ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve Aprova

IME 2006
MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br (19) 3251-1012

QUESTÃO 1

Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de n, os valores de r e s que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

RESOLUÇÃO

Sabemos que $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$
Se a seqüência é uma PA, temos, fazendo q = razão da PA:
$q = a_{n+1} - a_n = (r - s) + (r + s)i - r - si = - s + ri$
Pela fórmula do termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1)\,q \Rightarrow r + si = (1 - i) + (n - 1).(-s + ri) =$
$= [1 - s(n-1) + i[r(n - 1) - 1]$
Dois números complexos são iguais se e somente se a parte real e a parte imaginária dos dois são iguais. Assim, pode-se montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r = 1 - s(n-1) \\ s = r(n-1) - 1 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos

$$s = [1 - s(n-1)](n-1) - 1 = (n-1) - s(n-1)^2 - 1$$
$$s + s(n-1)^2 = n-2$$
$$s[1 + (n-1)^2] = n-2$$

Assim, $s = \dfrac{n-2}{1+(n-1)^2}$

$$r = 1 - s(n-1) = 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{1+(n-1)^2} = \frac{1+(n-1)^2 - (n^2-3n+2)}{1+(n-1)^2} =$$
$$= \frac{1+n^2-2n+1-n^2+3n-2}{1+(n-1)^2} = \frac{n}{1+(n-1)^2}$$

Assim, $r = \dfrac{n}{1+(n-1)^2}$

Logo $s = \dfrac{n-2}{1+(n-1)^2}$ e $r = \dfrac{n}{1+(n-1)^2}$

QUESTÃO 2

Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3-i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

RESOLUÇÃO

O polinômio p é de grau ímpar, assim, admite pelo menos 1 raiz real r. Como os seus coeficientes são reais, sabemos que se p admite um número complexo como raiz, então também admite seu conjugado. Assim, podemos afirmar (de acordo com o enunciado) que, além de r, as outras raízes são a+bi, a-bi, c+di e c-di, com a, b, c e d inteiros não-nulos.
Sejam $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$. Sabemos que o produto de duas raízes complexas de p é igual a 3-i; assim, essas raízes não podem ser conjugadas, pois do contrário esse número seria real. Logo, podemos afirmar que $z_1.z_2 = 3-i$. Assim, temos (relações de Girard):

$$P = \frac{-30}{1} = r.z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} = r.(z_1.z_2).(\overline{z_1.z_2}) = r(3-i)(3+i) = 10.r\ .$$

Assim, temos r = -3.
Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar p em $(x+3)(x^4-6x^3+15x^2-18x+10)$. Novamente, aplicando Girard ao polinômio de grau 4, temos:

$$P' = \frac{10}{1} = (z_1.\overline{z_1}).(z_2.\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

Como a, b, c e d são inteiros não-nulos, então $|z_1|^2>1$ e $|z_2|^2>1$. Além disso, $|z_1|^2$ e $|z_2|^2$ também são inteiros e 10 é divisível por $|z_1|^2$ e $|z_2|^2$, logo $|z_1|^2 = 2$ e $|z_2|^2 = 5$.

Considere agora a soma das raízes e a soma das raízes multiplicadas 3 a 3:

$$S = \frac{6}{1} = z_1 + \overline{z_1} + z_2 + \overline{z_2} \qquad \text{(I)}$$

$$S_3 = \frac{18}{1} = z_1.\overline{z_1}.z_2 + z_1.z_2.\overline{z_2} + z_1.\overline{z_1}.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} \Rightarrow \qquad \text{(II)}$$
$$\Rightarrow 2.z_2 + 5.z_1 + 2.\overline{z_2} + 5.\overline{z_1} = 2(z_2 + \overline{z_2}) + 5(z_1 + \overline{z_1}) = 18$$

A soma de qualquer complexo com o seu conjugado é igual ao dobro de sua parte real, assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} z_1 + \overline{z_1} = 2.a \\ z_2 + \overline{z_2} = 2.c \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I) e (II), vem $\begin{cases} 2a + 2c = 6 \\ 10a + 4c = 18 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, encontramos a = 1 e c = 2. Substituindo na fórmula dos módulos, temos:

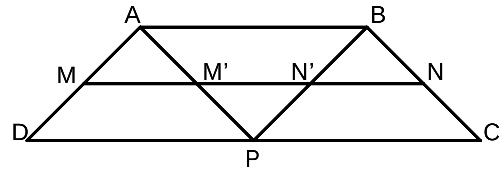
$$|z_1|^2 = 2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \pm 1$$
$$|z_2|^2 = 5 = c^2 + d^2 \Rightarrow d = \pm 1$$

Assim, temos (1+i), (1-i), (2+i) e (2-i) como soluções complexas de p(x).

QUESTÃO 3

Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM'N'N. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio M'N'CD em função da área de ABCD.

RESOLUÇÃO



Como M'N' é a base média do ΔABC

Logo: MN' = $\dfrac{AB}{2}$

Temos que MM' = M'N' = M'N' = N'M = $\dfrac{AB}{2}$

Como MM' é a base média do Δ ADP.

Logo: PC = 2NN'= 2 . $\dfrac{AB}{2}$ = AB

DC = DP + PC
DC = AB + AB
DC = 2 AB

Área do trapézio ABCD

$S_{ABCD} = (AB + DC) \cdot \dfrac{h}{2} = (AB + 2\,AB) \cdot \dfrac{h}{2} = 3\,AB \cdot \dfrac{h}{2}$

Área do trapézio M'N'CD

$S_{M'N'CD} = \dfrac{(M'N'+DC)}{2} \bullet \dfrac{h}{2} = \left(\dfrac{AB}{2} + 2\,AB\right) \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{5\,AB}{8}\,h$

Assim temos que:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'CD}} = \frac{3\dfrac{AB}{2}h}{\dfrac{5AB}{8}h} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'CD}} = \frac{3\ AB\ h}{2} \bullet \frac{8}{5AB\ h}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'CD}} = \frac{12}{5} \Rightarrow S_{M'N'CD} = \frac{5}{12}\,S_{ABCD}$$

QUESTÃO 4

Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Determine D_n em função de n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

RESOLUÇÃO

Para n = 1, temos $A_1 = [2]$ e $\det(A_1) = 2$. Para n = 2, temos $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 3$. Para n = 3, temos $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 4$. Nota-se, portanto, que, para n=1, n=2 e n=3 vale a Lei: $D_n = \det(A_n) = n + 1$. Considerando o princípio da indução finita, suponha que a tese é válida até n = k (D_n = n+1, n = 1, 2, ..., k). Assim, para k+1, temos:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Utilizando o teorema de Laplace para o cálculo de D_{k+1}, aplicado na primeira linha, vem:

$$D_{k+1} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

O primeiro determinante acima é igual a D_k. O segundo pode ser determinado por Laplace, utilizando a primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (-1).D_{k-1}$$

Assim, temos:

$$D_{k+1} = 2.D_k + (-1).D_{k-1} = 2(k+1) - k = k + 2$$

Logo, temos D_{k+1}= = (k+1)+1, o que confirma nossa tese de indução. Assim, temos D_n= n + 1.

QUESTÃO 5

Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$C_{r+y}^{r} = \log_y x$$
$$\log_y z = 4 + \log_x z$$
$$C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z$$

onde C_m^p representa a combinação de m elementos tomados p a p e $\log_c B$ representa o logaritmo de B na base c.

RESOLUÇÃO

Do sistema, temos:

$$\begin{cases} \log_y x = \begin{pmatrix} r+y \\ r \end{pmatrix} \\ \log_y z - \log_x z = 4 \\ \log_x z + 1 = \begin{pmatrix} r+y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+y \\ y \end{pmatrix} = \log_y x \end{cases}$$

Notar que $\begin{pmatrix} r+y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+y \\ y \end{pmatrix} = \frac{(r+y)!}{r!y!}$

Usando as equações (II) e (III):

$$\begin{cases} \log_y z - \log_x z = 4 \\ \log_x z - \log_y x = -1 \end{cases} \Rightarrow \log_y z - \log_y x = \log_y\left(\frac{z}{x}\right) = 3 \Rightarrow \frac{z}{x} = y^3$$

Substituindo em (II), temos:

$$\log_y xy^3 - \log_x xy^3 = 4 \Rightarrow (\log_y x + 3) - (1 + 3\log_x y) = 4$$

Aplicando mudança de base, temos:

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y} = a \Rightarrow a + 3 - \left(1 + \frac{3}{a}\right) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

O valor a=-1 não satisfaz a equação (I), assim, temos a=3. Logo:

$$\log_y x = 3 \Rightarrow x = y^3 \Rightarrow z = y^6$$

Pela equação (I): $\begin{pmatrix} r+y \\ r \end{pmatrix} = 3$

Considerando o triângulo de Pascal, podemos notar que o número 3 aparece apenas em $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Assim

$$\begin{cases} r = 1 \ e \ y = 2 \\ r = 2 \ e \ y = 1 \end{cases}$$

O valor y = 1 não é conveniente, uma vez que y é base de um logaritmo. Assim, temos x = 8, y = 2 e z = 64.

QUESTÃO 6

Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(senx + \cos x)(sen^2 x - senx\cos x + \cos^2 x) = 1$$

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

RESOLUÇÃO

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$(sen^2x + 2senxcosx + cos^2x)\left(1 - \frac{sen2x}{2}\right)^2$ =1

$(1 + sen2x)\left(1 - \frac{sen2x}{2}\right)^2$ =1. Fazendo y = sen2x, vem:

$(1 + y)\left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow (1 + y)(2 - y)^2 = 4$

$\Rightarrow y^3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow$ y=0 ou y=3 (não convém).

y=0 $\Rightarrow$ sen2x = 0 $\Rightarrow$ 2x = kπ, k ∈ Z

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, k ∈ Z

Como x pertence a um triângulo, então 0< x < π, logo x = $\frac{\pi}{2}$. Sejam, y e z os outros dois ângulos do triângulo, então

x + y + z = π. Fazendo:

y = x + r e z = x + 2r, onde r é a razão da PA, vem:

x + (x + r) + (x + 2r) = π

$$\frac{3\pi}{2} + 3r = \pi \Rightarrow r = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, os ângulos são: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$

QUESTÃO 7

Considere os pontos A(–1,0) e B(2,0) e seja C uma circunferência de raio *R* tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar *R* no intervalo (0,∞).

RESOLUÇÃO

A reta $\mathbf{r_1}$ é tangente a C e passa por (-1;0), enquanto $\mathbf{r_2}$ é tangente a C e passa por (2;0). Assim, podemos escrever, a partir de

$$(r_1): y = m(x+1) \Rightarrow mx - y + m = 0$$
$$(r_2): y = n(x-2) \Rightarrow nx - y - 2n = 0$$

onde m e n são, respectivamente, os coeficientes angulares de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$. Como C é tangente ao eixo das abscissas na origem, então seu centro é (0; ±R). Assim, podemos calcular R como a distância entre o centro de C e cada uma das retas. Logo:

$$R = \frac{|m \mp R|}{\sqrt{m^2+1}} \qquad \text{(distância entre o centro e } \mathbf{r_1}\text{)}$$
$$R = \frac{|-2n \mp R|}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \text{(distância entre o centro e } \mathbf{r_2}\text{)}$$

Assim:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{|m \mp R|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 = R^2 \\ \left(\dfrac{|2n \pm R|}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2(1-R^2) = \pm 2Rm \\ n^2(4-R^2) = \mp 4nR \end{cases}$$

Como as retas não passam pela origem, temos m≠0 e n≠0, logo:

$$m = \frac{\pm 2R}{1-R^2} \quad e \quad n = \frac{\mp 4R}{4-R^2}.$$

Daí, segue que, para R≠1 e R≠2, as equações de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ ficam:

$$\begin{aligned} (r_1): y &= \frac{\pm 2R}{1-R^2}(x+1) \\ (r_2): y &= \frac{\mp 4R}{4-R^2}(x-2) \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Daí segue que, na intersecção:

$$\frac{\pm 2R}{1-R^2}(x+1) = \frac{\mp 4R}{4-R^2}(x-2)$$

Resolvendo, temos $x = \dfrac{R^2}{R^2-2}$ e $y = \mp\dfrac{4R}{R^2-2}$ (II)

Fazendo x/y, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{R^2}{\mp 4R} \Rightarrow R = \frac{\mp 4x}{y} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II) vem: $y = \mp\dfrac{4.\left(\mp 4x/y\right)}{\left(\mp 4x/y\right)^2 - 2} = \dfrac{4.\left(4x/y\right)}{\left(4x/y\right)^2 - 2}$

Daí, temos $16x^2 - 16x - 2y^2 = 0$. Completando quadrados, encontramos $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, que é uma hipérbole, para todo R > 0, R≠1 e R≠2.

Como R>0, temos que quando R tende a 0 o valor de x é máximo e tende a 0^-. Assim, deve-se considerar apenas um ramo da hipérbole, com x<0.

Para R=1, temos $\mathbf{r_1}$: x = -1 e r_2 dada por (I). Logo, substituindo em

$$(r_2): y = \frac{\pm 12R}{4-R^2} = \frac{\pm 12}{3} = \pm 4$$

Substituindo na equação da hipérbole, temos que este ponto também está incluído na solução.

Para R=2, temos $\mathbf{r_2}$: x = 2 e r_1 dada por (I). Logo, substituindo em

$$(r_1): y = \frac{\pm 2R}{1-R^2}(x+1) = \mp 4$$

Substituindo na equação da hipérbole, temos que este ponto também está incluído na solução, mas não no ramo considerado.

Portanto, o lugar geométrico dos pontos pedidos é:

$$S = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \quad e \quad x < 0 \right\},$$

QUESTÃO 8

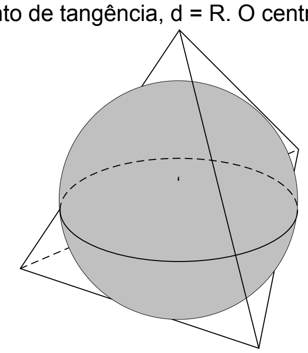
Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento *a* e uma esfera de raio *R* tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de *a*, calcule:

a) o volume total da esfera;

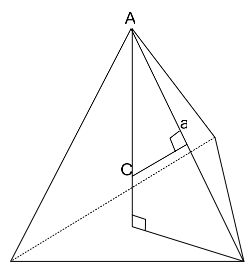
b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

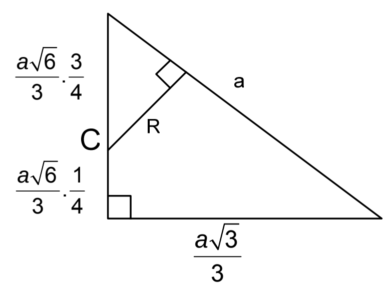
RESOLUÇÃO

a) Como a esfera é tangente às arestas, seja d a distância entre o centro do tetraedro e o ponto de tangência, d = R. O centro do tetradro



A distância do centro do tetraedro até a face é igual a h/4. Assim pode-se formar o seguinte triângulo.





Por semelhança, temos $\dfrac{R}{\dfrac{a\sqrt6}{4}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt3}{3}}{a} \Rightarrow R = a\dfrac{\sqrt2}{4}$

Logo $V_e = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt2}{24}$

b) Sabendo que o volume interior da esfera é $V_i = V_e - 4\,V'$, onde V' é o volume da calota esférica, e que $V' = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, temos

$$h = \frac{a\sqrt2}{4} - \frac{a\sqrt6}{12} = \frac{3a\sqrt2 - a\sqrt6}{12}$$

$$h^2 = \frac{24a^2 - 12a^2\sqrt3}{144} = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt3}{12}$$

$$V' = \pi \; h^2.\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

$$V' = \pi\left(\frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt3}{12}\right).\left(\frac{a\sqrt2}{4} - \frac{3a\sqrt2 - a\sqrt6}{36}\right)$$

$$V' = \pi\left(\frac{a^2}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right)\cdot\left(\frac{9a\sqrt{2}-3a\sqrt{2}+a\sqrt{6}}{36}\right)$$

$$V' = \pi\left(\frac{2-\sqrt{3}}{12}\right)a^2.\left(\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{6}}{36}\right)a$$

$$V' = \frac{\pi.a^3}{432}\left(12\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)$$

$$V' = \frac{\pi.a^3}{432}\left(9\sqrt{2}-4\sqrt{6}\right)$$

$$V' = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{432}\left(9-4\sqrt{3}\right)$$

$$Vi = V - 4V'$$

$$Vi = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{24}-4\pi.a^3\frac{(9-4\sqrt{3})\sqrt{2}}{432}$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left[\frac{1}{2}-\frac{(9-4\sqrt{3})}{9}\right]$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left(\frac{9-18+8\sqrt{3}}{18}\right)$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left(\frac{8\sqrt{3}-9}{18}\right)$$

$$Vi = a^3\sqrt{2}\pi\left(\frac{8\sqrt{3}-9}{216}\right)$$

QUESTÃO 9

Determine o conjunto solução S={(x, y) | x ^ y ∈ N} da equação

$$(x + y)K = xy$$

sabendo que *k* é um número primo.

RESOLUÇÃO

x K + y K = x y
x y - x K - y K + K^2 = K^2
x(y - K) - K (y - K) = K^2
(y - K) (x - K) = K^2

Como K é primo, K^2 só admite 1, -1, K, -K, K^2, $-K^2$ como divisores inteiros. Assim:

1ª)

$$\begin{cases} y - K = -K^2 \\ x - K = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = k - K^2 \\ x = -1 + K \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - k = K^2 \\ x - K = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K^2 + K \\ x = K + 1 \end{matrix}$$

2ª)

$$\begin{cases} y - k = -1 \\ x - K = -K^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K - 1 \\ x = K - K^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - K = 1 \\ x - K = K^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = k + 1 \\ x = K^2 + K \end{matrix}$$

3ª)

$$\begin{matrix} \begin{cases} y - K = K \\ x - K = K \end{cases} \\ \begin{cases} y - K = -K \\ x - K = -K \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = 2K \\ x = 2K \\ x = y = 0 \end{matrix}$$

QUESTÃO 10

Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+3}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de *n*, sabendo que [*r*] representa o maior inteiro menor ou igual ao número *r*.
Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1+cis\frac{2\pi}{3}\right)^n$

RESOLUÇÃO

Vamos definir $S_2 = C_n^2 + C_n^5 + \ldots + C_n^{3\left(\frac{n-2}{3}\right)}$. Assim, temos que $S_1+S_2+S_3 = 2^n$. Desenvolvendo o binômio, temos:

$$\left(1+cis\frac{2\pi}{3}\right)^n = C_n^0 + C_n^1.cis\frac{2\pi}{3} + C_n^2.cis\frac{4\pi}{3} + \ldots + C_n^n.cis\frac{2n\pi}{3}$$

Porém:

$$cis\,0 = cis\frac{6\pi}{3} = cis\frac{12\pi}{3} = \ldots = 1$$

$$cis\frac{2\pi}{3} = cis\frac{8\pi}{3} = cis\frac{14\pi}{3} = \ldots$$

$$cis\frac{4\pi}{3} = cis\frac{10\pi}{3} = cis\frac{16\pi}{3} = \ldots$$

Assim, temos:

$$\left(1+cis\frac{2\pi}{3}\right)^n = S_0 + S_1.cis\frac{2\pi}{3} + S_2.cis\frac{4\pi}{3} = cis\frac{n\pi}{3}$$

Logo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \\ S_0 + S_1\cos\frac{2\pi}{3} + S_2\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{n\pi}{3} \\ S_1 sen\frac{2\pi}{3} + S_2\, sen\frac{4\pi}{3} = sen\frac{n\pi}{3} \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n & (I) \\ S_0 - \frac{S_1}{2} = \cos\frac{n\pi}{3} & (II) \\ \frac{S_1\sqrt{3}}{2} - \frac{S_2\sqrt{3}}{2} = sen\frac{n\pi}{3} & (III) \end{cases}$$

De (III) temos: $S_2 = S_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}$ (IV)

Fazendo (I) - (II) $\Rightarrow \frac{3\,S_1}{2} + \frac{3\,S_2}{2} = 2^n - \cos\frac{n\pi}{3}$ (V)

Substituindo (IV) em (V) temos:

$$\frac{3\,S_1}{2} + \frac{3}{2}\left(S_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\right) = 3\,S_1 - \frac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,n\pi = 2^n - \cos\frac{n\pi}{3}$$

$$S_1 = \left(2^n\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\text{sen}\,n\pi\right)\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}$$

Substituindo o resultado em (IV) temos:

$$S_2 = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}$$

Substituindo ambos em (I) temos:

$$S_0 = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$