

FEZ

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
c a m p i n a s

**Aprovou!**

Elite Resolve

**IME 2012**

**MATEMÁTICA**  
**Discursivas**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**

os melhores **gabaritos** da internet

**MATEMÁTICA**

**QUESTÃO 01**

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão  $r$ , formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão  $q$ , com  $q$  e  $r \in \mathbb{N}^*$  (natural diferente de zero). Determine:

- a) o menor valor possível para a razão  $r$ ;  
b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

**Resolução**

a) Sendo  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  a progressão aritmética, sabe-se que os termos  $a_2$ ,  $a_7$  e  $a_{27}$  formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Assim:

$$a_7^2 = a_2 \cdot a_{27} \Leftrightarrow (a_1 + 6r)^2 = (a_1 + r) \cdot (a_1 + 26r) \Leftrightarrow$$

$$a_1^2 + 12a_1r + 36r^2 = a_1^2 + 27a_1r + 26r^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 3a_1r$$

Como  $r \neq 0$ , segue que:

$$2r^2 = 3a_1r \Leftrightarrow 2r = 3a_1$$

Como tanto  $a_1$  quanto  $r$  devem ser números inteiros, com  $r$  positivo, os menores valores que satisfazem a expressão acima são:

$$\begin{cases} r = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Assim, o menor valor possível para  $r$  é  $r = 3$ .

b) Temos que:

$$a_{18} = a_1 + 17r = 2 + 17 \cdot 3 \Leftrightarrow a_{18} = 53$$

**QUESTÃO 02**

Os números reais positivos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são raízes da equação  $x^3 - ax^2 = a^b - \frac{b}{2}x$ , sendo  $b \in \mathbb{N}$  (natural),  $a \in \mathbb{R}$  (real) e  $a \neq 1$ .

Determine, em função de  $a$  e  $b$ , o valor de  $\log_a [x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}]^b$ .

**Resolução**

Por hipótese, a equação dada pode ser escrita como  $x^3 - ax^2 + \frac{b}{2}x - a^b = 0$ .

As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{b}{2} \\ x_1 x_2 x_3 = a^b \end{cases}$$

Seja  $E$  o valor do logaritmo dado, então:

$$E = \log_a [x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}]^b \Rightarrow$$

$$E = b \cdot [\log_a x_1 x_2 x_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot \log_a (x_1 + x_2 + x_3)]$$

Precisamos obter  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

Usando a igualdade:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

e as relações de Girard acima, concluímos que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - b$ .

Portanto,

$$E = b \cdot [\log_a x_1 x_2 x_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot \log_a (x_1 + x_2 + x_3)] \Rightarrow$$

$$E = b \cdot [\log_a a^b + (a^2 - b) \cdot \log_a a] = b(b + a^2 - b) = a^2 b$$

**QUESTÃO 03**

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são  $105^\circ$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Sabendo que  $m \in \mathbb{R}$  (real), determine:

- a) as raízes da equação

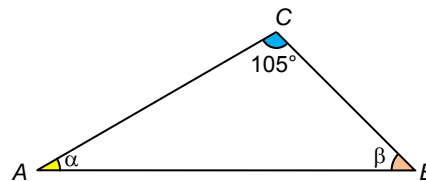
$$3 \sec x + m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x,$$

em função de  $m$ ;

- b) o valor de  $m$  para que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam raízes dessa equação.

**Resolução**

A figura a seguir representa a situação descrita:



- a) Para  $\cos x \neq 0$ , podemos trabalhar com a equação, e passo a passo, temos:

$$3 \sec x + m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = 3 \cos x - \frac{3}{\cos x} + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = \frac{3 \cdot (\cos^2 x - 1)}{\cos x} + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = \frac{-3 \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$m(\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} (\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) \Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - m \right) (\sqrt{3} \cos x - 3 \operatorname{sen} x) = 0$$

Para que a expressão acima seja verdadeira, então necessariamente

$$\operatorname{tg} x = m \text{ ou } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \arctg(m) + k \cdot 180^\circ \text{ ou } x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

- b) Para que tenhamos as raízes da equação acima como os ângulos internos do triângulo dado, um dos ângulos internos deve ser igual a  $30^\circ$ , de acordo com a resolução do item anterior (o único valor entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  que satisfaz  $x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$ ).

Fazendo, por exemplo  $\alpha = 30^\circ$ , segue que o outro ângulo deve ser:

$$\beta = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

Assim:

$$45^\circ = \arctg(m) \Leftrightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow m = 1$$

**QUESTÃO 04**

Seja o número complexo  $Z = a + bi$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  (real) e  $i = \sqrt{-1}$ .

Determine o módulo de  $Z$  sabendo que  $\begin{cases} a^3 = 3(1 + ab^2) \\ b^3 = 3(a^2 b - 1) \end{cases}$

**Resolução**

Olhando para o sistema em  $a$  e  $b$ , temos:

$$\begin{cases} a^3 = 3(1 + ab^2) \\ b^3 = 3(a^2 b - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 3 \\ b^3 - 3a^2 b = -3 \end{cases}$$

Tomando então o número complexo  $Z = a + bi$  e o elevando ao cubo temos  $Z^3 = (a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2 b - b^3)$ .

Substituindo os valores obtidos no sistema, temos que

$$(a + bi)^3 = 3 + 3i.$$

Portanto, o módulo de  $Z^3$  é  $|Z^3| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ , e, finalmente:

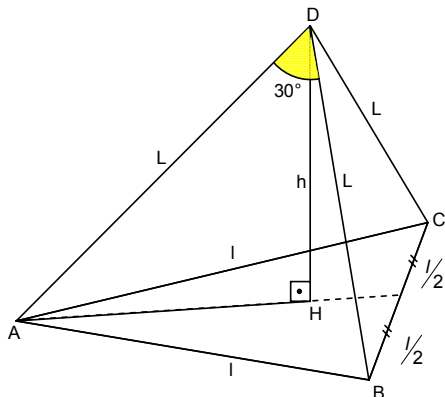
$$|Z|^3 = \sqrt{18} \Leftrightarrow |Z| = \sqrt[3]{18}$$

**QUESTÃO 05**

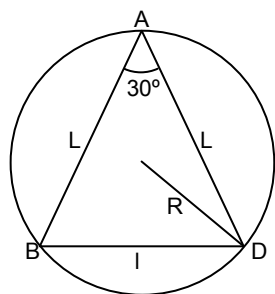
Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume  $V$ . Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de  $V$ , sabendo que o ângulo do vértice vale  $30^\circ$ .

**Resolução**

Seja a pirâmide ABCD abaixo, como especificado no enunciado:



Seja a face formada pelo  $\triangle ABD$  na figura anterior e R o raio da circunferência circunscrita solicitado:



Pelo Teorema dos Senos, temos:

$$\frac{I}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow 2I = 2R \Rightarrow \boxed{I = R} \quad (1)$$

Da primeira figura e da equação (1), temos que

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{I^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h \Rightarrow \boxed{h = \frac{12V}{R^2 \sqrt{3}}}$$

Além disso, pelo teorema dos cossenos no triângulo ABD:

$$I^2 = L^2 + L^2 - 2 \cdot L \cdot L \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow R^2 = 2L^2 - 2L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R^2 = L^2(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{R^2}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{L^2 = R^2(2 + \sqrt{3})}$$

Agora, sabendo que  $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{I\sqrt{3}}{2} = \frac{I\sqrt{3}}{3}$ , temos, no triângulo ADH, que

$$AH^2 + HD^2 = AD^2 \Rightarrow \left(\frac{I\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{3} + \frac{144 \cdot V^2}{3 \cdot R^4} = R^2(2 + \sqrt{3})$$

Multiplicando os dois lados por  $3 \cdot R^4$ :

$$R^6 + 144 \cdot V^2 = 3R^6(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^6 \cdot (3\sqrt{3} + 5) = 144 \cdot V^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^6 = \frac{144 \cdot V^2}{(3\sqrt{3} + 5)} = \frac{144 \cdot V^2 \cdot (3\sqrt{3} - 5)}{2} = 72 \cdot V^2 \cdot (3\sqrt{3} - 5) \Rightarrow$$

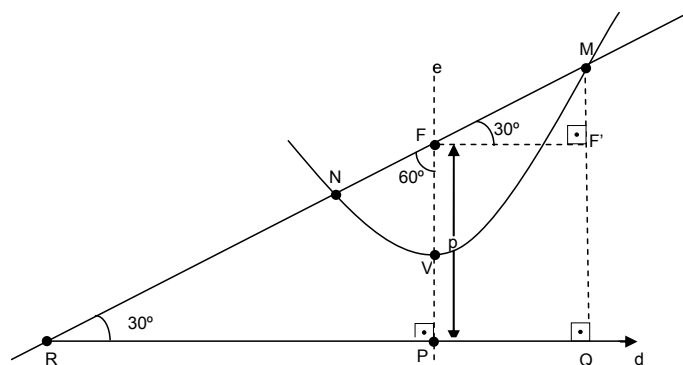
$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[6]{72 \cdot V^2 \cdot (3\sqrt{3} - 5)}}$$

**QUESTÃO 06**

É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de  $60^\circ$  em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

**Resolução**

Por hipótese, podemos montar a seguinte figura:



Definindo o parâmetro da parábola como sendo a distância entre o Foco (F) e a reta diretriz d, temos três triângulos retângulos:  $\triangle MFF'$ ,  $\triangle MQR$  e  $\triangle FRP$ .

Por trigonometria no triângulo  $\triangle FRP$ , temos:

$$\sin 30^\circ = \frac{p}{FR} \Leftrightarrow FR = 2p \text{ e por Pitágoras, } PR = \sqrt{3}p$$

Como o quadrilátero PQF'F é um retângulo,  $FP = F'Q = p$ .

Da definição da parábola,  $MQ = FM$  (a distância de um ponto qualquer da parábola ao foco é igual à distância deste mesmo ponto à reta diretriz).

Chamando  $FM = x$ , temos que  $MQ = MF + QF = x \Leftrightarrow MF = x - p$ .

No  $\triangle MFF'$ , temos:

$$1. \sin 30^\circ = \frac{MF'}{MF} = \frac{x - p}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2p, \text{ logo } MQ = 2p.$$

$$2. \text{ Por pitágoras, } FF' = \sqrt{3}p, \text{ logo } PQ = \sqrt{3}p.$$

Portanto, o perímetro do triângulo MQR é:

$$MQ + MR + QR = 2p + 4p + 2\sqrt{3}p = 2(3 + \sqrt{3})p$$

**QUESTÃO 07**

Sejam r e s  $\in \mathbb{Z}$  (inteiro). Prove que  $(2r + 3s)$  é múltiplo de 17 se e somente se  $(9r + 5s)$  é múltiplo de 17.

**Resolução**

Por hipótese, temos que  $17 | 17r + 17s, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ .

**Provando a ida:**

Se  $17 | 2r + 3s$  então  $17 | 4 \cdot (2r + 3s)$ , ou seja,  $17 | 8r + 12s$ .

Como 17 divide  $17r + 17s$  e divide  $8r + 12s$ , então 17 divide a subtração deles. Logo, 17 divide  $17r + 17s - (8r + 12s) = 9r + 5s$ .

**Provando a volta:**

Se 17 divide  $17r + 17s$  e divide  $9r + 5s$ , então 17 divide a subtração deles.

Assim, 17 divide  $17r + 17s - (9r + 5s) = 8r + 12s$ .

Portanto, temos:  $17 | 8r + 12s \Rightarrow 17 | 4(2r + 3s)$ .

Como 17 é um número primo, e divide um produto, então 17 divide algum fator desse produto (podendo ser os dois fatores). Como 17 não divide 4, então 17 divide  $2r + 3s$ , o que prova a volta.

Assim fica demonstrado que  $17 | 2r + 3s \Leftrightarrow 17 | 9r + 5s, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ .

**QUESTÃO 08**

Calcule as raízes de  $f(x)$  em função de a, b e c, sendo a, b, c e  $x \in \mathbb{R}$  (real) e

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

**Resolução**

Pelo teorema de Jacobi, fazendo a primeira linha receber a soma das outras três linhas:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

Pela regra de Chió, aplicada ao elemento  $a_{11}$ :

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, somando a segunda linha na primeira:

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} x-a-b+c & x-a-b+c & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Pela regra de Chió, aplicada ao elemento  $a_{11}$ :

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot \begin{vmatrix} x-c & a-b \\ a-b & x-c \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, somando a segunda linha na primeira:

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot \begin{vmatrix} x+a-b-c & x+a-b-c \\ a-b & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot (x+a-b-c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-b & x-c \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot (x+a-b-c) \cdot (x-a+b-c)$$

Assim:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+a+b+c) \cdot (x-a-b+c) \cdot (x+a-b-c) \cdot (x-a+b-c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = -(a+b+c)} \text{ ou } \boxed{x = a+b-c} \text{ ou } \boxed{x = -a+b+c} \text{ ou } \boxed{x = a-b+c}$$

**QUESTÃO 09**

Considere uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $P(2,3)$ . A reta  $r$  intercepta a curva  $x^2 - 2xy - y^2 = 0$  nos pontos  $A$  e  $B$ . Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta  $r$ , sabendo que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$ .

**Resolução**

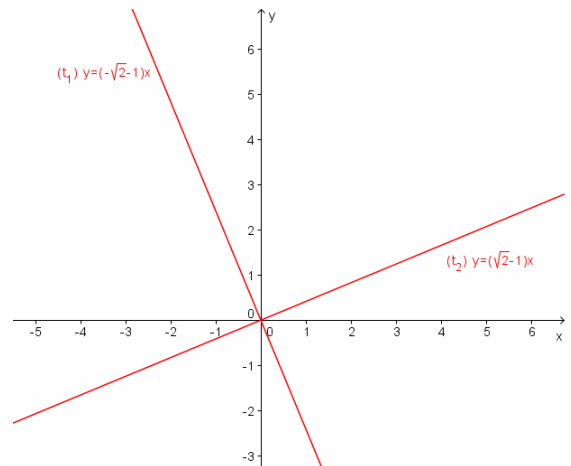
a) Podemos reescrever a cônica dada na forma  $x^2 - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = (\sqrt{2}y)^2$$

Assim, temos duas possibilidades:

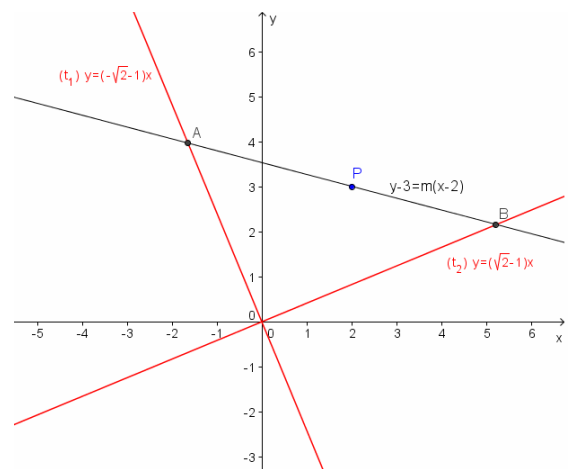
$$(x-y)^2 = (\sqrt{2}y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \sqrt{2}y \\ \text{ou} \\ x-y = -\sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1) y = (\sqrt{2}-1)x \\ \text{ou} \\ (t_2) y = (-\sqrt{2}-1)x \end{cases}$$

Logo, o lugar geométrico descrito pela curva é o conjunto formado por duas retas perpendiculares representadas no gráfico a seguir  $(t_1 \cup t_2)$ :



b) Por hipótese, as retas que passam por  $P(2,3)$  têm equações da forma:  $(r) (y-2) = m(x-3)$ .

Podemos montar o gráfico a seguir:



Assim, temos as seguintes situações:

1. Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem às retas da cônica e à reta dada, ou seja:  $A = r \cap t_2$  e  $B = r \cap t_1$ .

Resolvendo os sistemas para obter cada ponto, temos:

$$A = \left( \frac{2m-3}{m+1+\sqrt{2}}, \frac{(2m-3) \cdot (-\sqrt{2}-1)}{m+1+\sqrt{2}} \right) \text{ e } B = \left( \frac{2m-3}{m+1-\sqrt{2}}, \frac{(2m-3) \cdot (\sqrt{2}-1)}{m+1-\sqrt{2}} \right);$$

2. Calculando as distâncias  $PA$  e  $PB$ , temos:

$$PA = \sqrt{\left( \frac{2m-3}{m+1+\sqrt{2}} - 2 \right)^2 + \left( \frac{(2m-3) \cdot (-\sqrt{2}-1)}{m+1+\sqrt{2}} - 3 \right)^2} = \sqrt{\frac{(-5-2\sqrt{2})^2 + m^2(-5-2\sqrt{2})^2}{(m+1+\sqrt{2})^2}}$$

$$\Rightarrow PA = \sqrt{\frac{(m^2+1)(5+2\sqrt{2})^2}{(m+1+\sqrt{2})^2}} \Rightarrow PA = (5+2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{(m^2+1)}{(m+1+\sqrt{2})^2}}$$

$$PB = \sqrt{\left( \frac{2m-3}{m+1-\sqrt{2}} - 2 \right)^2 + \left( \frac{(2m-3) \cdot (\sqrt{2}-1)}{m+1-\sqrt{2}} - 3 \right)^2} = \sqrt{\frac{(-5+2\sqrt{2})^2 + m^2(-5+2\sqrt{2})^2}{(m+1-\sqrt{2})^2}}$$

$$\Rightarrow PB = \sqrt{\frac{(m^2+1)(5-2\sqrt{2})^2}{(m+1-\sqrt{2})^2}} \Rightarrow PB = (5-2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{(m^2+1)}{(m+1-\sqrt{2})^2}}$$

Multiplicando as distâncias, temos:

$$PA \cdot PB = (5+2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{(m^2+1)}{(m+1+\sqrt{2})^2}} \cdot (5-2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{(m^2+1)}{(m+1-\sqrt{2})^2}}$$

$$PA \cdot PB = 17 \sqrt{\frac{(m^2+1)^2}{(m^2+2m-1)^2}}$$

Como  $PA \cdot PB = 17$ , temos:

$$17 \sqrt{\frac{(1+n^2)^2}{(n^2+2m-1)^2}} = 17 \Leftrightarrow \sqrt{(n^2+2m-1)^2} = \sqrt{(1+n^2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+2m-1=1+n^2 \\ \text{ou} \\ n^2+2m-1=-1-n^2 \end{cases}$$

Portanto, as soluções das equações são:

$$\begin{cases} n^2+2m-1=1+n^2 \Leftrightarrow 2m=2 \Leftrightarrow m=1 \\ \text{ou} \\ n^2+2m-1=-1-n^2 \Leftrightarrow 2n^2+2m=0 \Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m=-1 \end{cases}$$

Substituindo os possíveis valores de  $m$  encontrados na equação  $(r) (y-2) = m(x-3)$ , obtemos as seguintes retas:

$$\begin{aligned} m=0 &\Rightarrow y=3; \\ m=1 &\Rightarrow y=x+1; \\ m=-1 &\Rightarrow y=-x+5. \end{aligned}$$

Como a equação  $(r) (y-2) = m(x-3)$  não cobre o caso da reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa por  $P$ , verifiquemos se a equação  $x=2$  atende às condições do enunciado:

$$PA = |y_P - y_A| \Rightarrow PA = |3 - (\sqrt{2}-1)(2)| \Rightarrow PA = 5 - 2\sqrt{2}.$$

$$PB = |y_P - y_B| \Rightarrow PB = |3 - (-\sqrt{2}-1)(2)| \Rightarrow PB = 5 + 2\sqrt{2}.$$

Calculando o produto  $PA \cdot PB$ , temos:

$$PA \cdot PB = (5 - 2\sqrt{2}) \cdot (5 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow PA \cdot PB = 17, \text{ portanto } x=2$$

também é uma equação possível para  $r$ . Logo, as equações possíveis para  $r$  são:

$$x=2, y=3, y=x+1 \text{ ou } y=-x+5.$$

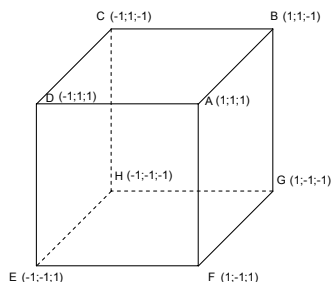
### QUESTÃO 10

Os nove elementos de uma matriz  $M$  quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou  $-1$ , com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

- o maior valor possível para o determinante de  $M$ ;
- a probabilidade de que o determinante de  $M$  tenha este valor máximo.

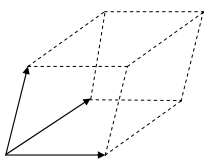
#### Resolução

a) Considere  $(x; y; z)$  uma terna ordenada cujas coordenadas valem  $-1$  ou  $1$ . Temos  $2 \times 2 \times 2 = 8$  pontos possíveis em  $\mathbb{R}^3$  que satisfazem tal condição. Observe que a representação desses pontos num sistema de coordenadas cartesianas é um cubo cujo centro é a origem.



A partir do produto vetorial misto, sabemos que se  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  e  $(x_3, y_3, z_3)$  são vetores então o módulo do determinante

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$  representa o volume do paralelepípedo determinado por tais vetores.



Com isso, segue que, escolhendo os vértices do cubo, não precisamos analisar todos os casos, uma vez que todas as possíveis rotações destes vértices em torno da origem irão produzir sólidos semelhantes, portanto com mesmo volume e, consequentemente, os módulos dos determinantes destes casos serão os mesmos.

Temos então três casos:

#### 1) Escolhem-se três vértices na mesma face.

Usando  $A, B$  e  $C$  temos  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ . Note que, trocando duas

linhas desse determinante de lugar então obtemos o valor  $-4$ , de modo que escolhendo três vértices distintos então os possíveis valores para o determinante são  $4$  e  $-4$ . Note que rotacionando o sólido formado usando os vértices  $A, B$  e  $C$  obtemos os sólidos formados por  $ABD, ACD, BCD$  etc.

#### 2) Escolhem-se exatamente dois vértices na mesma face

Caso dois sejam colineares com a origem ou então os três vértices escolhidos sejam coplanares com a origem não teremos um sólido formado e sim uma figura plana. Nesse caso o volume será nulo, de modo que o determinante será zero.

Caso as situações anteriores não ocorram, os possíveis valores do determinante serão  $4$  e  $-4$ . De fato, os possíveis sólidos seriam formados por rotações do sólido determinado por  $ACE$ , cujo

determinante é  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ . Novamente, trocando duas linhas

desse determinante de lugar, seu valor muda de sinal, de modo que obtemos assim o valor  $-4$ .

Observe que se um mesmo vértice é escolhido duas ou três vezes então o determinante é nulo, uma vez que será formado por duas ou três linhas que são iguais. Esses casos não foram considerados anteriormente porque não geravam sólidos. Desse modo, segue que os determinantes têm apenas valores iguais a  $-4, 0$  ou  $4$ , de modo que o maior valor do determinante é  $4$ .

b) O total de modos que temos para escolher os três pontos e consequentemente as três linhas do determinante é dado por  $8^3 = 512$  modos. Os casos do determinante nulo são:

- os três vértices escolhidos são iguais: 8 possibilidades.
- dois vértices escolhidos são iguais e um é diferente: nesse caso temos um total de  $8 \times 7 \times 3 = 168$  possibilidades.
- os três vértices escolhidos são diferentes: nesse caso o determinante será nulo se dois vértices forem colineares com a

origem, o que é dado por  $6 \times \binom{4}{3} \times 3! = 144$ .

Assim, o total de casos com determinante nulo é  $8 + 168 + 144 = 320$ . Temos então que  $512 - 320 = 192$  casos têm determinante igual a

$\pm 4$ , donde segue que  $\frac{192}{2} = 96$  tem determinante igual a  $4$ . Assim, a

probabilidade do determinante ser máximo é dada por  $\frac{96}{512} = \frac{3}{16}$ .

## Equipe desta resolução

### Matemática

Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha  
Felipe Mascagna Bittencourt Lima  
Rafael da Gama Cavallari  
Rodrigo do Carmo Silva

### Revisão

Eliel Barbosa da Silva  
Fabiano Gonçalves Lopes  
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani  
Vagner Figueira de Faria

## Digitação, Diagramação e Publicação

Edson Vilela Gadbem  
Guilherme Magalhães Itacarambi Peneluppi