raio da circunferência.
Como r e s pertencem ao feixe, tem-se:

$$d_{D,s} = \left|\frac{3m - 2\sqrt{2} - 3m + 5 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 3 \ \therefore \left|\frac{5}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 3$$

Então: $\dfrac{5}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \ \therefore m^2 + 1 = \dfrac{25}{9}$ e $m = \pm\dfrac{4}{3}$

Assim:

r: $y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{3}x - 3$ ou $y = \dfrac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$

s: $y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right) = -\dfrac{4}{3}(x-3)$ ou $y = -\dfrac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$