

ENUNCIADOS – ITA 2008**TESTES**

01. Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

- a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{5}{4}$

02. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a:

- a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

03. Considere o sistema $Ax = b$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Seja T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e seja S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T - S é:

- a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

04. Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-3} + C^{-1})$, então o determinante de B é igual a

- a) 3^n b) $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5 \cdot 3^{n-1}$

05. Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de um menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 63, então o de maior grau tem grau igual a:

- a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

06. Um diedro mede 120° . A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a:

- a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

07. Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado \overline{AB} e N um ponto sobre o lado \overline{AD} , equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado \overline{AD} e por N uma reta s paralela ao lado \overline{AB} , que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a intersecção de s com o lado \overline{BC} e Q é a intersecção de r com o lado \overline{DC} . Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

- a) $15 + 5\sqrt{5}$ b) $10 + 5\sqrt{5}$ c) $10 - \sqrt{5}$ d) $15 - 5\sqrt{5}$ e) $10 - 3\sqrt{5}$

08. Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a:

- a) -25 b) -27 c) -36 d) -39 e) -40

09. Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $\frac{1}{2} - i/2$ também é sua raiz. Então, o Máximo de a, b, c é igual a:

- a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10. É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$$

Com a, b, c reais, sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a:

- a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

ENUNCIADOS – ITA 2008

11. Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcosseno, assinale o valor de:

$$\cos\left(\arcsen\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right).$$

- a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

12. Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular a λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

- a) $y = \sqrt{3}(x-1)$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$
d) $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$ e) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

13. O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

- a) $[-3,3]$ e 2π b) $[-2,2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$
d) $[-1,3]$ e $\frac{\pi}{3}$ e) $[-1,3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

14. Para $X \in \mathbb{R}$, o conjunto solução $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é:

- a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$ b) $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$
c) $\left\{0, \frac{1}{2} \log_2 2, \frac{1}{2} \log_2 3, \log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ d) $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$
e) A única solução é $x = 0$.

15. Um subconjunto D de \mathbb{R} tal que a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

- a) \mathbb{R} b) $(-\infty, 1]$ c) $[0, 1/2]$ d) $(0, 1)$ e) $[1/2, \infty)$

16. A soma de todas as soluções distintas da equação $\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0$,

que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a:

- a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$ c) $\frac{9}{6}\pi$ d) $\frac{7}{6}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

17. Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjunto de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

- a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$ d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

18. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, \widehat{BAC} , mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\widehat{ACE} = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $\widehat{DBC} = 35^\circ$. Então, o ângulo \widehat{EDC} vale:

- a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

19. Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de \mathbb{N} tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a:

- A) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ c) $\{1, 3, 7, 8\}$
d) $\{1, 3\}$ e) $\{7, 8\}$

ENUNCIADOS – ITA 2008

20. Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r . As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm , do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s , são iguais a:

a) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

b) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

DISSERTATIVAS

21. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

22. Determine as raízes em \mathbb{C} de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z+2| < 3\}.$$

23. Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

24. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$$

Encontre todos os valores de α, β, γ de modo que $x=0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

25. Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

26. Determine todos os valores $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[3]{4}x^2 + \text{tg}\alpha = 0$$

admita raízes reais simples.

27. Em um espaço amostral com uma probabilidade P , são dados os eventos A, B e C tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^c)$.

28. Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que \overline{AB} mede $2\sqrt{5}$ e \overline{BC} mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC .

29. Seja C uma circunferência de raio r e centro O e \overline{AB} um diâmetro de C . Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C . Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A . Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco \widehat{AE} e pelos segmentos \overline{AF} e \overline{EF} em torno do diâmetro \overline{AB} .

30. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2,5)$, $(-1,2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2,5)$.