Fez

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Aprovou!

Elite Resolve

ITA 2012

Matemática

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não-negativos
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$
arg z: argumento do número complexo z
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
A^c : complementar do conjunto A
$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 01

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

Resolução — Alternativa D

Sendo x a quantidade de moedas de 1 centavo, y a quantidade de moedas de 5 centavos e z a quantidade de moedas de 10 centavos, com $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, temos que:

$$x \cdot 1 + y \cdot 5 + z \cdot 10 = 25 \Leftrightarrow x + 5y + 10z = 25$$

Observe que z só pode ser 0, 1, ou 2, pois se $z \ge 3$, a soma seria maior ou igual a 30. Assim:

(I) Para $z = 0$, ficamos com $x + 5y = 25$. Nesse caso, y só pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Temos então as 6 soluções:

$$(x,y,z) = \begin{cases} (25,0,0) \\ (20,1,0) \\ (15,2,0) \\ (10,3,0) \\ (5,4,0) \\ (0,5,0) \end{cases}$$

(II) Para $z = 1$, ficamos com $x + 5y = 15$. Nesse caso, y só pode ser 0, 1, 2 ou 3. Temos então as 4 soluções:

$$(x,y,z) = \begin{cases} (15,0,1) \\ (10,1,1) \\ (5,2,1) \\ (0,3,1) \end{cases}$$

(III) Para $z = 2$, ficamos com $x + 5y = 5$. Nesse caso, z só pode ser 0 ou 1. Temos então as 2 soluções:

$$(x,y,z) = \begin{cases} (5,0,2) \\ (0,1,2) \end{cases}$$

Logo, o total de maneiras diferentes de efetuar a troca é:

$$6 + 4 + 2 = \boxed{12 \text{ maneiras}}$$

QUESTÃO 02

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

a) $\frac{2}{9}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{4}{9}$.
d) $\frac{5}{9}$.
e) $\frac{2}{3}$.

Resolução — Alternativa D

Veja que:

$$P(\text{Pelo menos um acertar}) = 1 - P(\text{Ninguem acertar})$$

Mas, considerando que os resultados de cada atirador são independentes, temos que:

$$P(\text{Ninguem acertar}) = P(1^{\circ}\text{errar}) \cdot P(2^{\circ}\text{errar})$$

Pelo enunciado, a probabilidade de acerto é $\frac{1}{3}$ e consequentemente a probabilidade de erro é $\frac{2}{3}$, logo:

$$P(\text{Pelo menos um acertar}) = 1 - P(1^{\circ}\text{errar}) \cdot P(2^{\circ}\text{errar}) = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{5}{9}}$$

QUESTÃO 03

Sejam $z = n^2(\cos 45^{\circ} + i \operatorname{sen} 45^{\circ})$ e $w = n(\cos 15^{\circ} + i \operatorname{sen} 15^{\circ})$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3} + i$.
b) $2(\sqrt{3} + i)$.
c) $2(\sqrt{2} + i)$.
d) $2(\sqrt{2} - i)$.
e) $2(\sqrt{3} - i)$.

Resolução — Alternativa B

Temos que:

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \cdot \cos(45^{\circ} + i \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ})\right]^n \Leftrightarrow$$
$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left[\cos(n \cdot 45^{\circ}) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot 45^{\circ})\right]$$

Para que $(1+i)^n$ seja real, sua parte imaginária deve ser nula. Assim:

$$\operatorname{sen}(n \cdot 45^{\circ}) = 0 \Leftrightarrow n \cdot 45^{\circ} = k \cdot 180^{\circ}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$n = 4 \cdot k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Observe que o menor valor inteiro positivo de n é obtido para o menor valor inteiro positivo de k, que é 1. Portanto:

$$k = 1 \Leftrightarrow n = 4$$

Por outro lado, ao dividirmos dois números complexos, dividimos seus módulos e subtraímos seus argumentos. Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{4^2 \cdot (\cos 45^{\circ} + i \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ})}{4 \cdot (\cos 15^{\circ} + i \cdot \operatorname{sen} 15^{\circ})} \Leftrightarrow$$
$$\frac{z}{w} = 4 \cdot \left[\cos(45^{\circ} - 15^{\circ}) + i \cdot \operatorname{sen}(45^{\circ} - 15^{\circ})\right] \Leftrightarrow$$
$$\frac{z}{w} = 4 \cdot (\cos 30^{\circ} + i \cdot \operatorname{sen} 30^{\circ}) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\frac{z}{w} = 2 \cdot \left(\sqrt{3} + i\right)}$$

QUESTÃO 04

Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

a) $-\frac{\pi}{2}$. **b)** $\frac{\pi}{4}$. **c)** $\frac{\pi}{2}$. **d)** $\frac{3\pi}{4}$. **e)** $\frac{7\pi}{4}$.

Resolução — Alternativa E

Lembrando que ao multiplicarmos dois números complexos, seus argumentos são somados, temos que:

$$\arg(-2iz) = \arg(-2i) + \arg(z) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\arg(-2iz) = \frac{7\pi}{4}}$$

QUESTÃO 05

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas II. **c)** apenas III.
d) apenas I e II. **e)** I, II e III.

Resolução — Alternativa E

Analisando cada afirmação:

I. Verdadeira. Veja que como $r_1 - r_2$ é racional, se r_1 ou r_2 for racional, o outro será também. Então será racional $r_1 + r_2$ e como $r_1 + r_2 + r_3$ é racional, teremos os 3 números racionais.

II. Verdadeira. Se r_3 for racional, como temos $r_1 + r_2 + r_3$ racional, então $r_1 + r_2$ é racional.

III. Verdadeira. Pelo item anterior, temos que $r_1 + r_2$ é racional, mas como a soma $(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) = 2r_1$ é racional, temos que r_1 é racional, o que implica que r_2 é racional também.

QUESTÃO 06

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

a) $2(1-\sqrt{2})$ **b)** $2(2+\sqrt{2})$ **c)** $4(\sqrt{2}-1)$
d) $4+\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{2}-4$

Resolução — Alternativa C

Vamos, primeiramente, determinar os valores das raízes do polinômio utilizando as relações fornecidas juntamente com as relações de Girard:

$p(x) = x^3 - (4+\sqrt{2})x^2 + ax + 16$

$$\left.\begin{array}{ll} (I) & x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ (II) & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ (III) & x_1x_2x_3 = -16 \end{array}\right\} \text{Relações de Girard}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (IV) & x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ (V) & x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{Relações fornecidas}$$

Utilizando as equações (I), (IV) e (V) temos:

$$\begin{cases} (I) & x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ (IV) & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ (V) & x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Portanto, pela equação (II) temos:

$$a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\cdot 4 + (-\sqrt{2})\cdot 4$$

$$a = -4 + 4\sqrt{2} = \boxed{4(\sqrt{2}-1)}$$

QUESTÃO 07

Sabe-se que $(x+2y,\, 3x-5y,\, 8x-2y,\, 11x-7y+2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60.
b) -30.
c) 0.
d) 30.
e) 60.

Resolução — Alternativa A

Pela propriedade da media aritmética entre três termos consecutivos de uma progressão aritmética, e utilizando que o último termo vale -127 temos que:

$$\begin{cases} (x+2y) + (8x-2y) = 2\cdot(3x-5y) \\ (3x-5y) + (-127) = 2\cdot(8x-2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ 13x + y = -127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 3 \end{cases}$$

Substituindo no ultimo termo, que vale -127:

$$11\cdot(-10) - 7\cdot 3 + 2z = -127 \Leftrightarrow z = 2$$

Portanto:

$$x\cdot y\cdot z = -10\cdot 3\cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{x\cdot y\cdot z = -60}$$

QUESTÃO 08

Considere um polinômio $p(x)$ de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então $p(-1)$ é igual a

a) $5(5-2\sqrt{3})$.

b) $15(5-2\sqrt{3})$.

c) $30(5-2\sqrt{3})$.

d) $45(5-2\sqrt{3})$.

e) $50(5-2\sqrt{3})$.

Resolução — Alternativa C

Como o polinômio $p(x)$ tem coeficientes reais, sabemos que, se um número complexo z_0 for raiz desse polinômio, então seu conjugado $\overline{z_0}$ também será raiz.

Como $-2i$ e $-\sqrt{3}+i$ são raízes de $p(x)$, segue que $2i$ e $-\sqrt{3}-i$ será outras duas raízes.

Além disso, como $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 5$, pelo teorema do resto segue que $p(5) = 0$, isto é, 5 é outra raiz.

Assim, as cinco raízes de $p(x)$ são 5, $\pm 2i$ e $-\sqrt{3} \pm i$. Portanto, esse polinômio pode ser expresso como:

$$p(x) = a\cdot(x-5)\cdot(x-2i)\cdot(x-(-2i))\cdot\left(x-(-\sqrt{3}+i)\right)\cdot\left(x-(-\sqrt{3}-i)\right)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = a\cdot(x-5)\cdot(x^2+4)\cdot(x^2+2\sqrt{3}\cdot x+4)$$

Sendo $p(1) = 20\cdot(5+2\sqrt{3})$, temos que:

$$20\cdot(5+2\sqrt{3}) = a\cdot(1-5)\cdot(1^2+4)\cdot(1^2+2\sqrt{3}\cdot 1+4) \Leftrightarrow a = -1$$

Logo, a expressão de $p(x)$ é:

$$p(x) = -(x-5)\cdot(x^2+4)\cdot(x^2+2\sqrt{3}\cdot x+4)$$

Portanto:

$$p(-1) = -(-1-5)\cdot((-1)^2+4)\cdot((-1)^2+2\sqrt{3}\cdot(-1)+4) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{p(-1) = 30\cdot(5-2\sqrt{3})}$$

QUESTÃO 09

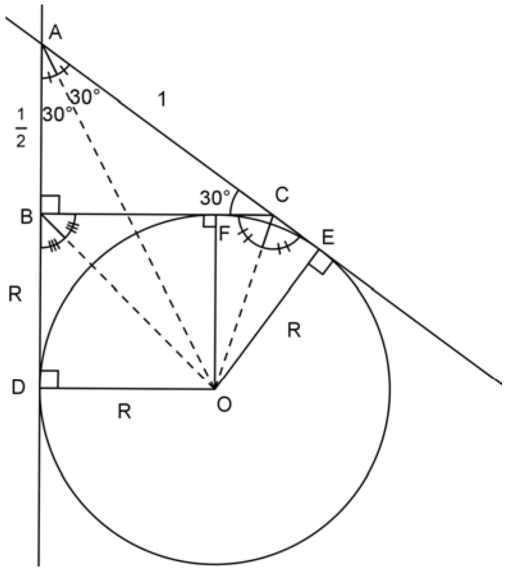
Um triângulo ABC tem lados com medidas $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b=1$ cm e $c=\frac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

Resolução — Alternativa A

Note que o triângulo ABC é retângulo em B, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1)^2$

O ex-incentro O pertence à bissetriz do ângulo interno A e às bissetrizes dos ângulos externos B e C, conforme ilustra a figura a seguir.



1º modo de resolução:

A área do triângulo ABC em função do raio da circunferência ex-inscrita R e do semiperímetro p é dada por:

$$S=R\cdot(p-a) \qquad (1)$$

$$\text{onde } p=\frac{a+b+c}{2}\Rightarrow p=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}}{2}\Leftrightarrow p=\frac{3+\sqrt{3}}{4} \qquad (2)$$

A área também pode ser calculada por:

$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot a\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{8} \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{8}=R\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{8}=R\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\text{ cm}}$$

2º modo de resolução:

O triângulo ADO é retângulo em D, pois D é ponto de tangência entre a circunferência ex-inscrita e a semirreta $\overrightarrow{AD}$. Além disso, no triângulo ABC, $\cos\hat{A}=\frac{1}{2}\therefore\hat{A}=60°$. Como a semirreta $\overrightarrow{AO}$ é bissetriz de $\hat{A}$, então $D\hat{A}O=30°$. Como a distância de O até $\overline{BC}$ é igual a BD, então $BD=R$.

Então, para o triângulo ADO, podemos escrever:

$$\text{tg}(30°)=\frac{R}{R+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{R}{R+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\sqrt{3}R=R+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)R=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\text{ cm}}$$

QUESTÃO 10

Sejam $A=(0,0)$, $B=(0,6)$ e $C=(4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

a) $\frac{5}{3}$.

b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$.

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e) $\frac{10}{3}$.

Resolução — Alternativa B

O baricentro $G=(x_G,y_G)$ do triângulo ABC tem suas coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{0+0+4}{3}=\frac{4}{3} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{0+6+3}{3}=3 \end{cases}$$

Assim, a distância AG será igual a:

$$AG=\sqrt{(x_G-x_A)^2+(y_G-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+(3-0)^2}\Leftrightarrow\boxed{AG=\frac{\sqrt{97}}{3}}$$

QUESTÃO 11

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x-3y+3=0$ e $s: 3x+y-21=0$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{19}{2}$

b) 10

c) $\frac{25}{2}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{29}{2}$

Resolução — Alternativa D

Reescrevendo as equações das retas, temos:

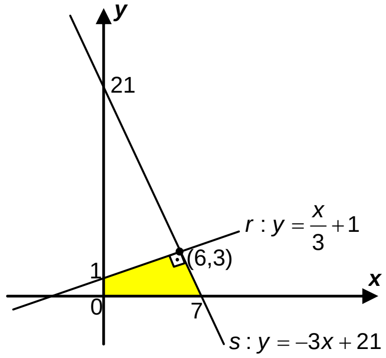
$r:\ x-3y+3=0\Rightarrow y=\frac{x}{3}+1$

$s:\ 3x+y-21=0\Rightarrow y=-3x+21$

Determinamos a intersecção das duas reta resolvendo o sistema:

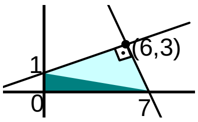
$$\begin{cases} y=\frac{x}{3}+1 \\ y=-3x+21 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

Representando a situação no gráfico, temos:



Para calcularmos a área hachurada, utilizaremos duas abordagens:

1) Podemos dividir o quadrilátero em dois triângulos e calcular suas áreas, através das coordenadas de cada trio de pontos que forma cada triângulo:



$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&1&1\\7&0&1\\0&0&1\end{matrix}\right\|+\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&1&1\\7&0&1\\6&3&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}(7+20)=\frac{27}{2}$$

2) Podemos utilizar um mecanismo para cálculo da área de um polígono qualquer, que consiste em:

- Determinar um ponto inicial pertencente ao polígono
- Escrever as coordenadas a partir desse ponto seguindo um sentido de rotação pré-determinado, incluindo o ponto inicial uma última vez
- Multiplicar em cruz os elementos, como se estivéssemos calculando alguns determinantes
- Dividir o módulo do resultado por dois

Esse mecanismo equivale a somar a área de todos os triângulos que formariam o polígono.

Para o nosso caso, partindo da origem:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4&x_1\\y_1&y_2&y_3&y_4&y_1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&0&6&7&0\\0&1&3&0&0\end{matrix}\right\|=\frac{27}{2}$$

QUESTÃO 12

Dados os pontos $A=(0,0)$, $B=(2,0)$ e $C=(1,1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d=2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

a) $r_{1,2}:\sqrt{2}y-x\pm 2\sqrt{4+\sqrt{2}}=0.$

b) $r_{1,2}:\frac{\sqrt{2}}{2}y-x\pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}}=0.$

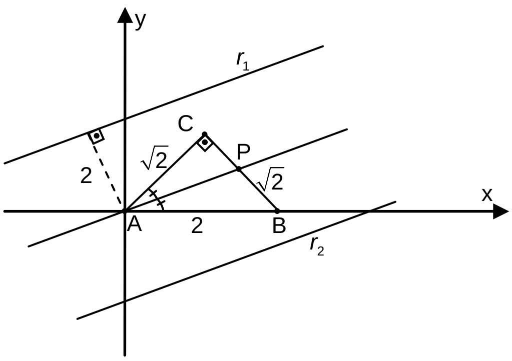
c) $r_{1,2}:2y-x\pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}}=0.$

d) $r_{1,2}:\left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm\sqrt{2+4\sqrt{2}}=0.$

e) $r_{1,2}:\left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}=0.$

Resolução **Alternativa E**

Observe o desenho abaixo:



Pelas medidas dos lados, temos que o triângulo ABC é isósceles retângulo em C. Assim, a bissetriz AP faz $22{,}5°$ com o eixo x. Então a inclinação da reta é dada por:

$$\text{tg}(22{,}5°)=tg\left(\frac{45°}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}=$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1$$

Então a bissetriz tem equação reduzida $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)y-x=0$.

O lugar geométrico procurado é um par de retas paralelas de distância 2 da bissetriz e, dessa forma, elas tem forma geral $\left(\sqrt{2}+1\right)y-x+b=0$.

Como a distância de qualquer ponto da bissetriz às retas procuradas deve ser 2, utilizando a formula de distância de ponto a reta no ponto $(0;0)$ temos:

$$d=2=\frac{\left|\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 0-1\cdot 0+b\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1}}=\frac{|b|}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\Leftrightarrow b=\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Assim, a equação geral das retas podem ser representadas por:

$$\boxed{\left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}=0}$$

QUESTÃO 13

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I $\left(A\setminus B^C\right)\setminus C^C=A\cap(B\cup C)$;

II. $\left(A\setminus B^C\right)\setminus C\ =A\cup\left(B\cap C^C\right)^C$;

III. $B^C\cup C^C=(B\cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e III.
e) II e III.

Resolução **Alternativa C**

Sabendo que $A\setminus B=A\cap B^C$, temos:

I. Falsa

$\left(A\setminus B^C\right)\setminus C^C=(A\cap B)\setminus C^C=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C\neq A\cap(B\cup C)$.

II. Falsa

$$\begin{cases}\left(A\setminus B^C\right)\setminus C=(A\cap B)\setminus C=(A\cap B)\cap C^C=A\cap B\cap C^C\\ A\cup\left(B\cap C^C\right)^C=A\cup\left(B^C\cup C\right)\text{ (Lei de De Morgan)}\end{cases}$$

III. Verdadeira

$B^C\cup C^C=(B\cap C)^C$ (Lei de De Morgan).

QUESTÃO 14

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que $n(P(A)\cup P(B))+1=n(P(A\cup B))$. Então, a diferença $n(A)-n(B)$ pode assumir

a) um único valor.
b) apenas dois valores distintos.
c) apenas três valores distintos.
d) apenas quatro valores distintos.
e) mais do que quatro valores distintos.

Resolução **Alternativa A**

Lembramos que:

(I) Dado um conjunto finito X, com seu número de elementos denotado por $n(X)$, o número de elementos do conjunto das partes de X é dado por:

$$n(P(X))=2^{n(X)}$$

(II) Dados dois conjuntos finitos X e Y, o número de elementos da união desses dois conjuntos é dado por:

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$$

Como A e B são conjuntos disjuntos, o único subconjunto (parte) que eles terão em comum será o conjunto vazio ($\varnothing$). Assim

$$P(A)\cap P(B)=\{\varnothing\}\Leftrightarrow n(P(A)\cap P(B))=1$$

Pelo enunciado, temos que:

$$n(P(A)\cup P(B))+1=n(P(A\cup B))\Leftrightarrow$$

$$\left[n(P(A))+n(P(B))-n(P(A)\cap P(B))\right]+1=n(P(A\cup B))\Leftrightarrow$$
$$\left[2^{n(A)}+2^{n(B)}-1\right]+1=2^{n(A\cup B)}\Leftrightarrow 2^{n(A)}+2^{n(B)}=2^{n(A\cup B)}$$

Novamente usando o fato de que A e B são disjuntos, segue que:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-0=n(A)+n(B)$$

Assim, voltando para a equação:

$$2^{n(A)}+2^{n(B)}=2^{n(A\cup B)}\Leftrightarrow 2^{n(A)}+2^{n(B)}=2^{n(A)+n(B)}=2^{n(A)}\cdot 2^{n(B)}\Leftrightarrow$$
$$2^{n(A)}\cdot 2^{n(B)}-2^{n(A)}-2^{n(B)}=0$$

Para resolver essa equação, somamos 1 de cada lado:

$$2^{n(A)}\cdot 2^{n(B)}-2^{n(A)}-2^{n(B)}+1=0+1\Leftrightarrow 2^{n(A)}\cdot(2^{n(B)}-1)-(2^{n(B)}-1)=1\Leftrightarrow$$
$$(2^{n(A)}-1)\cdot(2^{n(B)}-1)=1$$

Observe que como nossas variáveis $n(A)$ e $n(B)$ são números naturais, $2^{n(A)}$ e $2^{n(B)}$ também devem ser naturais. Portanto:

$$\begin{cases}2^{n(A)}-1=1\\2^{n(B)}-1=1\end{cases}\text{ou}\begin{cases}2^{n(A)}-1=-1\\2^{n(B)}-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{n(A)}=2\\2^{n(B)}=2\end{cases}\text{ou}\begin{cases}2^{n(A)}=0\\2^{n(B)}=0\end{cases}$$

A possibilidade $\begin{cases}2^{n(A)}=0\\2^{n(B)}=0\end{cases}$ não tem solução, pois $2^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Finalmente:

$$\begin{cases}2^{n(A)}=2^1\\2^{n(B)}=2^1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n(A)=1\\n(B)=1\end{cases}$$

Isso implica que $n(A)-n(B)=1-1=0$, isto é, $n(A)-n(B)$ **assume um único valor.**

QUESTÃO 15

Considere um número real $a\neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x:

$a^{2x}+2\beta a^x-\beta=0,\ \beta\in\mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta<0$, então existem duas soluções reais distintas;
II. Se $\beta=-1$, então existe apenas uma solução real;
III. Se $\beta=0$, então não existem soluções reais;
IV. Se $\beta>0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.
b) I e III.
c) II e III.
d) II e IV.
e) I, III, e IV.

Resolução — Alternativa C

Fazendo a substituição $y=a^x$ transformamos a equação do enunciado em uma equação de segundo grau (em y) $y^2+2\beta y-\beta=0$. Resolvendo esta equação temos:

$$y=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4\beta^2+4\beta}}{2}=-\beta\pm\sqrt{\beta(\beta+1)}$$

Analisando agora as afirmações:

I. Falsa. Veja que se $\beta\in(-1;0)$, então $\beta(\beta+1)<0$ e não existe solução real.

II. Verdadeira. Se $\beta=-1$, a solução fica $a^x=y=1\pm\sqrt{-1\cdot(0)}=1$. Ou seja, apresenta $x=0$ como única solução real.

III. Verdadeira. Se $\beta=0$, então temos $a^x=y=0$, mas não existe x real tal que $a^x=0$.

IV. Falsa. Se $\beta>0$, a solução $-\beta-\sqrt{\beta(\beta+1)}$ não convém, pois $-\beta-\sqrt{\beta(\beta+1)}<0$. Há então, apenas uma solução real $x=\log_a\left(-\beta+\sqrt{\beta(\beta+1)}\right)$.

Ou seja, sempre são verdadeiras as afirmações II e III.

QUESTÃO 16

Seja $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \operatorname{arcsen}\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)+\arccos\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\right\}$. Então,

a) $S=\varnothing$
b) $S=\{0\}$
c) $S=\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$
d) $S=\mathbb{R}^+$
e) $S=\mathbb{R}$

Resolução — Alternativa B

Resolvendo a equação:

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)+\arccos\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$
$$\arccos\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

Aplicando cosseno dos dois lados da equação temos:

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right)\Leftrightarrow$$
$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right)=-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\Rightarrow e^x-e^{-x}=0$$

Então, temos $e^{2x}=1\Rightarrow x=0$. Ou seja, $S=\{0\}$.

QUESTÃO 17

Seja $x\in[0,2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}(x)\cos(x)=\frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg}(x)$ são, respectivamente

a) 1 e 0.
b) 1 e $\frac{5}{2}$.
c) -1 e 0.
d) 1 e 5.
e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

Resolução — Alternativa B

Note que, como $\cos(x)=0$ não satisfaz a equação, podemos reescrever a expressão $\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$ em função de $\operatorname{tg}(x)$

$$\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\cdot\cos^2(x)=\operatorname{tg}(x)\cdot\frac{1}{\sec^2(x)}=\frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}.$$

Dessa forma:

$$\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)=\frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\Leftrightarrow\frac{2}{5}=\frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\Leftrightarrow$$
$$2\cdot\operatorname{tg}^2(x)-5\cdot\operatorname{tg}(x)+2=0.$$

Note que temos uma equação do segundo grau em função da variável $\operatorname{tg}(x)$. O discriminante dessa equação é dado por:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9>0,$$

Sendo $\Delta>0$, as raízes da equação em $\operatorname{tg}(x)$ são reais, de modo que o produto e a soma de todos os valores de $\operatorname{tg}(x)$ que satisfazem a equação podem ser obtidos através da relação entre os coeficientes da equação:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{2}{2}\Leftrightarrow\boxed{P=1}\text{ e }S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-5)}{2}\Leftrightarrow\boxed{S=\frac{5}{2}}.$$

QUESTÃO 18

A soma $\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi)$, para todo $\alpha\in[0,2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando *n* é par.
b) $-\mathrm{sen}(\alpha)$ quando *n* é ímpar.
c) $\cos(\alpha)$ quando *n* é ímpar.
d) $\mathrm{sen}(\alpha)$ quando *n* é par.
e) zero quando *n* é ímpar.

Resolução — Alternativa E

Como $\mathrm{sen}(k\pi)=0$ e $\cos(k\pi)=(-1)^k$, temos, expandindo $\cos(\alpha+k\pi)$:

$$\cos(\alpha+k\pi)=\cos\alpha.\cos(k\pi)-\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}(k\pi)$$

$$\cos(\alpha+k\pi)=(-1)^k.\cos\alpha$$

Assim:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\cos\alpha=\cos\alpha.\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$$

Observe que:

n = 0: $(-1)^0=1$

n = 1: $(-1)^0+(-1)^1=1-1=0$

n = 2: $(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2=1-1+1=1$

n = 3: $(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3=1-1+1-1=0$

Desse modo, observe que se n é par então:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi)=\cos\alpha.\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)=\cos\alpha.1=\cos\alpha$$

Enquanto se n é ímpar a soma vale:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi)=\cos\alpha.\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)=\cos\alpha.0=0$$

Sendo assim, a alternativa E está correta.

QUESTÃO 19

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{3}{4}$

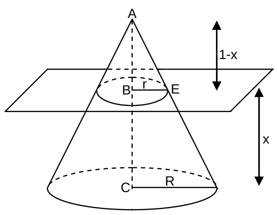
Resolução — Alternativa D

Calculando o raio da base do cone:

$$g^2=R^2+H^2\Rightarrow\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2+1^2\Leftrightarrow R^2=\frac{4\cdot3}{9}-1$$

$$\Leftrightarrow R^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

Ao cortarmos tal cone por um plano paralelo à base, a uma distância x da mesma, temos a seguinte situação:



Como os triângulos ABE e ACD são semelhantes, temos:

$$\frac{r}{R}=\frac{1-x}{1}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{3}(1-x)}{3}$$

Pelo enunciado o cone superior tem volume igual ao volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm. Assim:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h\Leftrightarrow\left[\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}\right]^3=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}(1-x)}{3}\right)^2\cdot(1-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{243}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{3}{9}\cdot(1-x)^3\Leftrightarrow(1-x)^3=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\boxed{x=\frac{2}{3}}$$

QUESTÃO 20

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a 3π cm^2. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente:

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

e) π e $2\pi\sqrt{2}$.

Resolução — Alternativa A

Sabendo que um cone com raio de base *r*, altura *h* e geratriz *g* tem, para o ângulo central (θ), a relação $\theta=360°\cdot\frac{r}{g}$, e para área lateral ($A_L$) a relação $A_L=\pi\cdot r\cdot g$. Logo, temos:

$$\begin{cases}120°=360°\cdot\dfrac{r}{g}\\ 3\pi=\pi\cdot r\cdot g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\text{ cm}\\ g=3\text{ cm}\end{cases}$$

Usando a relação $g^2=h^2+r^2$ temos que $h=2\sqrt{2}$ cm.
Assim, a área total (A_T) desse cone é dada por:

$$A_T=A_L+A_B=3\pi+\pi\cdot1^2\Leftrightarrow\boxed{A_T=4\pi\text{ cm}^2},$$

e o volume *V* desse cone é dado por

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot2\sqrt{2}\Leftrightarrow\boxed{V=\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3}.$$

QUESTÃO 21

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Resolução

Vamos chamar os conjuntos em que são divididos os cartões de grupos 1 e 2.

O número de maneiras de fazer a divisão dos 10 cartões em dois grupos, com 5 cartões cada, é:

$$n(\text{Total})=\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}=252\cdot1=252$$

Observe que ao se escolher os cartões de um grupo, o outro já fica determinado automaticamente.

Já o número de casos em que acontece o evento desejado, $A=\{\text{os cartões 9 e 10 estão no mesmo grupo}\}$, é dado por:

$$n(A)=n(\text{juntos no grupo 1})+n(\text{juntos no grupo 2})=$$

$$=\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}=56\cdot1+56\cdot1=112$$

Assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\text{Total})}=\frac{112}{252}\Leftrightarrow\boxed{P(A)=\frac{4}{9}}$$

QUESTÃO 22

Determine os valores reais de x de modo que $\text{sen}(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Resolução

Seja a função a ser maximizada $f(x)=\text{sen}(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$

Note que, ao dividirmos e multiplicarmos a expressão por 2, temos os senos e cossenos do arco notável $\frac{\pi}{3}$ multiplicando $\text{sen}(2x)$ e $\cos(2x)$:

$$f(x)=2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\text{sen}(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x)\right]\Leftrightarrow$$

$$f(x)=2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3}\cdot\text{sen}(2x)-\text{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\cos(2x)\right]$$

Mas, do seno da diferença de arcos, temos:

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\text{sen}(2x)-\text{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\cos(2x)=\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Portanto:

$$f(x)=2\cdot\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Os valores de x que maximizam a função são aqueles que tornam $\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ máximo. Sabendo que o valor máximo da função seno é igual a 1, precisamos determinar x para que $\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Fazemos então:

$$\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\text{, com } k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=\frac{5\pi}{12}+k\cdot\pi\text{, com } k\in\mathbb{Z}}$$

QUESTÃO 23

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são 1, $1+x_1$, $1+x_2$, ..., $1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Resolução

Temos que:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n\end{bmatrix}$$

Pela regra de Chió, o determinante de A pode ser expresso como:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n\end{vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\det A=\begin{vmatrix}(1+x_1)-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & \cdots & 1-1\cdot 1\\ 1-1\cdot 1 & (1+x_2)-1\cdot 1 & \cdots & 1-1\cdot 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & \cdots & (1+x_n)-1\cdot 1\end{vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\det A=\begin{vmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}\Leftrightarrow \det A=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

Como $\det A=256$, temos que:

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=256$$

Lembrando que o produto P_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é tal que $P_n^2=(x_1\cdot x_n)^n$, segue que:

$$256^2=(x_1\cdot x_n)^n\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}\right)\right]^n=(4^4)^2\Leftrightarrow(4^{n-2})^n=4^8\Leftrightarrow$$

$$n^2-2n=8\Leftrightarrow n^2-2n-8=0\Leftrightarrow n=4\text{ ou } n=-2$$

Como $n=-2$ não convém para o problema, ficamos com $n=4$, e como A era de ordem $(n+1)$, segue que a **ordem de A é 5**.

QUESTÃO 24

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A=\begin{bmatrix}n & \log_2 2 & -\log_2\frac{1}{2}\\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243\\ -5 & \log_5\frac{1}{125} & -\log_5 25\end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Resolução

Temos que:

$$\begin{cases}a_{12}=\log_2 2=1\\ a_{13}=-\log_2\frac{1}{2}=-\log_2 2^{-1}=-(-1)=1\\ a_{22}=\log_3 3^n=n\\ a_{23}=\log_3 243=\log_3 3^5=5\\ a_{32}=\log_5\frac{1}{125}=\log_5 5^{-3}=-3\\ a_{33}=-\log_5 25=-\log_5 5^2=-2\end{cases}$$

Assim, podemos reescrever a matriz A como:

$$A=\begin{bmatrix}n & 1 & 1\\ n+5 & n & 5\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix}$$

Sendo seu determinante igual a 9, vem que:

$$\det A=\begin{vmatrix}n & 1 & 1\\ n+5 & n & 5\\ -5 & -3 & -2\end{vmatrix}=9\Leftrightarrow -2n^2+19n-30=9\Leftrightarrow$$

$$2n^2-19n+39=0\Leftrightarrow n=3\text{ ou } n=\frac{13}{2}$$

Como n deve ser natural, $n=\frac{13}{2}$ não convém, e ficamos com $\boxed{n=3}$.

Assim:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 5\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix}$$

Sendo $B_{3\times 3}=(b_{ij})$ a inversa de A, temos pela definição de inversa:

$$A\cdot B=I_3\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 5\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Em particular, para a primeira coluna da inversa, temos o sistema:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 5\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3b_{11}+b_{21}+b_{31}=1\\ 8b_{11}+3b_{21}+5b_{31}=0\\ -5b_{11}-3b_{21}-2b_{31}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_{11}=1\\ b_{21}=-1\\ b_{31}=-1\end{cases}$$

Assim, a soma dos elementos da primeira coluna da matriz $B=A^{-1}$ será igual a:

$$b_{11}+b_{21}+b_{31}=1+(-1)+(-1)\Leftrightarrow\boxed{b_{11}+b_{21}+b_{31}=-1}$$

QUESTÃO 25

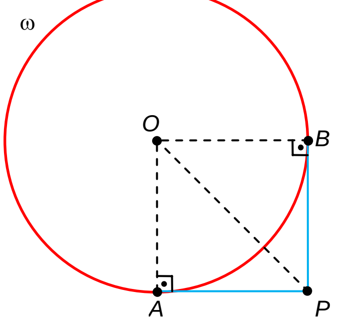
Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\widehat{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Resolução

Seja O o centro da circunferência ω. O desenho correspondente à situação descrita no plano é:

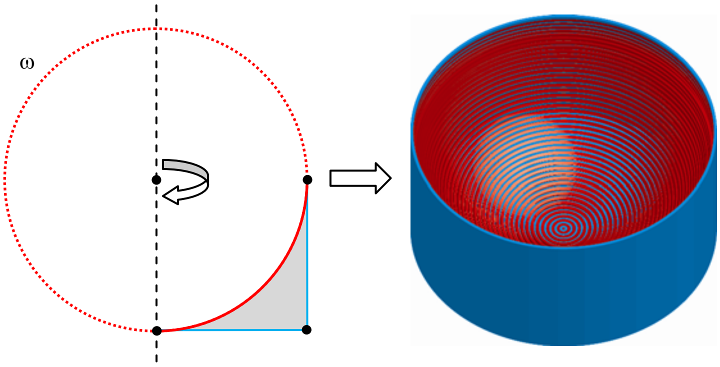


Observe que sendo $OA = OB = 2$ (raios) e $OP = 2\sqrt{2}$, segue que:

$$\begin{cases} AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2} = 2 \\ BP = \sqrt{OP^2 - OB^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2} = 2 \end{cases},$$

ou seja, os triângulos retângulos OAP e OPB são isósceles, de modo que os ângulos $O\hat{P}A$ e $O\hat{P}B$ medem 45° cada um. Por conseguinte, o ângulo $A\hat{P}B$ mede 90°, e o quadrilátero $OAPB$ é um quadrado.

Queremos construir um sólido de rotação ao girar a região hachurada em torno da reta $\overline{OA}$ (reta vertical tracejada):



a) A área total desse sólido de revolução pode ser obtida somando-se as seguintes áreas:

(I) Área lateral de um cilindro circular reto de raio $R = 2$ cm e altura $H = 2$ cm, por fora;

(II) Área de um círculo de raio $R = 2$ cm, na base.

(III) Metade da área de uma superfície esférica de raio $R = 2$ cm (por dentro).

Assim:

$$S = 2\cdot\pi\cdot R\cdot H + \pi\cdot R^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot R^2$$

$$S = 2\cdot\pi\cdot 2\cdot 2 + \pi\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot 2^2 \Leftrightarrow \boxed{S = 20\pi \text{ cm}^2}$$

b) O volume desse sólido pode ser calculado pela diferença entre o volume de um cilindro circular reto (de raio $R = 2$ cm e altura $H = 2$ cm) e o volume de um hemisfério (metade de uma esfera) de raio $R = 2$ cm. Assim:

$$V = \pi\cdot R^2\cdot H - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \pi\cdot 2^2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3 \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{8\pi}{3}\text{ cm}^3}$$

QUESTÃO 26

As interseções das retas $r: x - 3y + 3 = 0$, $s: x + 2y - 7 = 0$ e $t: x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

Resolução

Sejam $r \cap s = A$, $r \cap t = B$ e $s \cap t = C$. Calculando as coordenadas de cada ponto temos:

$$r \cap s: \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (3,2)}$$

$$r \cap t: \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (0,1)}$$

$$s \cap t: \begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = (7,0)}$$

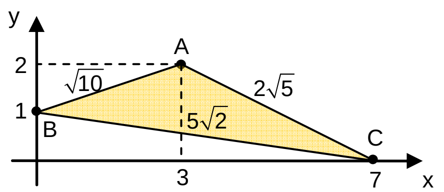
Além disso, calculando as distâncias entres estes pontos temos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{A,C} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{B,C} = \sqrt{(7-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

e a área de ABC é $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|10| = 5$.



a) Calculando a área total do prisma temos

$$S_{TOTAL} = 2\cdot S_{ABC} + A_{lateral} = 2\cdot S_{ABC} + \left(2\cdot AB + 2\cdot BC + 2\cdot AC\right)$$

$$S_{TOTAL} = 2\cdot 5 + 2\sqrt{10} + 2\cdot 2\sqrt{5} + 2\cdot 5\sqrt{2}$$

$$\boxed{S_{TOTAL} = 10 + 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}}$$

b) Calculando o volume, temos:

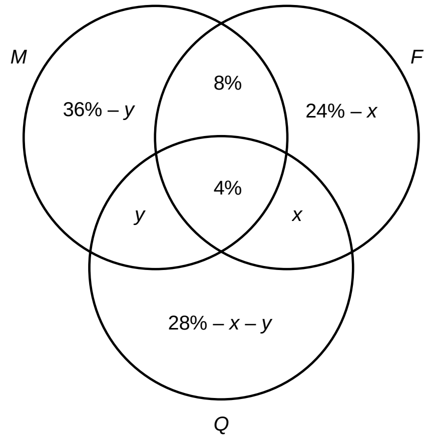
$$V = S_{ABC}\cdot h = 5\cdot 2 \Rightarrow \boxed{V = 10}$$

QUESTÃO 27

Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Resolução

Representando, respectivamente, por M, F e Q os conjuntos dos estudantes de Matemática, Física e Química, podemos montar o seguinte diagrama de Euler-Venn:



Aplicando o princípio da inclusão-exclusão:

$$n(M \cup F \cup Q) =$$
$$= n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) - n(M \cap Q) - n(Q \cap F) + n(M \cap F \cap Q)$$
$$\Leftrightarrow 100\% = 48\% + 36\% + 32\% - (8\% + 4\%) - (x + 4\%) - (y + 4\%) + 4\%$$
$$\Leftrightarrow x + y + 100\% = 100\% \Leftrightarrow x + y = 0\%$$

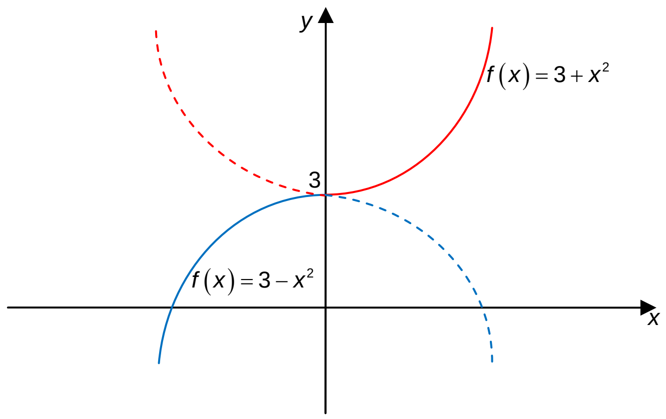
Pelo enunciado temos que *x* + *y* representa um total de 63 alunos, de modo que *x* + *y* não pode valer 0%, ou seja, temos uma contradição no enunciado.
Dessa forma, é impossível calcular o valor de *n*.

QUESTÃO 28

Analise se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3+x^2, & x\ge 0\\ 3-x^2, & x<0\end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Resolução

Não é difícil verificar que *f* é bijetora pelo seu gráfico:



Esta curva é composta pelos ramos direito da parábola $3+x^2$ (para $x\ge 0$) e esquerdo da parábola $3-x^2$ (para $x<0$).
É fácil ver que essa função tem sua imagem igual a $\mathbb{R}$, e por isso é sobrejetora.
Além disso, se tomarmos um valor *k* qualquer do contradomínio, pode-se ver que existe apenas um elemento *x* do domínio tal que $f(x)=k$ (não há nenhuma linha horizontal que corta a curva em mais de um ponto); desta forma a função *f* é também injetora.

Como *f* é sobrejetora e injetora, ela é bijetora. Vamos então encontrar sua inversa, f^{-1}.

Tomando inicialmente um valor qualquer $y\ge 3$ temos:

$$3+x^2=y \Rightarrow x=\sqrt{y-3}\text{ , lembrando que } x\ge 0$$

Tomando agora um valor qualquer $y<3$:

$$3-x^2=y \Rightarrow x=-\sqrt{3-y}\text{ , lembrando que } x<0$$

Podemos então escrever nossa $f^{-1}(x)$:

$$\boxed{f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\ge 3\\ -\sqrt{3-x}, & x<3\end{cases}}$$

QUESTÃO 29

Determine os valores de $\theta\in[0,2\pi]$ tais que $\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)}\ge 0$.

Resolução

Podemos reescrever a inequação do enunciado para comparer dois logs de mesma base:

$$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \ge \log_{\text{tg}(\theta)} 1$$

Antes de começar a resolver a inequação, vamos impor as condições de existência do logaritmo presente:

- $e^{\text{sen}(\theta)}>0$ é sempre verdadeiro (função exponencial);
- $\text{tg}(\theta)>0$ e $\text{tg}(\theta)\ne 1$: iremos considerar estas condições ao longo da resolução.

Agora vamos resolver separando em dois casos:

1. Caso em que $\text{tg}(\theta)>1$:

Como $\text{tg}(\theta)>1$ temos que $\theta\in\left]\pi/4,\pi/2\right[\cup\left]5\pi/4,3\pi/2\right[$.

Além disso, como a base do logaritmo é maior que 1, os logaritmos são funções crescentes e podemos comparar os logaritmandos sem trocar o sinal da desigualdade:

$$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \ge \log_{\text{tg}(\theta)} 1 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(\theta)}\ge 1 \Rightarrow \text{sen}(\theta)\ge 0 \Rightarrow 0\le\theta\le\pi$$

Levando em consideração a interseção com as condições anteriores, temos que

$$\pi/4<\theta<\pi/2 \quad \textbf{(1)}$$

2. Caso em que $0<\text{tg}(\theta)<1$:

Como $0<\text{tg}(\theta)<1$ temos que $\theta\in\left]0,\pi/4\right[\cup\left]\pi,5\pi/4\right[$.

Além disso, como a base do logaritmo é menor que 1, o logaritmo é função decrescente e devemos trocar o sinal da desigualdade na comparação entre os logaritmandos:

$$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \ge \log_{\text{tg}(\theta)} 1 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(\theta)}\le 1 \Rightarrow \text{sen}(\theta)\le 0 \Rightarrow \pi\le\theta\le 2\pi$$

Levando em consideração a interseção com as condições anteriores, temos que

$$\pi<\theta<5\pi/4 \quad \textbf{(2)}$$

Tomando então a união entre **(1)** e **(2)** temos o conjunto de valores possíveis para $\theta\in[0,2\pi]$:

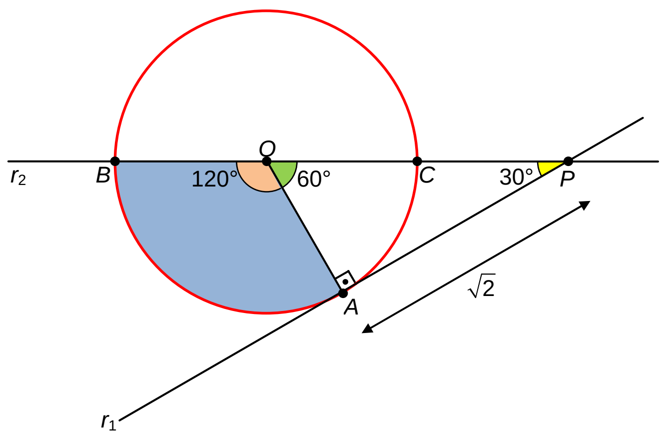
$$\pi/4<\theta<\pi/2 \text{ ou } \pi<\theta<5\pi/4$$

QUESTÃO 30

As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto *P*, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto *A* e a reta r_2 intercepta ω nos pontos *B* e *C* diametralmente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60º e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Resolução

De acordo com o enunciado, podemos montar a seguinte figura:



No triângulo ΔAPO, temos:

$$\text{tg}30^o=\frac{PA}{OA}\Leftrightarrow\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{6}}{3}\text{ cm}$$

Assim, a área *A* pedida, que corresponde a $\frac{120°}{360°}=\frac{1}{3}$ da área do círculo de centro *O* e raio *R*, é igual a:

$$A=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\Leftrightarrow\boxed{A=\frac{2\pi}{9}\text{ cm}^2}$$

Equipe desta resolução

Matemática

Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Felipe Mascagna Bittencourt Lima
Rafael da Gama Cavallari
Rodrigo do Carmo Silva
Vagner Figueira de Faria

Revisão

Edson Vilela Gadbem
Fabiano Gonçalves Lopes
Frederico Luís Oliveira Vilela
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani

Digitação, Diagramação e Publicação

Rafaela Cristina de Campos
Rebeca Higino Silva Santos