

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

Resolve

IME 2011

PROVA OBJETIVA

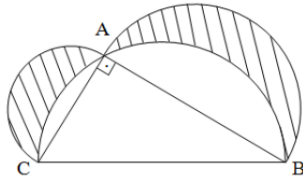
MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA

www.elitecampinas.com.br

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm², é:

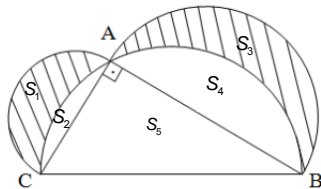


- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12
- e) 14

Resolução

Alternativa A

Nomeando as áreas da figura dada como segue, temos:



$$(1) S_1 + S_2 = \frac{\pi(AC)^2}{4};$$

$$(2) S_3 + S_4 = \frac{\pi(BC)^2}{4};$$

$$(3) S_2 + S_4 + S_5 = \frac{\pi(AB)^2}{4}.$$

Somando (1) e (2), e usando o fato de que o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa BC, temos:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi(AC)^2}{4} + \frac{\pi(BC)^2}{4} = \frac{\pi(AB)^2}{4} = S_2 + S_4 + S_5.$$

Portanto, $S_1 + S_3 = S_5 = \frac{3 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$ e assim, a área pedida é:

$$\boxed{S_1 + S_3 = 6 \text{ cm}^2}.$$

QUESTÃO 02

O valor de x que satisfaz a equação $\text{sen}(\text{arccotg}(1+x)) = \cos(\text{arctg}(x))$:

- a) $\frac{3}{2}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $-\frac{1}{2}$
- e) $-\frac{3}{2}$

Resolução

Alternativa D

Fazendo $\alpha = \text{arccotg}(1+x)$ e $\beta = \text{arctg}(x)$, temos:

$$\alpha = \text{arccotg}(1+x) \Rightarrow \cotg \alpha = x+1 \Leftrightarrow \text{tg} \alpha = \frac{1}{x+1}$$

$$\beta = \text{arctg}(x) \Rightarrow \text{tg} \beta = x$$

$$\text{sen}(\text{arccotg}(1+x)) = \cos(\text{arctg}(x)) \Rightarrow \text{sen} \alpha = \cos \beta$$

Assim, note que a primeira igualdade só será válida admitindo $x \neq -1$ (não há problema nisso pois é simples verificar que $x = -1$ não é solução da equação). Além disso, a partir da relação fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

Como $\text{sen} \alpha = \cos \beta \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \beta$, de modo que

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \beta + \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \beta \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \text{sen} \beta$$

Desse modo, temos dois casos para analisar:

Caso 1: $\text{sen} \beta = \cos \alpha$.

Nesse caso, note que $\text{sen} \alpha = \cos \beta \Rightarrow \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\text{sen} \beta} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \beta}$.

Como $\text{tg} \alpha = \frac{1}{x+1}$ e $\text{tg} \beta = x$, segue a igualdade

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = x+1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ um absurdo. Assim, esse caso não convém.}$$

Caso 2: $\text{sen} \beta = -\cos \alpha$.

Nesse caso, note que $\text{sen} \alpha = \cos \beta \Rightarrow \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{-\text{sen} \beta} \Rightarrow \text{tg} \alpha = -\frac{1}{\text{tg} \beta}$.

Como $\text{tg} \alpha = \frac{1}{x+1}$ e $\text{tg} \beta = x$, segue a igualdade

$$\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -x-1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}.$$

QUESTÃO 03

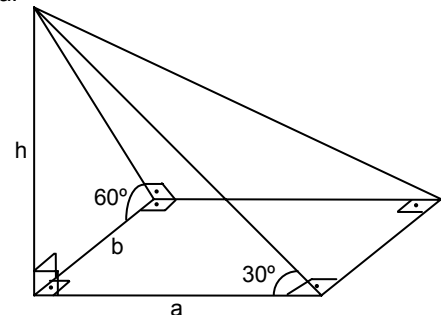
A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base. O volume da pirâmide é:

- a) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$
- b) $\frac{S\sqrt{S}}{6}$
- c) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$
- d) $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$
- e) $\frac{2S^2}{3}$

Resolução

Alternativa A

Sejam a e b as medidas dos lados do retângulo da base e h a altura da pirâmide. Pelas informações fornecidas, podemos construir a seguinte figura:



Analisando-a, podemos concluir que:

$$\begin{cases} \text{tg} 30^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \text{tg} 60^\circ = \frac{h}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\sqrt{3} \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro as duas equações acima temos:

$$h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

Sendo assim, podemos afirmar que o volume da pirâmide mencionada é V, sendo:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{S \cdot \sqrt{S}}{3}}$$

QUESTÃO 04

Sejam x_1, \dots, x_n os n primeiros termos de uma progressão aritmética. O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r , respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} \text{ é:}$$

- a) $x_1^n \cdot r^n$
- b) $x_1^n \cdot r$
- c) $x_1^n \cdot r^{n-1}$
- d) $x_1 \cdot r^n$
- e) $x_1 \cdot r^{n-1}$

Resolução **Alternativa E**

De acordo com o teorema de Jacobi, sabemos que a soma ou subtração entre filas paralelas de um determinante não altera o valor do mesmo. Aplicando o teorema de Jacobi nesse determinante, fazendo a diferença entre todas as linhas do determinante (a partir da segunda) e a primeira:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3 - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \end{vmatrix}$$

Como x_1, \dots, x_n são elementos de uma progressão aritmética de razão r , note que:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + r \Rightarrow x_2 - x_1 = r \\ x_3 &= x_1 + 2r \Rightarrow x_3 - x_1 = 2r \\ &\vdots \\ x_n &= x_1 + (n-1)r \Rightarrow x_n - x_1 = (n-1) \cdot r \end{aligned}$$

Substituindo essas relações no determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3 - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & r & 2r & \dots & 2r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r & 2r & \dots & (n-1)r \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente o teorema de Jacobi fazendo a diferença entre todas as linhas (a partir da terceira) e a segunda temos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & r & 2r & \dots & 2r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r & 2r & \dots & (n-1)r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & 0 & r & \dots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r & \dots & (n-2)r \end{vmatrix}$$

Procedendo desse modo temos finalmente que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & 0 & r & \dots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{vmatrix}$$

O segundo determinante corresponde ao determinante de uma matriz triangular superior, que é dado justamente pela multiplicação de todos os elementos de sua diagonal principal. Assim:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & 0 & r & \dots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{vmatrix} = x_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n-1 \text{ vezes}} = x_1 \cdot r^{n-1}$$

QUESTÃO 05

Uma reta, com coeficiente angular a_1 , passa pelo ponto $(0,-1)$. Uma outra reta, com coeficiente angular a_2 , passa pelo ponto $(0,1)$. Sabe-se que $a_1^2 + a_2^2 = 2$. O lugar geométrico percorrido pelo ponto de interseção das duas retas é uma:

- a) hipérbole de centro $(0,0)$ e retas diretrizes $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) circunferência de centro (a_1, a_2) e raio $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- c) hipérbole de centro $(0,0)$ e retas diretrizes $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) elipse de centro $(0,0)$ e retas diretrizes $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) elipse de centro (a_1, a_2) e retas diretrizes $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução **Alternativa C**

Seja r a reta que possui coeficiente angular a_1 e passa por $(0,-1)$. Fazendo sua equação como $y = a_1x + b_1$, segue que $-1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -1$. Desse modo, a equação de r é dada por $y = a_1x - 1$. Seja s a reta que possui coeficiente angular a_2 e passa por $(0,1)$. Fazendo sua equação como $y = a_2x + b_2$, segue que $1 = a_2 \cdot 0 + b_2 \Leftrightarrow b_2 = 1$, de modo que a equação reduzida de s é dada por $y = a_2x + 1$.

Seja finalmente (x,y) o ponto de encontro de r e s . Observe que como as retas passam respectivamente por $(0,-1)$ e $(0,1)$, $x = 0$ não representa nenhum ponto de encontro entre elas. Assim:

$$\begin{aligned} y &= a_1x - 1 \Rightarrow a_1 = \frac{y+1}{x} \\ y &= a_2x + 1 \Rightarrow a_2 = \frac{y-1}{x} \end{aligned}$$

Como $a_1^2 + a_2^2 = 2$:

$$\left(\frac{y+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2x^2$$

Expandindo os termos:

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Assim, o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas r e s é a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. Essa equação representa uma hipérbole equilátera com focos no eixo x , centro na origem e com semi-eixos a e b exatamente iguais a 1. Seja $2c$ a distância entre os focos. Assim:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$$

A excentricidade dessa hipérbole é a razão $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$,

enquanto as diretrizes são retas perpendiculares ao eixo real (e consequentemente perpendiculares ao eixo x) que passam nos pontos $\left(\pm \frac{a}{e}, 0\right)$, tendo, portanto, equações reduzidas dadas por $x = \pm \frac{a}{e}$.

Assim, as diretrizes são $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

QUESTÃO 06

O valor de y real positivo na equação $(5y)^{\log_5 5} - (7y)^{\log_7 7} = 0$, onde x é um número real maior do que 1 é:

- a) 70
- b) 35
- c) 1
- d) $\frac{1}{35}$
- e) $\frac{1}{70}$

Resolução

Alternativa D

$$(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0 \Rightarrow (5y)^{\log_x 5} = (7y)^{\log_x 7}$$

Aplicando logaritmo na base x em ambos os membros da equação e lembrando algumas propriedades de logaritmos temos:

$$\log_x (5y)^{\log_x 5} = \log_x (7y)^{\log_x 7}$$

$$\log_x 5 \cdot \log_x (5y) = \log_x 7 \cdot \log_x (7y)$$

$$\log_x 5 \cdot [\log_x 5 + \log_x y] = \log_x 7 \cdot [\log_x 7 + \log_x y]$$

$$(\log_x 5)^2 + \log_x 5 \cdot \log_x y = (\log_x 7)^2 + \log_x 7 \cdot \log_x y$$

$$(\log_x 5)^2 - (\log_x 7)^2 = \log_x 7 \cdot \log_x y - \log_x 5 \cdot \log_x y$$

$$(\log_x 5 - \log_x 7)(\log_x 5 + \log_x 7) = \log_x y \cdot (\log_x 7 - \log_x 5)$$

$$-(\log_x 7 - \log_x 5)(\log_x 5 + \log_x 7) = \log_x y \cdot (\log_x 7 - \log_x 5)$$

$$\log_x y = -(\log_x 5 + \log_x 7) \Rightarrow \log_x y = -\log_x (5 \cdot 7)$$

$$\log_x y = \log_x (5 \cdot 7)^{-1}$$

$$y = \frac{1}{35}$$

QUESTÃO 07

O pipoqueiro cobra o valor de R\$ 1,00 por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de R\$ 1,00 e quatro uma nota de R\$ 2,00. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de R\$ 2,00 é:

- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

Resolução

Alternativa B

Como temos exatamente 4 pessoas com notas de R\$2,00 e 4 pessoas com moedas de R\$1,00, admitindo que a única diferenciação a ser feita entre eles é a quantia em dinheiro que possuem, o total de modos de organizarmos tais pessoas em uma fila é dado pela permutação

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \text{ possibilidades. Esse número corresponde ao total de casos do espaço amostral.}$$

Observe que o pipoqueiro só terá troco para todas as pessoas se a primeira pessoa tiver R\$1,00 e se a última pessoa tiver R\$2,00. O total de modos de formarmos uma fila com tais condições é igual ao total de modos de formarmos uma fila com 6 pessoas das quais 3 possuem R\$1,00 e 3 possuem R\$2,00 (as pessoas dos extremos já estão definidas portanto não influenciam no cálculo). Assim, o total de filas com as condições especificadas é dado por

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ possibilidades. Se 1 representa um indivíduo com R\$1,00 e 2 representa um indivíduo com R\$2,00, temos que, destas 20 possibilidades, os únicos casos que não permitem que o pipoqueiro tenha o troco disponível são aqueles em que:}$$

- existem no mínimo duas pessoas com moeda de R\$1,00 **exatamente** antes da última pessoa (neste caso, analisando somente os 3 últimos clientes, note que há sobra de troco, portanto, há falta de troco anterior, uma vez, no total dos fregueses não há sobra) ou
- os que possuem no mínimo duas pessoas com notas de R\$2,00 **exatamente** após a primeira pessoa (neste caso há falta de troco para a terceira pessoa da fila).

Assim, as únicas possibilidades dentre as 20 que não satisfazem a condição do troco são, portanto:

- 1) 12221112
- 2) 12212112
- 3) 12211212
- 4) 12211122
- 5) 11222112
- 6) 12122112
- 7) 12212112: já contado na linha (2)
- 8) 12221112: já contado na linha (1)

Assim, existem $20 - 6 = 14$ casos nos quais o pipoqueiro terá sempre o troco disponível. Desse modo, a probabilidade é dada por $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

QUESTÃO 08

O valor de $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$ é:

- a) -1
b) -0,5
c) 0
d) 0,5
e) 1

Resolução

Alternativa C

Considere a equação $z^7 - 1 = 0$. As raízes de tal equação são da

forma $z_k = \text{cis} \frac{k \cdot 2\pi}{7}$, com k inteiro.

Assim, temos:

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \text{cis} 0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = \text{cis} \frac{2\pi}{7}$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = \text{cis} \frac{4\pi}{7}$$

$$k=3 \Rightarrow z_3 = \text{cis} \frac{6\pi}{7}$$

$$k=4 \Rightarrow z_4 = \text{cis} \frac{8\pi}{7}$$

$$k=5 \Rightarrow z_5 = \text{cis} \frac{10\pi}{7}$$

$$k=6 \Rightarrow z_6 = \text{cis} \frac{12\pi}{7}$$

Pela relação de Girard, a soma das raízes é zero.

Assim:

$$1 + \text{cis} \frac{2\pi}{7} + \text{cis} \frac{4\pi}{7} + \text{cis} \frac{6\pi}{7} + \text{cis} \frac{8\pi}{7} + \text{cis} \frac{10\pi}{7} + \text{cis} \frac{12\pi}{7} = 0$$

Usando a parte real, temos:

$$1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0$$

Como

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{12\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7} = \cos \frac{10\pi}{7} \text{ e } \cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}, \text{ temos:}$$

$$1 + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = 0, \text{ logo:}$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0$$

QUESTÃO 09

Sejam x e y números reais. Assinale a alternativa correta:

- a) Todo x e y satisfaz $|x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}$
b) Existe x e y que não satisfaz $|x + y| \leq |x| + |y|$
c) Todo x e y satisfaz $|x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{|x^2| + |y^2|}$
d) Todo x e y satisfaz $|x - y| \leq |x + y|$
e) Não existe x e y que não satisfaz $|x| + |y| \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$

Resolução

Alternativa C

a) **Incorreta.** Tomando $x = y = 0,1$ temos

$$|x| + |y| = 0,2 \quad (I) \text{ e}$$

$$\sqrt{2}|x^2 + y^2| = \sqrt{2}|(0,01 + 0,01)|$$

$$\sqrt{2}|x^2 + y^2| = 0,02\sqrt{2} < 0,02 \cdot 1,5 = 0,03 \quad (II).$$

Portanto, de (I) e (II), para este caso, $|x| + |y| > \sqrt{2}|x^2 + y^2|$.

b) **Incorreta.** Pela desigualdade triangular temos $|x + y| \leq |x| + |y|$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$. Como $|x| + |y|$ é positivo, então $|x| + |y| = ||x| + |y||$ e,

portanto, temos diretamente que $|x + y| \leq ||x| + |y||$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$.

c) **Correta.** De fato, sabemos que para $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$, a desigualdade $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ é satisfeita. Daí,

$$|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

Adicionando $|x|^2 + |y|^2$ a ambos os membros da última inequação, obtemos:

$$2|x|^2 + 2|y|^2 \geq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$2(|x|^2 + |y|^2) \geq (|x| + |y|)^2$$

Extraindo raiz quadrada (que é uma função estritamente crescente) em ambos os membros (que são não-negativos), obtemos, mantendo o sinal da inequação:

$$\sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \geq |x| + |y| = |x| + |y|$$

Portanto, como $|x|^2 = |x|^2$ e $|y|^2 = |y|^2$, temos finalmente que, para $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

d) **Incorreta.** Tomando $x = -2$ e $y = 2$, vemos que:

$$|x - y| = |(-2) - (2)| = 4 \quad (I) \text{ e}$$

$$|x + y| = |(-2) + (2)| = 0 \quad (II).$$

Portanto, de (I) e (II), para este caso, verifica-se que a desigualdade não é satisfeita.

e) **Incorreta.** Tomando $x = y = 0,1$ temos

$$|x| + |y| = 0,2 \quad (I) \text{ e}$$

$$\sqrt{3}|x^2 + y^2| = \sqrt{3}|(0,01 + 0,01)|$$

$$\sqrt{3}|x^2 + y^2| = 0,02\sqrt{3} < 0,02 \cdot 1,8 = 0,036 \quad (II).$$

Portanto, de (I) e (II), para este caso, $|x| + |y| > \sqrt{3}|x^2 + y^2|$.

QUESTÃO 10

Em relação à teoria dos conjuntos, considere as seguintes afirmativas relacionadas aos conjuntos A, B e C:

- I. Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \in C$.
- II. Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \in C$.
- III. Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \subseteq C$.

Estão corretas:

- a) nenhuma das alternativas
- b) somente a alternativa I
- c) somente as alternativas I e II
- d) somente as alternativas II e III
- e) todas as alternativas

Resolução

Alternativa B

Vamos antes lembrar que o símbolo \in diz respeito a uma relação entre elemento e conjunto enquanto o símbolo \subseteq diz respeito a uma relação entre conjuntos. Vamos agora verificar quais das alternativas são falsas e quais são verdadeiras:

I) Se $A \in B$, então temos que o conjunto A é um elemento do conjunto B. Como $B \subseteq C$, então todos os elementos de B pertencem ao conjunto C, inclusive o elemento A. Sendo assim, como A é também um elemento de C, temos que $A \in C$ e, portanto, a afirmação é verdadeira.

II) A afirmação é falsa e vamos exibir um contra-exemplo. Sejam

$$\begin{cases} A = \{1\} \\ B = \{1,2\} \\ C = \{\{1,2\}, \{1,4\}\} \end{cases}$$

Temos que $A \subseteq B$ e $B \in C$. Porém, o conjunto A não é um elemento de C de modo que $A \notin C$.

III) A afirmação é falsa e podemos usar o mesmo contra-exemplo do item anterior onde as hipóteses são satisfeitas, mas a tese não se verifica.

QUESTÃO 11

Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right). \text{ Sabendo que } p(3) = 28, \text{ o valor de } p(4) \text{ é:}$$

- a) 10
- b) 30
- c) 45
- d) 55
- e) 65

Resolução

Alternativa E

Da igualdade dada, temos:

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow p(x)\left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = p\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow p\left(\frac{1}{x}\right)[p(x) - 1] = p(x) \quad (2)$$

Multiplicando as equações (1) e (2), temos:

$$p(x) \cdot p\left(\frac{1}{x}\right) \left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] [p(x) - 1] = p(x) \cdot p\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] [p(x) - 1] = 1.$$

Chamando $A(x) = p(x) - 1$, isso implica que $A\left(\frac{1}{x}\right) = p\left(\frac{1}{x}\right) - 1$ e

$$A(x) \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \forall x \in \mathbb{C}, x \neq 0.$$

Sabendo que $A\left(\frac{1}{x}\right)$ é a transformada recíproca de $A(x)$, então

$$A(x) \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow A(x) = a_n x^n \text{ ou } A(x) = c, c \in \mathbb{C}.$$

Logo, temos que $A(x) = a_n x^n \Rightarrow a_n^2 = 1 \Leftrightarrow a_n = \pm 1 \Rightarrow A(x) = \pm x^n$ ou $A(x) = c \Rightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1 \Rightarrow A(x) = \pm 1$.

Suponha que $A(x) = a_n x^n + c$. Assim, temos que:

$$A(x) \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow (a_n x^n + c) \left(\frac{a_n}{x^n} + c\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$a_n^2 + c^2 + a_n \cdot c \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n^2 + c^2 = 1 \\ a_n \cdot c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \Leftrightarrow a_n = \pm 1 \\ a_n = 0 \Leftrightarrow c = \pm 1 \end{cases}$$

Com isso, recaímos nas condições anteriores.

Logo, $p(x) = \pm x^n + 1$ ou $p(x) = \pm 1$.

Usando a hipótese de que $p(3) = 28$, a segunda condição é descartada. Usando apenas a primeira condição, temos que:

$$p(3) = \pm(3)^n + 1 = 28 \Leftrightarrow \pm 3^n = 27 \Leftrightarrow 3^n = \pm 27.$$

Como 3^n é positivo, temos que $n = 3$ e assim, $p(x) = x^3 + 1$. Portanto,

$$p(4) = 4^3 + 1 \Rightarrow p(4) = 65.$$

QUESTÃO 12

Uma progressão aritmética $\{a_n\}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, tem $a_1 > 0$ e $3a_8 = 5a_{13}$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos desta progressão, o valor de n para que S_n seja máxima é:

- a) 10
- b) 11
- c) 19
- d) 20
- e) 21

Resolução

Alternativa D

Usando a igualdade fornecida no enunciado e conhecendo o termo geral de uma progressão aritmética, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde r é a razão da mesma, temos:

$$3a_8 = 5a_{13} \Leftrightarrow 3 \cdot (a_1 + 7 \cdot r) = 5 \cdot (a_1 + 12 \cdot r) \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 = -39 \cdot r$$

Como $a_1 > 0$, sabemos que r é negativo. Usando agora a fórmula da

soma dos n primeiros termos, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2} = \frac{(-39 \cdot r + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{(n^2 - 40n) \cdot r}{2}$$

Como r é negativo, queremos o valor mais negativo possível para $n^2 - 40n$. Sendo esta uma função de segundo grau na forma $y = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$, com $a = 1$ e $b = -40$, o valor de n que minimiza a função corresponde à abscissa do vértice:

$$n = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-40)}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \boxed{n = 20}$$

Substituindo este valor verificamos que $20^2 - 40 \cdot 20 = -400 < 0$, e por isso garantimos que este é o valor correto.

* Apenas por curiosidade, a soma assume a forma $S_n = -200 \cdot r$

QUESTÃO 13

Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção entre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

- a) 1.287 b) 14.112 c) 44.200 d) 58.212 e) 62.822

Resolução **Alternativa D**

Lembremos que numa equação linear com coeficientes inteiros da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$, o número de soluções inteiras não-negativas é dado por:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Chamando de h_i e m_i a quantidade de homens e de mulheres, respectivamente, que vão descer na estação i , se não há distinção entre os passageiros do mesmo sexo, então só é importante *quantos* passageiros de cada sexo descerão em cada estação (e não *quais*). Assim, temos que:

(I) Sendo um total de 4 homens, a quantidade de maneiras distintas de os homens desembarcarem é dada pelo número de soluções inteiras não-negativas da equação $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 4$, que é igual a:

$$\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{9}{5} = 126$$

(II) Sendo um total de 6 mulheres, a quantidade de maneiras distintas de as mulheres desembarcarem é dada pelo número de soluções inteiras não-negativas da equação $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 6$, que é igual a:

$$\binom{6+6-1}{6-1} = \binom{11}{5} = 462$$

(III) Pelo princípio fundamental da contagem, o total de possibilidades distintas de desembarque é:

$$126 \times 462 = \boxed{58212 \text{ maneiras}}$$

QUESTÃO 14

Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

- a) 1 e 2
b) 2 e 3
c) 3 e 2
d) 2 e 2
e) 3 e 1

Resolução

Alternativa B

Por hipótese, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+2d+e=13 \\ 2b+3d=11 \\ a+5b=7 \\ 3a+b+2c=9 \\ 4a=8 \\ 2a+d+2f=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=3 \\ e=2 \\ f=3 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$ e $d = 3$.

QUESTÃO 15

Seja $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \sqrt[3]{x} + 4$, onde a e b são números reais diferentes de zero. Sabendo que $f(\log_{10}(\log_3 10)) = 5$, o valor de $f(\log_{10}(\log_3 3))$ é:

- a) 5 b) 3 c) 0 d) -3 e) -5

Resolução **Alternativa B**

Seja $g(x) = f(x) - 4 \Rightarrow g(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \sqrt[3]{x}$.

Então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$g(-\alpha) = a \cdot \sin(-\alpha) + b \cdot \sqrt[3]{-\alpha} = -a \cdot \sin \alpha - b \cdot \sqrt[3]{\alpha} = - (a \cdot \sin \alpha + b \cdot \sqrt[3]{\alpha}) = -g(\alpha)$$

Assim, $g(x)$ é uma função ímpar.

Por outro lado, efetuando uma mudança de base no logaritmo, temos

$$\text{que: } \log_{10} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 10}$$

Logo, fazendo $\alpha = \log_{10}(\log_3 10)$, vem que:

$$\log_{10}(\log_3 3) = \log_{10} \left(\frac{1}{\log_3 10} \right) = \log_{10}(\log_3 10)^{-1} = -\log_{10}(\log_3 10) = -\alpha$$

Portanto, sendo $f(\log_{10}(\log_3 10)) = 5$, temos que:

$$f(\alpha) = 5 \Leftrightarrow g(\alpha) + 4 = 5 \Leftrightarrow g(\alpha) = 1$$

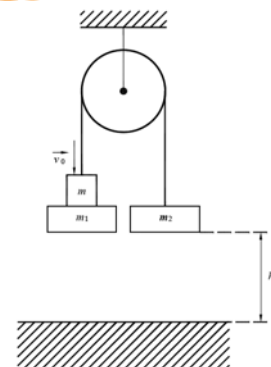
Lembrando que a função g é ímpar:

$$f(\log_{10}(\log_3 3)) = f(-\alpha) = g(-\alpha) + 4 = -g(\alpha) + 4 = -1 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(\log_{10}(\log_3 3)) = 3}$$

FÍSICA

QUESTÃO 16



A figura acima apresenta duas massas $m_1 = 5$ kg e $m_2 = 20$ kg presas por um fio que passa por uma roldana. As massas são abandonadas a partir do repouso, ambas a uma altura h do solo, no exato instante em que um cilindro oco de massa $m = 5$ kg atinge m_1 com velocidade $v = 36$ m/s, ficando ambas coladas. Determine a altura h , em metros, para que m_1 chegue ao solo com velocidade nula.

Dado:

- Aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s²

Observação:

- A roldana e o fio são ideais.

- a) 5,4
b) 2,7
c) 3,6
d) 10,8
e) 1,8

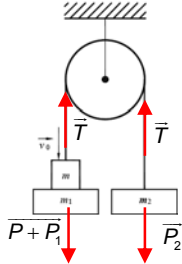
Resolução

Alternativa A

O sistema deve conservar a quantidade de movimento. Como a roldana age como um agente externo no sentido de modificar a direção da velocidade, a quantidade de movimento se conserva ao longo do fio. Assim: $Q_{inicial} = Q_{final} \Leftrightarrow m \cdot v = (m + m_1 + m_2) \cdot v_0$ sendo v a velocidade do cilindro imediatamente antes da colisão e v_0 a velocidade do conjunto imediatamente após a interação. Isolando v_0 e substituindo os valores, obtemos:

$$v_0 = \frac{m \cdot v}{(m + m_1 + m_2)} = 6 \text{ m/s}$$

Agora, observando o diagrama de forças, vamos calcular a aceleração resultante do sistema:



$$\begin{cases} P_2 - T = m_2 \cdot a \\ T - (P + P_1) = (m + m_1) \cdot a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$P_2 - P_1 - P = m_{total} \cdot a \Leftrightarrow$$

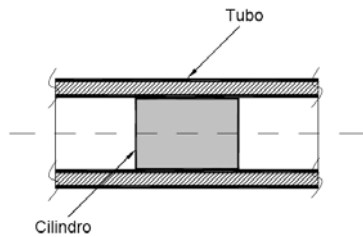
$$200 - 50 - 50 = 30 \cdot a \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$$

Logo, calculando a altura h , tal que $v_f = 0$:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta S \Leftrightarrow 0 = 6^2 - 2 \cdot \frac{10}{3} \cdot h \Leftrightarrow h = 5,4 \text{ m}$$

QUESTÃO 17



A figura acima apresenta um cilindro que executa um movimento simultâneo de translação e rotação com velocidades constantes no interior de um tubo longo. O cilindro está sempre coaxial ao tubo. A folga e o atrito entre o tubo e o cilindro são desprezíveis. Ao se deslocar no interior do tubo, o cilindro executa uma rotação completa em torno do seu eixo a cada 600 mm de comprimento do tubo. Sabendo que a velocidade de translação do cilindro é 6 m/s, a velocidade de rotação do cilindro em rpm é:

- a) 6 b) 10 c) 360 d) 600 e) 3600

Resolução

Alternativa D

O intervalo de tempo para que o cilindro percorra uma distância $\Delta x = 600 \text{ mm} = 0,6 \text{ m}$ é dado por:

$$v_T = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow 6 = \frac{0,6}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = 0,1 \text{ s}$$

Como esse intervalo corresponde ao período de rotação do cilindro, sua frequência de rotação f é igual a:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Hz} \Leftrightarrow f = 600 \text{ rpm}$$

QUESTÃO 18

Um observador e uma fonte sonora de frequência constante movem-se, respectivamente, segundo as equações temporais projetadas nos eixos X e Y:

Observador	$X_o(t) = \cos(t)$	$Y_o(t) = -\cos(t)$
Fonte	$X_f(t) = \sin(t) + \cos(t)$	$Y_f(t) = -2\cos(t)$

Observação:

- A velocidade de propagação da onda é muito maior que as velocidades do observador e da fonte.

Com relação ao instante $t(0 \leq t < \pi)$, o observador perceberá uma frequência:

- a) constante
b) variável e mais aguda em $t = 0$
c) variável e mais aguda em $t = \frac{1}{4}\pi$
d) variável e mais aguda em $t = \frac{1}{2}\pi$
e) variável e mais aguda em $t = \frac{3}{4}\pi$

Resolução

Alternativa A

Considerando os pares ordenados $(X_o(t), Y_o(t))$ e $(X_f(t), Y_f(t))$ as posições do observador e da fonte, respectivamente, no instante t , podemos dizer que a distância entre os dois é dada pela função

$$D_{fo} = \sqrt{(X_f - X_o)^2 + (Y_f - Y_o)^2}$$

Substituindo as funções de cada coordenada, obtemos

$$D_{fo} = \sqrt{(\sin(t) + \cos(t) - \cos(t))^2 + (-2\cos(t) - (-\cos(t)))^2}$$

$$D_{fo} = \sqrt{(\sin(t))^2 + (-\cos(t))^2}$$

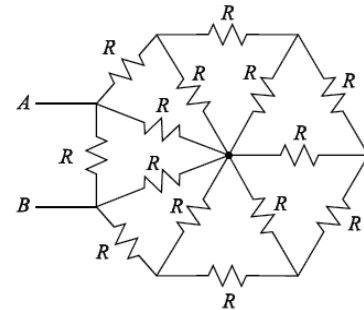
$$D_{fo} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}$$

$$D_{fo} = \sqrt{1}$$

$$D_{fo} = 1 = \text{constante}$$

Como a distância entre fonte e observador é constante e igual a 1 (unidade arbitrária), a velocidade relativa entre ambos é nula. Conclui-se então que a frequência percebida pelo observador será constante, pois o efeito Doppler (variação da frequência percebida pelo observador) depende exclusivamente do deslocamento relativo entre fonte e observador.

QUESTÃO 19



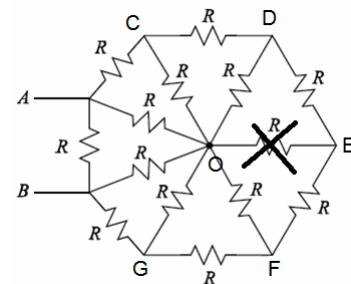
O valor da resistência equivalente entre os terminais A e B do circuito mostrado na figura acima é:

- a) $R/2$
b) $6R/7$
c) $6R/13$
d) $16R/29$
e) $15R/31$

Resolução

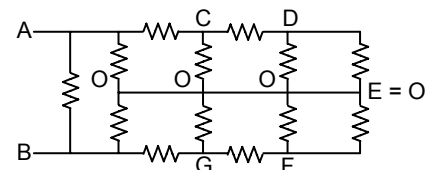
Alternativa D

Observe a figura a seguir, onde nomeamos alguns nós. Para facilitar o raciocínio, suponhamos que seja aplicada uma ddp entre os nós A e B.

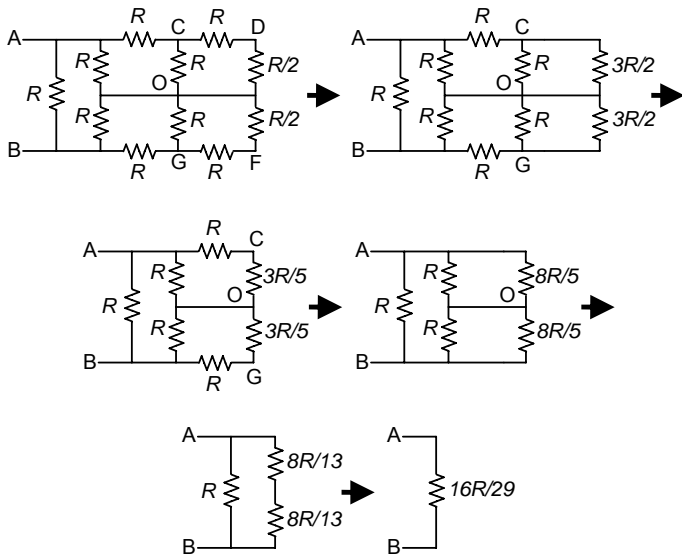


Em DOFE observamos uma ponte de Wheatstone em equilíbrio. Logo, os potenciais elétricos nos nós E e O são iguais, portanto o resistor entre esses 2 nós pode ser eliminado.

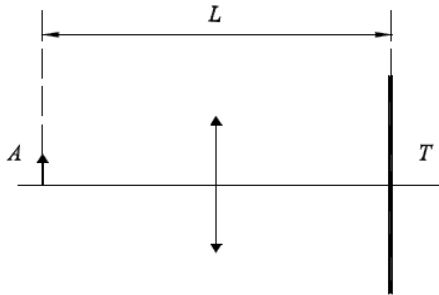
Agora, podemos redesenhar o circuito, onde todas as resistências medem R.



Podemos calcular as resistências equivalentes, reduzindo o circuito sucessivamente. Observe:



QUESTÃO 20



Uma lente convergente de distância focal f situa-se entre o objeto A e a tela T, como mostra a figura acima.

Se L a distância entre o objeto e a tela, considere as seguintes afirmativas:

- I) Se $L > 4f$, existem duas posições da lente separadas por uma distância $\sqrt{L[L - 4f]}$, para as quais é formada na tela uma imagem real.
- II) Se $L < 4f$, existe apenas uma posição da lente para a qual é formada na tela uma imagem real.
- III) Se $L = 4f$, existe apenas uma posição da lente para a qual é formada na tela uma imagem real.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

- a) I e II, apenas
- b) I e III, apenas
- c) II e III, apenas
- d) I, II e III
- e) III, apenas

Resolução **Alternativa B**

A distância L entre o objeto e a lente é igual à soma das distâncias entre o objeto e a lente (p) e entre a lente e a imagem (p'). Assim:

$$p' = L - p$$

Substituindo a relação acima na equação de Gauss, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{L-p} \Leftrightarrow p^2 - Lp + Lf = 0$$

Para a equação acima, encontramos $\Delta = L^2 - 4Lf$, função esta que se anula apenas para os valores $L = 0$ (pode ser descartado, pois implica lente, imagem e objeto sobre o mesmo ponto) ou $L = 4f$.

Analisando a condição $\Delta \geq 0$, necessária para que a equação $p^2 - Lp + Lf = 0$ tenha soluções reais, podemos afirmar que:

- Para $L = 4f$, a equação aceita apenas uma solução real, o que torna a **afirmação III verdadeira**.
- Para $L < 4f$, a equação não admite soluções reais, o que torna a **afirmação II falsa**.

Finalmente, resolvendo a equação de segundo grau (para $L > 4f$) na variável p , encontramos duas soluções reais, que representam dois valores possíveis para p e, consequentemente, duas posições possíveis para a lente:

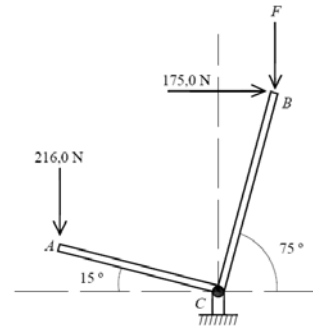
$$p_1 = \frac{L + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ e } p_2 = \frac{L - \sqrt{\Delta}}{2}$$

A distância entre as duas posições ($d = p_1 - p_2$) é dada por

$$d = \frac{L + \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2} - \frac{L - \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2} = \sqrt{L[L - 4f]}$$

e este resultado demonstra que a **afirmação I é verdadeira**.

QUESTÃO 21



A figura acima apresenta um perfil metálico AB, com dimensões $AC = 0,20$ m e $CB = 0,18$ m, apoiado em C por meio de um pino sem atrito. Admitindo-se desprezível o peso do perfil AB, o valor da força vertical F , em newtons, para que o sistema fique em equilíbrio na situação da figura é:

Dados:

- $\sin(15^\circ) = 0,26$
- $\cos(15^\circ) = 0,97$

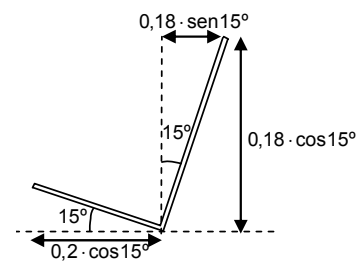
- a) 242,5
- b) 232,5
- c) 222,5
- d) 212,5
- e) 210,5

Resolução **Alternativa A**

Para encontrar F basta fazer $\sum \vec{M}_i = \vec{0}$, sendo \vec{M}_i o momento da i -ésima força e M_i a intensidade de \vec{M}_i . Para o ponto C:

$M_{\text{anti-horário}} = M_{\text{horário}}$, sendo $M = F \cdot r \cdot \cos \theta$, onde r é o módulo do braço do momento.

Pela figura a seguir, admitindo-se que a força de 216,0 N esteja na vertical, obtemos:

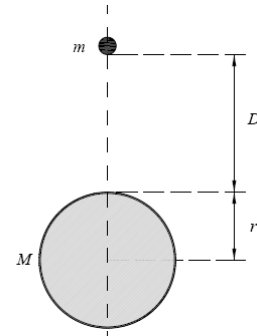


$$216 \cdot 0,2 \cdot \cos 15^\circ = 175 \cdot 0,18 \cdot \cos 15^\circ + F \cdot 0,18 \cdot \sin 15^\circ$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$43,2 \cdot 0,97 = 31,5 \cdot 0,97 + F \cdot 0,18 \cdot 0,26 \Leftrightarrow \boxed{F = 242,5 \text{ N}}$$

QUESTÃO 22



A figura acima apresenta um pequeno corpo de massa m em queda livre na direção do centro de um planeta de massa M e de raio r sem atmosfera, cujas superfícies distam D . É correto afirmar que a aceleração do corpo

Observações:

- $D \gg r$;
- $M \gg m$.

- é constante.
- independe da massa do planeta.
- diminui com o tempo.
- aumenta com o tempo.
- depende da massa do corpo.

Resolução

Alternativa D

A força de interação gravitacional entre o corpo e o planeta é sempre atrativa e tem seu módulo dado por:

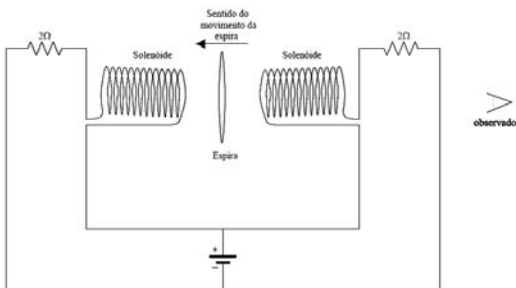
$$|\vec{F}_G| = \frac{G \cdot M \cdot m}{(D+r)^2}$$

Assim, a aceleração do corpo de massa m será dada por:

$$m \cdot |\vec{a}| = \frac{G \cdot M \cdot m}{(D+r)^2} \Leftrightarrow |\vec{a}| = \frac{G \cdot M}{(D+r)^2}$$

Observe que essa aceleração depende da massa do planeta, mas não da massa do corpo. Além disso, entendendo que o enunciado descreva a situação em que o corpo tem não somente a sua aceleração dirigida para o centro do planeta, mas também sua velocidade, à medida que o corpo se aproxima do planeta, atraído pela força gravitacional, a distância diminui, o que por sua vez aumenta o módulo da aceleração, já que esta é inversamente proporcional ao quadrado da distância.

QUESTÃO 23



A figura acima apresenta um circuito composto por dois solenóides com resistências desprezíveis e dois resistores de 2Ω ligados a uma bateria. Uma corrente é induzida em uma espira situada entre os dois solenóides quando esta se desloca da direita para a esquerda, a partir da posição equidistante em relação aos solenóides. Sabendo-se que as influências mútuas dos campos magnéticos no interior de cada solenóide são desprezíveis, pode-se afirmar que o valor da tensão da bateria em volts e o sentido da corrente induzida na espira para o observador são:

- Dados:
- Campo magnético no interior de cada solenóide: $4 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
 - Permeabilidade magnética no vácuo: $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$
 - Número de espiras de cada solenóide: 10
 - Comprimento de cada solenóide: 4 cm

- $40/\pi$ e sentido anti-horário
- $80/\pi$ e sentido horário
- $80/\pi$ e sentido anti-horário
- $160/\pi$ e sentido horário
- $160/\pi$ e sentido anti-horário

Resolução

Alternativa X

Para um solenóide, o campo magnético em seu interior é dado por $B = \mu \cdot i \cdot \frac{n}{L}$, onde μ é a permeabilidade magnética do meio onde se encontra a espira (para nosso caso, consideramos $\mu \approx \mu_0$), i é a

corrente elétrica que passa pela bobina, n o número total de espiras na bobina e L o seu comprimento.

Como $\varepsilon = R \cdot i$, com ε sendo a f.e.m. procurada, substituindo a equação anterior nesta, obtemos:

$$\varepsilon = \frac{R \cdot B \cdot L}{\mu_0 \cdot n} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{80}{\pi} \text{ V}$$

Infelizmente a banca do IME cometeu um descuido na figura que representa os solenóides. Dessa forma, não é possível determinar o sentido de rotação da corrente (horário ou anti-horário).

O mesmo tipo de descuido ocorreu na prova da FUVEST-2009 e da AFA-2010, como pode ser visto nos gabaritos online do Elite Campinas.

Observe as figuras abaixo, que são uma ligeira modificação da figura original, apenas para ilustrar as possíveis interpretações:

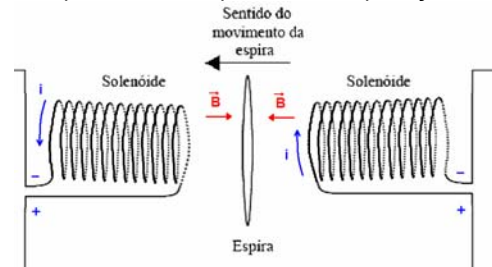


Figura 1: Sentido horário da corrente na espira, inferido pela regra da mão direita, como a banca provavelmente imaginou a situação descrita, pois, pela lei de Lenz, a espira se comporta como um ímã de corrente induzida, sendo o lado **esquerdo** (na figura) um pólo **norte** e o seu lado **direito** um pólo **sul**, de tal forma que a espira é "freada", sendo repelida pelo campo \vec{B} da esquerda e atraída pelo campo \vec{B} da direita.

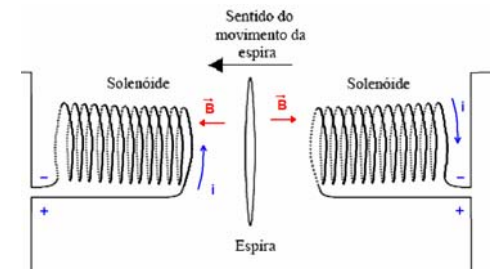
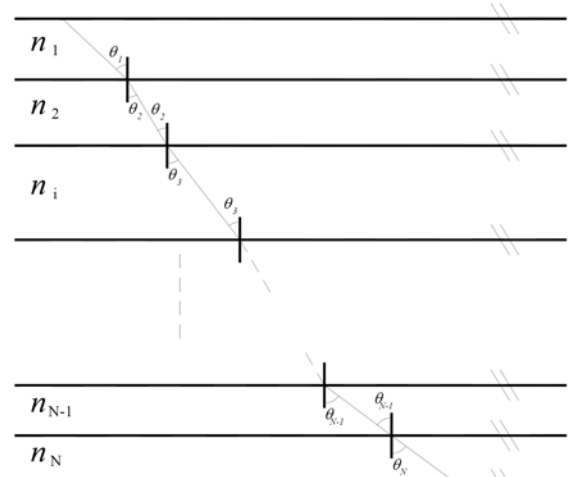


Figura 2: Em uma outra interpretação, podemos claramente prever um sentido anti-horário para a corrente induzida na espira, inferido pela regra da mão direita, pois, pela lei de Lenz, a espira se comporta como um ímã de corrente induzida, sendo o seu lado **direito** um pólo **norte** e o seu lado **esquerdo** um pólo **sul**, de tal forma que a espira é "freada", sendo atraída pelo campo \vec{B} da direita e repelida pelo campo \vec{B} da esquerda.

Poderíamos ainda, encontrar mais duas situações, uma vez que cada solenóide tem duas interpretações possíveis, num total de quatro possíveis montagens para o experimento descrito.

QUESTÃO 24



Considere um meio estratificado em N camadas com índices de refração n_i , como mostrado na figura acima, onde estão destacados os raios traçados por uma onda luminosa que os atravessa, assim como seus respectivos ângulos com as normais a cada interface.

Se $n_{i+1} = n_i / 2$ para $i=1,2,3,\dots,N-1$ e $\text{sen}\theta_N = 1024\text{sen}\theta_1$, então N é igual a:

Observações:

- A escala da figura não está associada aos dados.
- Admite-se que sempre ocorrerá a refração.

- a) 5
b) 6
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução

Alternativa E

Com a relação dada, temos que $\frac{n_i}{n_{i+1}} = 2$, temos:

$\frac{n_1}{n_2} = 2, \frac{n_2}{n_3} = 2, \frac{n_3}{n_4} = 2, \dots, \frac{n_{N-1}}{n_N} = 2$, logo, se multiplicarmos todas as frações de índices de refração, teremos:

$$\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_{N-1}}{n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot \dots \cdot n_N} = 2^{N-1}$$

Como o numerador de cada fração, a partir da segunda, é igual ao denominador da fração anterior, o produto de frações pode ser reduzido a:

$$\boxed{\frac{n_1}{n_N} = 2^{N-1}} \quad (1)$$

Com a refração em cada superfície, temos, pela Lei de Snell:

$$\text{sen}\theta_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \text{sen}\theta_i$$

E, então, outra sequência:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_1; \text{sen}\theta_3 = \frac{n_2}{n_3} \text{sen}\theta_2; \dots; \text{sen}\theta_N = \frac{n_{N-1}}{n_N} \text{sen}\theta_{N-1}$$

Novamente, se multiplicarmos os dois lados de todas as igualdades acima, teremos:

$$\text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\theta_3 \cdot \dots \cdot \text{sen}\theta_N = \frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_1 \cdot \frac{n_2}{n_3} \text{sen}\theta_2 \cdot \dots \cdot \frac{n_{N-1}}{n_N} \text{sen}\theta_{N-1} \Rightarrow$$

$$(\text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\theta_3 \cdot \dots \cdot \text{sen}\theta_{N-1}) \cdot \text{sen}\theta_N =$$

$$= \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \frac{n_{N-1}}{n_N} \text{sen}\theta_1 \cdot (\text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\theta_3 \cdot \dots \cdot \text{sen}\theta_{N-1}) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta_N = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \frac{n_{N-1}}{n_N} \text{sen}\theta_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{sen}\theta_N = \frac{n_1}{n_N} \text{sen}\theta_1}$$

Do enunciado:

$$\text{sen}\theta_N = 1024\text{sen}\theta_1$$

Logo:

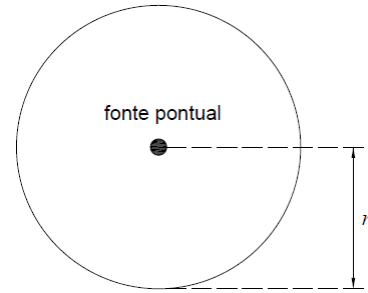
$$\frac{n_1}{n_N} = 1024$$

Substituindo em (1):

$$1024 = 2^{N-1} \Rightarrow 2^{10} = 2^{N-1}$$

$$\boxed{N = 11}$$

QUESTÃO 25



A figura acima apresenta uma fonte sonora pontual que emite uma onda harmônica esférica em um meio não dispersivo. Sabendo que a média temporal da intensidade da onda é diretamente proporcional ao quadrado da sua amplitude, pode-se afirmar que a amplitude a uma distância r da fonte é proporcional a:

- a) $1/r^{1/2}$ b) $1/r$ c) $1/r^{3/2}$ d) $1/r^2$ e) $1/r^3$

Resolução

Alternativa B

Supondo que a potência P da fonte emissora de ondas possa ser considerada constante, temos que, a uma distância r da fonte, a intensidade da onda esférica é dada por:

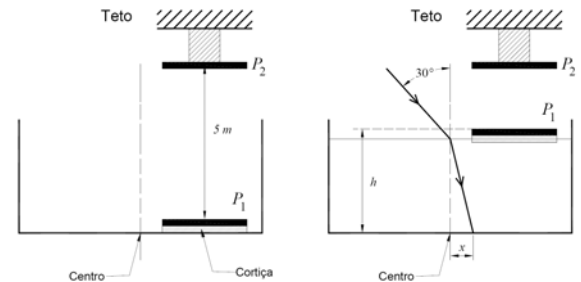
$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Por outro lado, sendo a intensidade I da onda emitida diretamente proporcional ao quadrado da amplitude A , podemos escrever que $I = kA^2$, para alguma constante de proporcionalidade k . Assim:

$$kA^2 = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow A = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{P}{k\pi}}$$

Isto é, a amplitude A é proporcional a $\frac{1}{r}$.

QUESTÃO 26



Uma fina placa metálica P_1 , apoiada em um tablete de cortiça no fundo de um frasco cilíndrico, dista 5 metros de uma placa idêntica P_2 , fixa no teto, conforme a figura acima. As duas placas formam um capacitor carregado com Q coulombs.

Enche-se o referido frasco com um líquido de índice de refração $n = 2,5$, até a altura de h metros. Em seguida, lança-se sobre o centro da superfície um raio de luz monocromática, sob um ângulo de 30° com a vertical.

Sabendo que a energia armazenada no capacitor fica reduzida a 0,6 do valor inicial, que o raio refratado atinge um ponto situado a x metros do centro do fundo do frasco e desprezando o efeito de borda do capacitor, podemos dizer que o valor aproximado de x é:

Observação:

- A espessura da cortiça é desprezível em relação à altura h .

- a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3 d) 0,4 e) 0,5

Resolução

Alternativa D

Consideremos a situação inicial, com a capacitância C e final, com capacitância C' .

Temos que:

$$\begin{cases} C = \varepsilon \frac{A}{d} & (I) \\ C' = \varepsilon \frac{A}{d'} & (II) \end{cases}$$

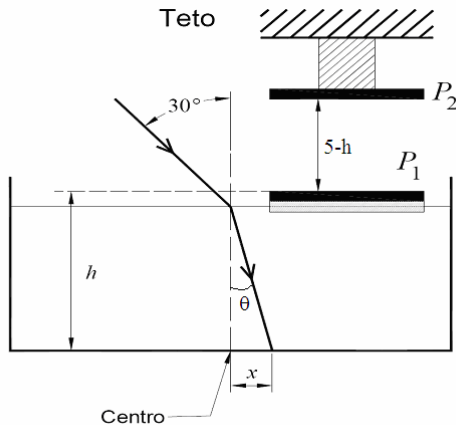
onde ε é a constante dielétrica do ar, A é a área das placas, $d = 5$ m e $d' = (5 - h)$ m.

Temos ainda as energias armazenadas E e E' dadas por:

$$\begin{cases} E = \frac{Q^2}{2 \cdot C} & (III) \\ E' = \frac{Q^2}{2 \cdot C'} & (IV) \end{cases}$$

Substituindo respectivamente, (I) em (III), e (II) em (IV):

$$E \cdot C = E' \cdot C' \Leftrightarrow E \cdot \left(\varepsilon \frac{A}{d}\right) = (0,6E) \cdot \left(\varepsilon \frac{A}{d'}\right) \Leftrightarrow d' = 0,6 \cdot d \Leftrightarrow 5 - h = 0,6 \cdot 5 \Leftrightarrow h = 2 \text{ m}$$



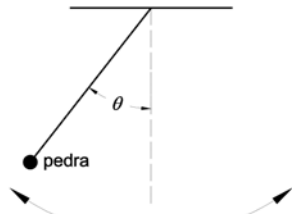
Supomos que o experimento está no ar ($n_{ar} = 1$), temos para a refração:

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin \theta} = \frac{n}{n_{ar}} \Leftrightarrow \frac{1/2}{\sin \theta} = \frac{2,5}{1} \Leftrightarrow \sin \theta = 0,2$$

Como $\sin \theta$ é um valor pequeno, podemos aproximar:

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{h} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0,4 \text{ m}$$

QUESTÃO 27



Uma pedra está presa a um fio e oscila da maneira mostrada na figura acima. Chamando T a tração no fio e θ o ângulo entre o fio e a vertical, considere as seguintes afirmativas:

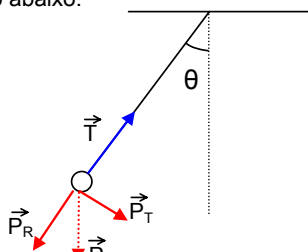
- I) O módulo da força resultante que atua na pedra é igual a $T \sin \theta$.
 - II) O módulo da componente, na direção do movimento, da força resultante que atua na pedra é máximo quando a pedra atinge a altura máxima.
 - III) A componente, na direção do fio, da força resultante que atua na pedra é nula no ponto em que a pedra atinge a altura máxima.
- Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

- a) I e II, apenas
- b) I e III, apenas
- c) II e III, apenas
- d) I, II e III
- e) II, apenas

Resolução

Alternativa C

Observe a ilustração abaixo:



A força resultante possui duas componentes: a tangencial (tangente à trajetória da pedra) e a centrípeta (na direção do fio, sentido da pedra para o ponto de ligação do fio com o teto).

Essas componentes da força resultante são dadas por

$$R_{cp} = T - P_R$$

ou

$$R_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{L}$$

e

$$R_T = P_T = m \cdot g \cdot \sin \theta$$

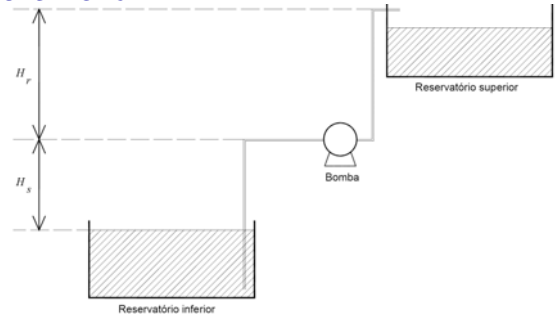
sendo v a velocidade da pedra, m a sua massa, g a aceleração da gravidade e L o comprimento do fio.

Analisando essas componentes, verificamos que R_{cp} é nula nos pontos de máximo deslocamento em relação ao centro, onde a velocidade da pedra é nula, o que **confirma a afirmativa III**, e máxima no ponto central da trajetória, onde a velocidade da pedra é máxima. R_T é nula no ponto central da trajetória, onde $\theta = 0^\circ$, e máxima nos pontos de máximo deslocamento em relação ao centro, onde $\sin \theta$ tem valor máximo, o que **confirma a afirmativa II**.

Como as duas forças são perpendiculares entre si e como elas se anulam em pontos diferentes, não há nenhum ponto da trajetória no qual a força resultante seja nula.

Essa análise é incompatível com a primeira afirmativa, segundo a qual a força resultante seria nula no ponto central, onde $\theta = 0^\circ$. Logo, **afirmativa I é falsa**.

QUESTÃO 28



A figura acima representa o sistema de bombeamento de água de uma residência. As alturas de sucção (H_s) e recalque (H_r) valem, respectivamente, 10 e 15 m. O sistema é projetado para trabalhar com uma vazão de $54 \text{ m}^3/\text{h}$. A bomba que efetua o recalque da água é acionada por um motor elétrico, de corrente contínua, que é alimentado por uma tensão de 200 V. A corrente de operação do motor, em ampères, para que o sistema opere com a vazão projetada é, aproximadamente:

Observação:

- as perdas internas do motor elétrico e da bomba são desprezíveis.

Dados:

- as perdas devido ao acoplamento entre o motor e a bomba são de 30%;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$;
- massa específica da água: 1 kg/L

- a) 13 b) 19 c) 27 d) 33 e) 39

Resolução

Alternativa C

A vazão do sistema é dada por:

$$54 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 54 \cdot \frac{10^3 \text{ dm}^3}{3600 \text{ s}} = 15 \text{ dm}^3/\text{s} = 15 \text{ L/s}$$

Como a massa específica da água é 1 kg/L , essa vazão pode ainda ser expressão em termos da massa, ao invés do volume, como:

$$\frac{m}{\Delta t} = 15 \text{ kg/s}$$

Num determinado intervalo de tempo Δt , a bomba deve conduzir uma massa m de água desde o reservatório inferior até o reservatório superior, produzindo uma variação de altura:

$$\Delta h = H_s + H_r = 10 + 15 = 25 \text{ m}$$

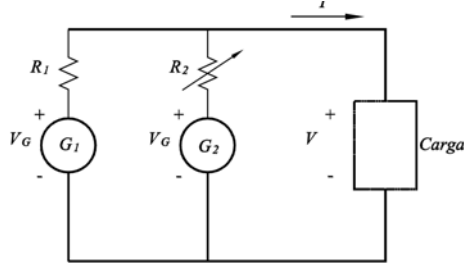
Para tanto, a potência útil P_U do sistema deve ser:

$$P_U = \frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t} = \left(\frac{m}{\Delta t}\right) \cdot g \cdot \Delta h = 15 \cdot 10 \cdot 25 = 3750 \text{ W}$$

Como 30% da potência total $P_T = U \cdot i$ fornecida pelo motor é perdida, o rendimento η do sistema é igual a 70%. Assim:

$$\eta = \frac{P_U}{P_T} \Leftrightarrow 0,7 = \frac{3750}{200 \cdot i} \Leftrightarrow i \approx 26,8 \text{ A}$$

QUESTÃO 29



Um sistema composto por dois geradores denominados G_1 e G_2 , cuja tensão de saída é V_G , é apresentado na figura acima. Este sistema alimenta uma carga que opera com uma tensão V e demanda da rede uma corrente I . O valor de R_2 em função de R_1 , de modo que o gerador G_2 atenda 40% da potência da carga, é:

- a) $1/2 R_1$ b) R_1 c) $3/2 R_1$
d) $2 R_1$ e) $5/2 R_1$

Resolução **Alternativa C**

Sendo a potência da carga $P = V \cdot I$, então as potências fornecidas pelos geradores G_1 e G_2 na carga são proporcionais, respectivamente, às correntes I_1 e I_2 fornecidas por eles:

$$P_1 = V \cdot I_1$$

$$P_2 = V \cdot I_2$$

Logo:

$$P_2 = 0,4 \cdot P = 0,4 \cdot (P_1 + P_2)$$

$$V \cdot I_2 = 0,4 \cdot (V \cdot I_1 + V \cdot I_2)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Ao passar pelos geradores e resistores, as correntes são responsáveis pelas seguintes diferenças de potencial:

$$V = V_G - R_1 \cdot I_1 = V_G - R_2 \cdot I_2$$

$$R_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot R_1 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$R_2 = \frac{3}{2} \cdot R_1$$

QUESTÃO 30

A água que alimenta um reservatório, inicialmente vazio, escoar por uma tubulação de 2 m de comprimento e seção reta circular. Percebe-se que uma escala no reservatório registra um volume de 36 L após 30 min de operação. Nota-se também que a temperatura na entrada da tubulação é 25 °C e a temperatura na saída é 57 °C. A água é aquecida por um dispositivo que fornece 16,8 kW para cada metro quadrado da superfície do tubo. Dessa forma, o diâmetro da tubulação, em mm, e a velocidade da água no interior do tubo, em cm/s, valem, respectivamente:

Dados:

- $\pi/4 = 0,8$;
- massa específica da água: 1 kg/L; e
- calor específico da água: 4200 J/(kg°C).

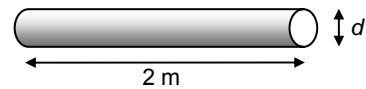
- a) 2,5 e 40 b) 25 e 4 c) 25 e 40
d) 2,5 e 4 e) 25 e 0,4

Resolução

Alternativa B

A área lateral de um cilindro de diâmetro $d = 2R$ e altura h é dada por:

$$S = 2\pi \cdot R \cdot h = \pi \cdot d \cdot h$$



Sabendo que em 30 minutos ($= 30 \cdot 60 \text{ s} = 1800 \text{ s}$), o reservatório recebeu um volume de 36 litros (correspondentes a 36 kg) de água, a potência absorvida por esse volume de água é dada por:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = \frac{36 \cdot 4200 \cdot (57 - 25)}{1800} = 2688 \text{ W}$$

Como o dispositivo fornece 16,8 kW para cada 1 m² da superfície lateral do tubo (cilindro), temos:

$$16800 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot S = 2688 \Leftrightarrow S = 0,16 \text{ m}^2$$

Assim, usando a aproximação $\pi \approx 0,8 \cdot 4 = 3,2$, vem que:

$$S = \pi \cdot d \cdot h \Leftrightarrow 0,16 = 3,2 \cdot d \cdot 2 \Leftrightarrow d = 0,025 \text{ m} \Leftrightarrow d = 25 \text{ mm}$$

Além disso, admitindo a vazão $\frac{V}{\Delta t}$ como constante, e sendo a seção transversal (A) da tubulação que alimenta o reservatório:

$$A = \pi \cdot R^2 \approx 3,2 \cdot \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 = 5 \text{ cm}^2, \text{ temos:}$$

$$\frac{V}{\Delta t} = A \cdot v \Leftrightarrow \frac{36 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}{1800 \text{ s}} = (5 \text{ cm}^2) \cdot v \Leftrightarrow v = 4 \text{ cm/s}$$

QUÍMICA

QUESTÃO 31

Um recipiente de paredes rígidas, contendo apenas ar, aberto para a atmosfera, é aquecido de 27 °C a 127 °C. Calcule a percentagem mássica de ar que saiu do recipiente, quando atingido o equilíbrio final.

- a) 79%
b) 75%
c) 30%
d) 25%
e) 21%

Resolução

Alternativa D

Como as alternativas estão em valores relativos, podemos estabelecer um valor fixo do volume do recipiente e da pressão do ambiente. Para facilitar os cálculos, assumiremos que o volume do recipiente é de 1 L e a pressão é 1 atm.

Nesse caso, para efeito de cálculos, podemos assumir que o ar é uma substância.

Calculando o número de mols de ar dentro do recipiente

I) na situação inicial, temos:

$$PV = nRT$$

$$1 \text{ atm} \times 1 \text{ L} = n \cdot (0,082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K})$$

$$n = 0,04065 \text{ mol}$$

II) na situação final, temos:

$$PV = nRT$$

$$1 \text{ atm} \times 1 \text{ L} = n \cdot (0,082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (400 \text{ K})$$

$$n = 0,03049 \text{ mol}$$

Portanto, ao aquecer o recipiente, 0,01016 mol de ar saiu do mesmo, o que representa 25% de 0,04065 mol. Portanto alternativa D.

QUESTÃO 32

Sabendo que 18,0 g de um elemento X reagem exatamente com 7,75 g de oxigênio para formar um composto de fórmula X_2O_5 , a massa de um mol de X é:

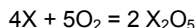
- a) 99,2 g
b) 92,9 g
c) 74,3 g
d) 46,5 g
e) 18,6 g

Resolução

Alternativa B

A massa molar do O_2 é $32 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, portanto $7,75 \text{ g}$ de oxigênio equivalem a $0,2422 \text{ mol}$ de O_2 .

Pelo enunciado podemos escrever a seguinte equação química balanceada:



Com essa equação podemos afirmar que para cada 5 mols de O_2 consumidos são consumidos 4 mols de X. Sabendo-se o número de mols de O_2 consumidos podemos escrever a relação a seguir:

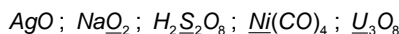
$$\begin{cases} 5 \text{ mol } O_2 \longleftrightarrow 4 \text{ mol } X \\ 0,2422 \text{ mol } O_2 \longleftrightarrow w \text{ mol } X \end{cases} \Rightarrow w = 0,1938$$

O enunciado diz que a massa de X consumida era de $18,0\text{g}$. Portanto a massa molar de X será:

$$M = \frac{18,0\text{g}}{0,1938 \text{ mol}} = 92,9 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

QUESTÃO 33

Marque a resposta certa, correspondente aos números de oxidação dos elementos sublinhados em cada fórmula, na ordem em que estão apresentados.



- a) +2; -1; +7; +2 e +8/3
- b) +1; -1; +7; 0 e +16/3
- c) +2; -1/2; +6; 0 e +16/3
- d) +1; -1/2; +7; +2 e +16/3
- e) +2; -1; +6; +2 e +8/3

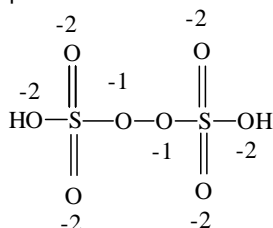
Resolução

Alternativa C

AgO: Sabendo-se que o número de oxidação do oxigênio é -2 e que se trata de uma substância neutra, o número de oxidação da prata é +2. Este Nox é pouco comum para a prata, sendo mais comumente encontrada com Nox +1. Porém Ag^{2+} forma alguns poucos compostos binários como AgF_2 e o íon Ag^{2+} é um poderoso oxidante (alto potencial de redução), indicando sua alta tendência de se transformar no íon Ag^+ .

NaO₂: O número de oxidação do sódio é +1 e se trata de uma molécula neutra, a carga do O_2 é -1, ou seja se trata de um superóxido, em que o número de oxidação de cada O é -1/2.

H₂S₂O₈: a fórmula estrutural dessa molécula e o estado de oxidação dos oxigênios estão representados abaixo:



Por se tratar de um peróxido, temos dois oxigênios com estado de oxidação -1, e 6 oxigênios com estado de oxidação -2. Como se trata de uma molécula neutra, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum \text{Nox}(H) + \sum \text{Nox}(S) + \sum \text{Nox}(O) &= 0 \Rightarrow \\ 2 \cdot (+1) + 2 \cdot \text{Nox}(S) + 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) &= 0 \Rightarrow \\ \text{Nox}(S) &= \frac{-2+12+2}{2} = +6 \end{aligned}$$

Portanto o número de oxidação do enxofre é +6.
Ni(CO)₄: como o CO é uma molécula neutra e o composto também não apresenta carga, o número de oxidação do Ni é 0.
U₃O₈: O número de oxidação do oxigênio é -2. Como temos 8 oxigênios, o total de cargas negativas é 16. Por se tratar de uma molécula neutra o número de oxidação do urânio deve ser +16/3.

QUESTÃO 34

Considere as espécies de (I) a (IV) e o arcabouço da Tabela Periódica representados a seguir. Assinale a alternativa correta.

(I) (II) (III) (IV)

- a) A espécie (II) é um gás nobre.
- b) A camada de valência da espécie (I) pode ser representada por: ns^2np^5 .
- c) A camada de valência da espécie (III) pode ser representada por: ns^2np^6 .
- d) A espécie (IV) é um metal eletricamente neutro.
- e) As espécies (I) e (III) são cátions.

Resolução

Alternativa C

- a) Falso. A camada de valência da espécie II é $3s^1$ e por isso esta não é um gás nobre.
- b) Falso. A camada de valência da espécie I é $2s^22p^6$.
- c) Verdadeiro. Pode-se ver que a camada de valência da espécie III é $3s^23p^6$.
- d) Falso. A espécie IV é um gás nobre (valência $2s^22p^6$).
- e) Falso. A espécie I é um ânion (possui mais elétrons que prótons) e a III é um cátion (possui mais prótons que elétrons).

QUESTÃO 35

O número máximo de aldeídos que podem ser obtidos pela ozonólise de uma mistura dos hidrocarbonetos com fórmula molecular C_5H_{10} é:

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

Resolução

Alternativa B

Existem 5 alcenos com a fórmula molecular C_5H_{10} : pent-1-eno, pent-2-eno, 2-metil-but-1-eno, 3-metil-but-1-eno e 2-metil-but-2-eno. Os produtos da ozonólise dos alcenos estão indicados na tabela a seguir:

ALCENO	PRODUTO 1	PRODUTO 2
pent-1-eno	Metanal	Butanal
pent-2-eno	Etanal	Propanal
2-metil-but-1-eno	Metanal	Butanona
3-metil-but-1-eno	Metanal	Metil-propanal
2-metil-but-2-eno	Etanal	Propanona

São formados, portanto, 5 aldeídos diferentes: Metanal, Etanal, Butanal, Propanal e Metil-propanal.

QUESTÃO 36

A entalpia de fusão de uma determinada substância é 200 kJ/kg , e seu ponto de fusão normal é 27°C . Após a solidificação de 3 kg do material, pode-se afirmar que a entropia desse sistema:

- a) diminuiu 2 kJ/K .
- b) diminuiu 600 kJ/K .
- c) não variou.
- d) aumentou 2 kJ/K .
- e) aumentou 600 kJ/K .

Resolução

Alternativa A

Quando uma substância está no seu ponto de fusão, a variação energia livre de Gibbs é 0 até que toda a substância funda ou solidifique. O enunciado diz que a substância está passando do estado líquido para o sólido (veja nota), ou seja um processo exotérmico, o que implica que a variação da entalpia é negativa ou seja $\Delta H = -200 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Assim, para a solidificação de 3 kg , temos:

$$\begin{aligned} \Delta G &= \Delta H - T\Delta S \\ 0 &= -600 \text{ kJ} - 300\text{K} \cdot \Delta S \\ \Delta S &= -\frac{600}{300} \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1} = -2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Note que, conforme demonstrado pela equação, para o processo de solidificação o ΔS é negativo, pois o nível de desordem do sistema está se reduzindo. Portanto a entropia do sistema **diminuiu $2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}$** .

NOTA: Assumiu-se para a resolução desta questão que a solidificação da substância não é total (de modo a garantir temperatura constante) e que a solidificação ocorre a pressão constante. Sem estas informações a solução da questão fica impossível. A questão deixou a desejar por falta de precisão e rigor em seu enunciado.

QUESTÃO 37

Em sistemas envolvendo reações paralelas, um importante parâmetro é a seletividade (*se*), definida como a razão entre as taxas de geração dos produtos de interesse (*I*) e dos secundários (*S*).

Considere o caso em que a taxa de produção de *I* é dada por $K_I C_r^\xi$ e a de *S* por $K_S C_r^\gamma$, onde:

- C_r é a concentração do reagente;
- K_I e K_S são as velocidades específicas de reação para *I* e *S*, respectivamente;
- ξ e γ são dois números inteiros e positivos.

Para uma temperatura constante, pode-se afirmar que a seletividade:

- a) permanece constante independentemente de C_r .
- b) permanece constante quaisquer que sejam os valores de ξ e γ .
- c) é maior no início da reação quando $\xi = \gamma$.
- d) é menor no fim da reação quando $\xi < \gamma$.
- e) é maior no início da reação quando $\xi > \gamma$.

Resolução

Alternativa E

Considerando a descrição do enunciado sobre o conceito de seletividade, podemos escrever a seguinte expressão:

$$(se) = \frac{I}{S} = \frac{K_I C_r^\xi}{K_S C_r^\gamma} = \frac{K_I}{K_S} C_r^{(\xi-\gamma)}$$

Para o sistema em estudo, as velocidades específicas das reações de produção dos produtos de interesse e dos produtos secundários, respectivamente, K_I e K_S , variam somente com a temperatura. Como no enunciado se considera a temperatura constante, então a relação

$\frac{K_I}{K_S}$ é constante também.

Percebemos então que a seletividade (*se*) varia apenas com o termo $C_r^{(\xi-\gamma)}$. Quanto maior for este termo, maior será a seletividade do sistema envolvendo reações paralelas.

Como ξ e γ são dois números inteiros e positivos, temos:

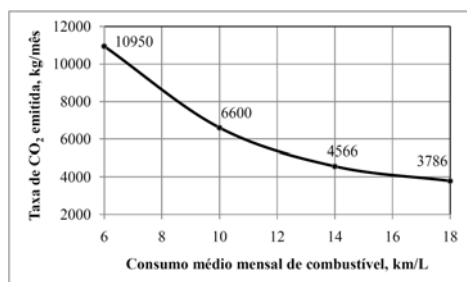
- I) Para $\xi - \gamma = 0$, $(se) = \frac{K_I}{K_S} C_r^{(\xi-\gamma)}$ é **constante**.
- II) Para $\xi - \gamma > 0$, $(se) = \frac{K_I}{K_S} C_r^{(\xi-\gamma)}$ é **maior** quanto **maior** for C_r .
- III) Para $\xi - \gamma < 0$, $(se) = \frac{K_I}{K_S} C_r^{(\xi-\gamma)}$ é **menor** quanto **maior** for C_r .

A concentração do reagente (C_r), é maior no início da reação, já que no decorrer da reação o reagente é consumido e sua concentração diminui.

Então a seletividade (*se*) será maior no início da reação para $\xi > \gamma$.

QUESTÃO 38

A taxa de emissão de dióxido de carbono em função do consumo médio de certo combustível, em um carro de testes, é apresentada a seguir.



Para um consumo médio de 10 km/L, a massa total mensal de combustível consumida é 2175 kg. Dentre as opções abaixo, pode-se afirmar que o combustível testado foi o:

- a) metano
- b) propano
- c) butano
- d) heptano
- e) octano

Resolução

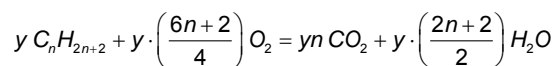
Alternativa C

Através do gráfico, sabe-se que a produção de CO₂ mensal, para um veículo que tem um consumo de 10 km/L, é de 6600 kg. Como a massa molar do CO₂ é 44 g.mol⁻¹, temos que o número de mols de CO₂ produzido em um mês é dado por:

$$\frac{6,6 \cdot 10^6 \text{ g}}{44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ mols}$$

As alternativas apresentam somente hidrocarbonetos saturados como soluções, e estes por sua vez apresentam fórmula geral C_nH_{2n+2}.

Portanto, podemos escrever a seguinte equação química, onde *y* é um número para igualar a estequiometria:



Como foram produzidos 1,5 10⁵ mol de CO₂, podemos escrever que:

$$y \cdot n = 1,5 \cdot 10^5 \quad (I)$$

Sendo a massa molar do carbono (C) igual a 12 g.mol⁻¹ e a massa molar do hidrogênio (H) igual a 1 g.mol⁻¹, temos que a massa molar do hidrocarboneto é dada por 12n + (2n + 2) = (14n + 2) g.mol⁻¹.

Dessa maneira, ao multiplicarmos a massa molar do hidrocarboneto por *y*, temos a massa consumida em gramas do mesmo, sendo essa igual a 21,75 10⁵ g.

$$y \cdot (14n + 2) = 21,75 \cdot 10^5 \quad (II)$$

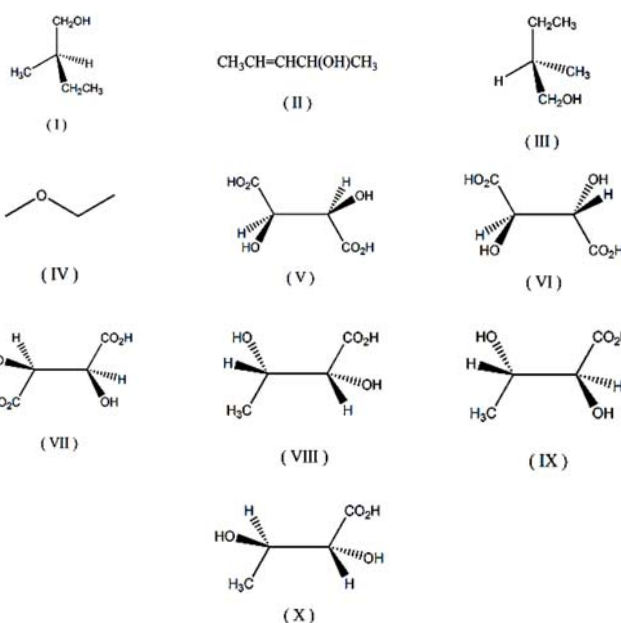
Dividindo (II) por (I) membro a membro, vem que:

$$\frac{14n+2}{n} = \frac{29}{2} \Leftrightarrow n = 4$$

Dessa maneira o hidrocarboneto tem 4 carbonos, ou seja, trata-se do butano.

QUESTÃO 39

Observe as estruturas abaixo e analise as afirmativas feitas sobre elas.



- 1 – As estruturas (I) e (IV) representam isômeros constitucionais.
- 2 – As estruturas (I) e (III) representam um par de enantiômeros.
- 3 – Existem quatro estereoisômeros que têm a fórmula estrutural condensada (II).
- 4 – Os compostos (V) e (VII) apresentam pontos de fusão idênticos.

- 5 – As estruturas (VIII) e (IX) representam um par de diastereoisômeros.
6 – Todos os compostos (V) a (X) apresentam atividade óptica.
7 – As estruturas (VIII) e (X) são representações do mesmo composto.

Podemos concluir que são verdadeiras as afirmativas:

- a) 1, 3 e 5
b) 2, 5 e 6
c) 1, 4 e 7
d) 3, 4 e 5
e) 3, 6 e 7

Resolução

Alternativa D

Afirmiação 1: Falsa. As estruturas I e IV não são isômeras, pois não tem a mesma fórmula molecular. I tem fórmula $C_5H_{12}O$ e IV tem fórmula C_3H_8O .

Afirmiação 2: Falsa. As estruturas I e III representam o mesmo composto.

Afirmiação 3: Verdadeira. Os quatro estereoisômeros são: d-cis-pent-3-en-2-ol, l-cis-pent-3-en-2-ol, d-trans-pent-3-en-2-ol, l-trans-pent-3-en-2-ol.

Afirmiação 4: Verdadeira. Os compostos V e VII são enantiômeros por isso possuem mesmo ponto de fusão.

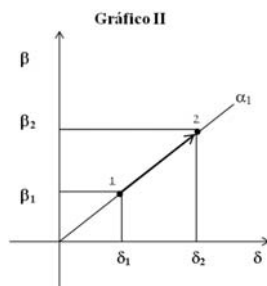
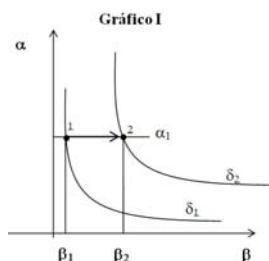
Afirmiação 5: Verdadeira. Os compostos VIII e IX são diastereoisômeros, pois os carbonos quirais tem configuração absoluta diferentes. No composto VIII os carbonos tem configuração S e R e no composto IX tem configuração S e S.

Afirmiação 6: Falsa. Os compostos VI e VII são mesômeros (possuem plano de simetria) sendo opticamente inativos.

Afirmiação 7: Falsa. Os compostos VIII e X são diastereoisômeros, pois os carbonos quirais tem configuração absoluta diferentes. No composto VIII os carbonos tem configuração S e R e no composto IX tem configuração R e R.

QUESTÃO 40

Um gás ideal sofre uma mudança de estado ilustrada pelos gráficos I e II abaixo.



Dentre as alternativas abaixo, assinale aquela que se ajusta aos gráficos acima.

- a) α é o volume, β é a temperatura, δ é a pressão e o processo é uma expansão a temperatura constante.
b) δ é a temperatura, β é a pressão, α é o volume e o processo é uma compressão.
c) α é o volume, β é a pressão, δ é a temperatura e o processo é um resfriamento isobárico.
d) α é o volume, β é a temperatura, δ é a pressão e o processo é uma compressão isotérmica.
e) α é a pressão, β é o volume, δ é a temperatura e o processo é um aquecimento isobárico.

Resolução

Alternativa E

Observe que as alternativas a à d dizem que α é o volume do gás. Pelo gráfico I, isso exigiria que a transformação sofrida pelo gás fosse isovolumétrica. No entanto, todas estas alternativas sugerem transformações com variação de volume do gás e por isso estão incorretas.

A alternativa e sugere que α é a pressão, o que nos indica que a transformação é isobárica. Se β for o volume e δ a temperatura, então o gráfico I representa o típico gráfico $p \times V$ com as isotermas δ_1 e δ_2 e o gráfico II nos mostra um gráfico $V \times T$, sendo que $V = \left(\frac{n \cdot R}{P}\right) \cdot T \Rightarrow V = k \cdot T$ representa corretamente a reta do gráfico em questão.

Equipe desta resolução

Matemática

Felipe Mascagna Bittencourt Lima
Rafael da Gama Cavallari
Rodrigo do Carmo Silva

Física

Danilo José de Lima
Rodrigo Araújo
Vinício Merçon Poltronieri

Química

Fabiana Ocampos
Roberto Bineli Muterle
Vinícius Garcia Freaza

Revisão

Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani
Vagner Figueira de Faria

Digitação, Diagramação e Publicação

Carolina Marcondes Machado
Fábio Henrique Mendonça Chaim