ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
campinas

Resolve

IME 2011

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

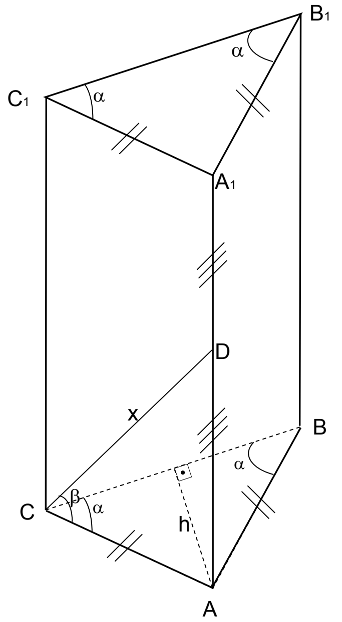
MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale *x*, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

Resolução

Eis o prisma e os elementos descritos no enunciado:



Chamando $AA_1 = H$ (altura do prisma) temos $AD = \frac{H}{2}$. Prosseguindo encontramos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\left(\frac{H}{2}\right)}{x} \Rightarrow H = 2x \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Continuando, encontramos a altura h do ΔABC em relação a $\overline{BC}$, além do comprimento da própria aresta $\overline{BC}$:

$$\begin{cases} AC = x \cdot \cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{AC} \end{cases} \Rightarrow h = x \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

e

$$\frac{BC}{2} = AC \cdot \cos\alpha \Rightarrow BC = 2x \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

Como a área do prisma é dada por $A_L = AC \cdot H + AC \cdot H + BC \cdot H$, basta agora substituirmos os valores encontrados para achar a área lateral do prisma:

$$A_L = H \cdot (2AC + BC) \Rightarrow A_L = 2x \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot (2x \cdot \cos\beta + 2x \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha)$$

$$A_L = 2x^2 \cdot (2\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\beta) \cdot (1 + \cos\alpha)$$

E, finalmente:

$$\boxed{A_L = 2x^2 \cdot \operatorname{sen}2\beta \cdot (1 + \cos\alpha)}$$

QUESTÃO 02

Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$.

Resolução

Observando a equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$, nota-se que ela representa uma cônica com centro na origem, uma vez que ela não apresenta os termos x e y.

É conveniente para os nossos cálculos que o termo "xy" de sua equação seja eliminado; isso pode ser feito a partir de uma rotação de eixos de um ângulo de θ, que é definido a partir da igualdade $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}$, onde A, B e C são, respectivamente, os coeficientes dos termos x^2, xy e y^2. Assim:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} \Rightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{-10\sqrt{3}}{1 - 11} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = 30°$$

As equações de rotação de eixos são, portanto, dadas por:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \\ y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta \end{cases}$$

Como $\theta = 30°$:

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - y_1 \cdot \dfrac{1}{2} \\ y = x_1 \cdot \dfrac{1}{2} + y_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2} \\ y = \dfrac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Substituindo x e y na equação da cônica, temos:

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$$

$$\left(\frac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2}\right)^2 - 10\sqrt{3}\left(\frac{x_1\sqrt{3} - y_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2}\right) + 11\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 16 = 0$$

Expandindo cada um dos termos:

$$\left(\frac{3x_1^2 - 2x_1y_1\sqrt{3} + y_1^2}{4}\right) - 10\sqrt{3} \cdot \left(\frac{x_1^2\sqrt{3} + 3x_1y_1 - x_1y_1 - y_1^2\sqrt{3}}{4}\right) +$$

$$+ 11 \cdot \left(\frac{x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{3} + 3y_1^2}{4}\right) + 16 = 0$$

$$\frac{3x_1^2 - 2x_1y_1\sqrt{3} + y_1^2 - 30x_1^2 - 20\sqrt{3}x_1y_1 + 30y_1^2}{4}$$

$$+ \frac{11x_1^2 + 22x_1y_1\sqrt{3} + 33y_1^2}{4} + 16 = 0$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por 4 e agrupando termos semelhantes:

$$-16x_1^2 + 64y^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{1} = 1$$

Desse modo, a equação reduzida da cônica após a rotação de eixos mostra que ela é uma hipérbole com semi-eixo real igual a 2 e semi-eixo imaginário igual a 1. Admitindo que a distância focal seja 2c, temos:

$$c^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Assim, a excentricidade dessa cônica é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

QUESTÃO 03

Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde *i* é a unidade imaginária, e *z* um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.

Obs.: $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w.

Resolução

Seja $z = x + y \cdot i$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Então:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{(x + y \cdot i) - (10 + 6i)}{(x + y \cdot i) - (4 + 6i)} = \frac{(x - 10) + (y - 6) \cdot i}{(x - 4) + (y - 6) \cdot i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, vem que:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \left[\frac{(x - 10) + (y - 6) \cdot i}{(x - 4) + (y - 6) \cdot i}\right] \cdot \left[\frac{(x - 4) - (y - 6) \cdot i}{(x - 4) - (y - 6) \cdot i}\right] =$$

$$= \frac{\left[(x - 10) \cdot (x - 4) + (y - 6)^2\right] + \left[-(x - 10) \cdot (y - 6) + (y - 6) \cdot (x - 4)\right] \cdot i}{(x - 4)^2 + (y - 6)^2} =$$

$$= \left[\frac{x^2 - 14x + 40 + (y - 6)^2}{(x - 4)^2 + (y - 6)^2}\right] + \left[\frac{6y - 36}{(x - 4)^2 + (y - 6)^2}\right] \cdot i$$

Como $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, então as partes real e imaginária desse número são iguais. Assim:

$$\text{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\text{Im}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-14x+40+(y-6)^2}{(x-4)^2+(y-6)^2}=\frac{6y-36}{(x-4)^2+(y-6)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+40+y^2-12y+36=6y-36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+y^2-18y=-112$$

Completando quadrados nessa expressão, vem que:

$$x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2+y^2-2\cdot y\cdot 9+9^2=-112+7^2+9^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-7)^2+(y-9)^2=18$$

Logo:

$$|z-7-9i|=|(x+y\cdot i)-(7+9i)|=|(x-7)+(y-9)\cdot i|=$$

$$=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2}=\sqrt{18}\Leftrightarrow\boxed{|z-7-9i|=3\sqrt{2}}$$

QUESTÃO 04

Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:

- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- n ≤ 180.000 .

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

Resolução

Por hipótese, as possíveis progressões são:

(1) $(m,a_2,a_3,22680,a_5,n)$;

(2) $(m,a_2,a_3,a_4,22680,n)$;

(3) $(a_1,m,a_3,a_4,22680,n)$.

Usando o fato de que 22 680 = $2^3.3^4.5.7$, e que m, n e q são naturais positivos e $q>1$, uma vez que a progressão geométrica é crescente, analisando cada caso, temos:

Caso 1:

$$(m,a_2,a_3,22680,a_5,n)$$

Como $\begin{cases}22680\cdot q^2=n\\ n\le 180000\\ q>1\end{cases}\Rightarrow q^2\le\dfrac{180000}{22680}$, então, sendo q natural, temos:

$$1<q^2\le\frac{180000}{22680}\cong 7{,}9\Rightarrow q=2\text{ , logo:}$$

$$m\cdot q^3=22680\Rightarrow m=\frac{22680}{2^3}=\frac{2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}{2^3}\Rightarrow\boxed{m=2835}$$

Além disso, $n=22680\cdot q^2\Rightarrow\boxed{n=90720}$.

Caso 2:

$$(m,a_2,a_3,a_4,22680,n)$$

Como $m\cdot q^4=22680=2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$, então o único valor que q pode assumir no caso 2 é **q = 3**, uma vez que este é o único fator de 22680 com expoente maior ou igual a 4 e $22680=m\cdot q^4$. Sendo m inteiro, temos:

$$m\cdot q^4=m\cdot 3^4=2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\Rightarrow m=2^3\cdot 5\cdot 7\Rightarrow\boxed{m=280}$$

Além disso:

$$n=22680\cdot q\Rightarrow\boxed{n=68040}$$

Caso 3:

$$(a_1,m,a_3,a_4,22680,n)$$

Como $m\cdot q^3=22680=2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ então, os possíveis valores para q são:

$$\begin{cases}q=2\ (m=3^4\cdot 5\cdot 7)\\ q=3\ (m=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\\ q=6\ (m=3\cdot 5\cdot 7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=2, m=2835\text{ e }n=22680\cdot q\Rightarrow\boxed{n=45360}\\ q=3, m=840\text{ e }n=22680\cdot q\Rightarrow\boxed{n=68040}\\ q=6, m=105\text{ e }n=22680\cdot q\Rightarrow\boxed{n=136080}\end{cases}$$

Portanto, as possibilidades são:

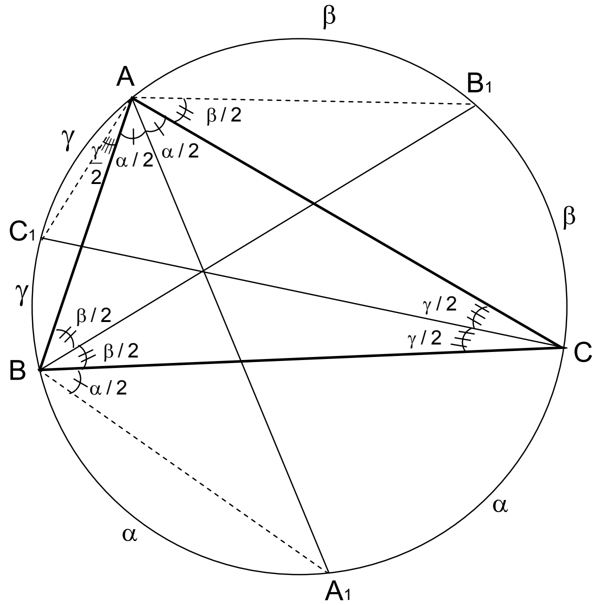
m	n	q
2835	45360	2
2835	90720	2
280	68040	3
840	68040	3
105	136080	6

QUESTÃO 05

Seja ABC um triângulo onde α, β e γ são os ângulos internos dos vértices A, B e C, respectivamente. Esse triângulo está inscrito em um círculo de raio unitário. As bissetrizes internas desses ângulos interceptam esse círculo nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente.

Determine o valor da expressão $\dfrac{\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2}+\overline{BB_1}\cos\frac{\beta}{2}+\overline{CC_1}\cos\frac{\gamma}{2}}{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta+\text{sen}\,\gamma}$.

Resolução



Teorema dos senos (circunferência de raio unitário):

$$\Delta AA_1B:\ \frac{AA_1}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}=2\cdot(1)\Rightarrow AA_1=2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)\ \textbf{(I)}$$

$$\Delta BB_1A:\ \frac{BB_1}{\text{sen}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}=2\cdot(1)\Rightarrow BB_1=2\,\text{sen}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}\right)\ \textbf{(II)}$$

$$\Delta CC_1A:\ \frac{CC_1}{\text{sen}\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}=2\cdot(1)\Rightarrow CC_1=2\,\text{sen}\left(\frac{2\alpha+\gamma}{2}\right)\ \textbf{(III)}$$

Mas sabemos pelo ΔABC que:

$$\gamma=\pi-\alpha-\beta\Rightarrow\text{sen}\,\gamma=\text{sen}(\pi-(a+b))\Rightarrow\text{sen}\,\gamma=\text{sen}(\alpha+\beta)\ \textbf{(IV)}$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \textbf{(V)}$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\Rightarrow\frac{\gamma}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\Rightarrow\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ \textbf{(VI)}$$

Substituindo **(VI)** em **(III)** temos: $CC_1=2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **(VII)**

Substituindo **(I)**, **(II)**, **(IV)** e **(VII)** na expressão do enunciado, obtemos:

$$E=\frac{\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\,\text{sen}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{\beta}{2}+2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]}{[\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta+\text{sen}(\alpha+\beta)]}$$

Podemos aplicar Prostaférese em cada uma das 3 parcelas do numerador da expressão E:

Para o termo $2\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\begin{cases}\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\\ \dfrac{p-q}{2}=\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}\text{soma}: p=\alpha+\beta\\ \text{diferença}: q=\beta\end{matrix}$$

Logo: $2\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}=\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}\,\beta$

Analogamente, obtemos $2\cdot\text{sen}\left(\dfrac{\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}=\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}\,\alpha$

e $2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$

Reescrevendo a expressão, temos:

$$E=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\Rightarrow$$

$$E=\frac{2\cdot[\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]}{[\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]}\Rightarrow\boxed{E=2}$$

QUESTÃO 06

Resolva a equação $z^2+\frac{9z^2}{(z+3)^2}=-5$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos.

Resolução

Admitindo que $z\neq 3$ (condição de existência) temos, multiplicando ambos os lados da equação por $(z+3)^2$:

$$z^2+\frac{9z^2}{(z+3)^2}=-5\Leftrightarrow z^2\cdot(z+3)^2+9z^2=-5\cdot(z+3)^2$$

$$\Leftrightarrow z^2\cdot(z^2+6z+9)+9z^2=-5\cdot(z^2+6z+9)$$

$$\Leftrightarrow z^4+6z^3+9z^2+9z^2=-5z^2-30z-45$$

$$\Leftrightarrow z^4+6z^3+23z^2+30z+45=0$$

Reagrupando os termos da última equação, temos:

$$z^4+6z^3+23z^2+30z+45=0$$

$$(z^4+z^3+3z^2)+(5z^3+5z^2+15z)+(15z^2+15z+45)=0$$

$$z^2(z^2+z+3)+5z(z^2+z+3)+15(z^2+z+3)=0$$

Colocando o termo (z^2+z+3) em evidência, encontramos então:

$$(z^2+z+3)(z^2+5z+15)=0$$

Assim, temos então duas possibilidades:

$$z^2+z+3=0\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$z^2+5z+15=0\Leftrightarrow z=\frac{-5\pm\sqrt{-35}}{2}\Leftrightarrow z=\frac{-5\pm i\sqrt{35}}{2}$$

Desse modo o conjunto solução dessa equação é dado por $S=\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{35}}{2};\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}\right\}$.

QUESTÃO 07

Seja x um número inteiro positivo menor ou igual a 20.000. Sabe-se que 2^x-x^2 é divisível por 7.

Determine o número de possíveis valores de *x*.

Resolução

Observe a seguinte tabela com os restos das divisões por 7:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
x^2	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0
2^x-x^2	1	0	6	0	0	0	2	3	4	0	2	4	1	4	0	5	2	6	5	3	1

1º) Observe que, para 2^x, os restos das divisões por 7 formam uma sequência de ciclos de 3 termos: "2–4–1", que se repetem para x=1, 2, 3, ..., 20000.

2º) Observe que, para x^2, os restos das divisões por 7 formam uma sequência de ciclos de 7 termos: "1–4–2–2–4–1–0", que se repetem para x=1, 2, 3, ..., 20000.

Logo, basta analisarmos em ciclos de 3×7=21 termos as congruências $2^x-x^2\equiv 0 \pmod 7$, ou seja, quando os restos das divisões de 2^x e x^2 por 7 são iguais.

A cada ciclo de 21 termos, temos 6 casos em que $2^x-x^2\equiv 0 \pmod 7$, conforme as células hachuradas da figura.

Logo, de x=1 a x=19992 temos 952 ciclos completos de 21 termos, nos quais ocorrem 952×6=5712 congruências do tipo $2^x-x^2\equiv 0 \pmod 7$.

Para finalizar, as congruências $2^x-x^2\equiv 0 \pmod 7$ para x=19993 até x=20000 são as mesmas encontradas para x=1 até x=8, contabilizando 4.

Portanto, o número de possíveis valores de *x*, de 1 a 20000, tais que 2^x-x^2 é divisível por 7 é igual a 5712+4 = 5716.

QUESTÃO 08

Uma pessoa lança um dado *n* vezes. Determine, em função de *n*, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

Resolução

Espaço Amostral (*E*): total de resultados possíveis no lançamento de um dado *n* vezes. Nesse caso, temos: $n(E)=6^n$.

Evento (*S*): total de resultados possíveis no qual o resultado do primeiro lançamento é 4 e os demais ($n-1$) lançamentos são maiores ou iguais à jogada anterior.

Sejam

- **a** o número de vezes que saiu a face 4 após a primeira jogada;
- **b** o número de vezes que saiu a face 5 após a primeira jogada;
- **c** o número de vezes que saiu a face 6 após a primeira jogada.

Observe que, como a exigência é que um lançamento sempre tenha resultado maior ou igual ao anterior, só devemos nos preocupar com a quantidade de vezes que saíram as faces 4, 5 ou 6, pois a ordem está determinada: todos os 4, depois todos os 5 e finalmente todos os 6.

Assim, o total de maneiras de ocorrer tal evento é o total de soluções inteiras não negativas da equação com coeficientes inteiros:

$$a+b+c=n-1$$

Esse total de soluções é dado por:

$$\binom{(n-1)+(3-1)}{3-1}=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

Logo, $n(S)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$, de modo que a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{n(S)}{n(E)}\Leftrightarrow\boxed{p=\frac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 6^n}}$$

QUESTÃO 09

Sejam o polinômio $p(x)=2x^3-3x^2+2$ e os conjuntos $A=\{p(k)\,/\,k\in\mathbb{N}\text{ e }k\leq 1999\}$, $B=\{r^2+1\,/\,r\in\mathbb{N}\}$ e $C=\{q^2+2\,/\,q\in\mathbb{N}\}$.

Sabe-se que $y=n(A\cap B)-n(A\cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto *E*. Determine o valor de *y*.

Obs.: $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Resolução

Da definição dos conjuntos, sendo $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$, temos:

(I) $(A\cap B)$ é o conjunto dos naturais tais que a imagem da função *p*(x) é um quadrado perfeito somado com 1. Logo:

$$2k^3-3k^2+2=r^2+1\Leftrightarrow 2k^3-3k^2+1=r^2\Leftrightarrow (k-1)^2\cdot(2k+1)=r^2$$

Como *r* é um natural e $(k-1)^2$ é quadrado perfeito para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que $k=1$ ou que $2k+1$ deve ser um número ímpar quadrado perfeito e, assim, $(2k+1)=p^2$, para $p\in\mathbb{N}$.

Mas, por hipótese:

$$0\leq k\leq 1999\Leftrightarrow 1\leq 2k+1\leq 3999\Leftrightarrow 1\leq p^2\leq 3999$$

Logo, o quadrado perfeito deve ser um natural entre 1 e 3999. Como 63^2 = 3969 e 64^2 = 4096, segue que $1\leq p\leq 63$.

Além disso, *p* deve ser ímpar, já que $2k+1$ é um natural ímpar. Entre $1\,(=2\cdot 1-1)$ e $63\,(=2\cdot 32-1)$, temos 32 números ímpares, logo, contando também o caso particular em que $k=1$ (que não ocorre na análise do quadrado perfeito):

$$n(A\cap B)=1+32=33$$

(II) $(A\cap C)$ é o conjunto dos naturais tais que a imagem da função *p*(x) é um quadrado perfeito somado com 2. Logo:

$$2k^3-3k^2+2=q^2+2 \Leftrightarrow 2k^3-3k^2=q^2 \Leftrightarrow k^2\cdot(2k-3)=q^2$$

Como q é um natural e k^2 é quadrado perfeito para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que $k=0$ ou que $2k-3$ deve ser um número ímpar quadrado perfeito e, assim, $(2k-3)=t^2$, para $t\in\mathbb{N}$ e $k\geq 2$.
Mas, por hipótese:

$$2\leq k\leq 1999 \Leftrightarrow 1\leq 2k-3\leq 3995 \Leftrightarrow 1\leq t^2\leq 3995$$

Logo, o quadrado perfeito deve ser um natural entre 1 e 3995. Como 63^2 = 3969 e 64^2 = 4096, segue que $1\leq t\leq 63$.
Além disso, t deve ser ímpar, já que $2k-3$ é um natural ímpar para $k\geq 2$. Entre $1\,(=2\cdot 1-1)$ e $63\,(=2\cdot 32-1)$, temos 32 números ímpares, logo, contando também o caso particular em que $k=0$ (que não ocorre na análise do quadrado perfeito):

$$n(A\cap C)=1+32=33$$

Portanto, $y=n(A\cap B)-n(A\cap C)=33-33 \Leftrightarrow \boxed{y=0}$.

QUESTÃO 10

Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2+b^2+c^2=4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Resolução

De acordo com o teorema de Jacobi, a soma ou subtração entre filas paralelas do determinante não alteram o seu valor. Assim, podemos somar a primeira linha com as duas últimas e sabemos que o valor do determinante continuará o mesmo:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & 2a+2b+2c & 2a+2b+2c \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Colocando o termo 2a + 2b + 2c em evidência no determinante, temos então que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Calculando o segundo determinante a partir da regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)\begin{vmatrix} (a+b)-(c+a) & (b+c)-(c+a) \\ (c+a)-(b+c) & (a+b)-(b+c) \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)\begin{vmatrix} b-c & b-a \\ a-b & a-c \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)[(b-c)(a-c)-(a-b)(b-a)]$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Lembrando que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+bc+ac)$ e que $a^2+b^2+c^2=4$, temos, fazendo $\lambda=a+b+c$:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+bc+ac)$$

$$\lambda^2=4+2\cdot(ab+bc+ac)\Rightarrow ab+ac+bc=\frac{\lambda^2-4}{2}$$

Assim, o determinante pode ser reescrito como

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=2\lambda\cdot\left(4-\frac{\lambda^2-4}{2}\right)=\lambda\cdot(12-\lambda^2)$$

Queremos mostrar que $\lambda\cdot(12-\lambda^2)\leq 16$, o que é equivalente a mostrar que $\lambda\cdot(12-\lambda^2)-16\leq 0 \Leftrightarrow \lambda^3-12\lambda+16\geq 0$. Aplicando o teorema das raízes racionais no polinômio $\lambda^3-12\lambda+16$, encontramos que suas possíveis raízes racionais são números inteiros divisores de 16. A partir de um teste simples dos possíveis valores ±1, ±2, ±4, ±8 e ±16 encontramos que tais raízes são 2, 2 e -4. Desse modo, ele pode ser fatorado como $(\lambda-2)^2\cdot(\lambda+4)$. Assim, nosso problema se reduz a mostrar que $(\lambda-2)^2\cdot(\lambda+4)\geq 0$. Como o fator $(\lambda-2)^2$ é sempre não-negativo, temos então que a desigualdade só será válida se $\lambda+4\geq 0$, ou seja, se $\lambda\geq -4$.
Voltemos agora para a igualdade $a^2+b^2+c^2=4$. Note que, somando 3 + 2a + 2b + 2c em ambos os lados, temos a seguinte relação:

$$a^2+2a+1+b^2+2b+1+c^2+2c+1=4+3+2a+2b+2c$$

$$\Rightarrow (a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=7+2(a+b+c)$$

Observe que, independente dos valores de a, b e c, o lado esquerdo da igualdade é sempre não-negativo, uma vez que ele corresponde a uma soma de quadrados de números reais. Assim:

$$7+2(a+b+c)=(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2\geq 0$$

$$7+2(a+b+c)\geq 0\Rightarrow a+b+c\geq -\frac{7}{2}\Rightarrow a+b+c\geq -4$$

Como $\lambda=a+b+c\Rightarrow\lambda\geq -4$, de modo que o determinante é menor ou igual a 16.

Equipe desta resolução

Matemática

Rafael da Gama Cavallari
Rodrigo do Carmo Silva

Revisão

Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani
Vagner Figueira de Faria

Digitação, Diagramação e Publicação

Fábio Henrique Mendonça Chaim