

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
**c a m p i n a s**

*Resolve*

**IME 2010**

**MATEMÁTICA**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**

**MATEMÁTICA**

**QUESTÃO 01**

Sejam os conjuntos  $P_1, P_2, S_1$  e  $S_2$  tais que  $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$ ,  $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$  e  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$ .

Demonstre que  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$ .

**Resolução**

Seja  $x \in (S_1 \cap S_2)$ . Pela definição de intersecção ( $\cap$ ) de conjuntos, segue que  $x \in S_1$  e  $x \in S_2$ .

Além disso, como  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$ , isto é, sendo  $(S_1 \cap S_2)$  um subconjunto de  $(P_1 \cap P_2)$ , então todo elemento de  $(S_1 \cap S_2)$  é também elemento de  $(P_1 \cap P_2)$ . Como  $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$ .

Por outro lado, pela definição de união ( $\cup$ ) de conjuntos, temos que  $x \in (P_1 \cup P_2) \Rightarrow x \in P_1$  ou  $x \in P_2$ .

Analisemos cada uma dessas duas possibilidades:

(I)  $x \in P_1$ :

Nesse caso, temos simultaneamente  $\begin{cases} x \in P_1 \\ x \in S_2 \end{cases} \Rightarrow x \in (P_1 \cap S_2)$

Como, por hipótese,  $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ , temos que  $x \in (P_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in P_2$ .

Assim, como  $x \in P_1$  e  $x \in P_2$ , segue que  $x \in (P_1 \cap P_2)$ .

(II)  $x \in P_2$ :

Nesse caso, temos simultaneamente  $\begin{cases} x \in P_2 \\ x \in S_1 \end{cases} \Rightarrow x \in (P_2 \cap S_1)$

Como, por hipótese,  $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$ , temos que  $x \in (P_2 \cap S_1) \Rightarrow x \in P_1$ .

Assim, como  $x \in P_2$  e  $x \in P_1$ , segue que  $x \in (P_1 \cap P_2)$ .

Observe que, em qualquer um dos casos, tomando um elemento  $x$  arbitrário no conjunto  $(S_1 \cap S_2)$ , mostramos que ele necessariamente pertence ao conjunto  $(P_1 \cap P_2)$ , isto é,  $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$ .

Isso é equivalente a afirmar que  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$ , como queríamos demonstrar.

**QUESTÃO 02**

Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

**Resolução**

**Solução 1:**

As possíveis configurações em que o primeiro dado tem como resultado a soma dos resultados dos outros dois dados são:

$$2 = 1+1, 3 = \begin{cases} 1+2 \\ 2+1 \end{cases}, 4 = \begin{cases} 1+3 \\ 2+2 \\ 3+1 \end{cases}, 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 3+2 \\ 4+1 \end{cases}$$

Observe que temos um total de  $1+2+3+4+5=15$  casos possíveis para que o resultado do primeiro dado seja a soma dos resultados dos outros dois.

De maneira análoga, também poderíamos ter o resultado do segundo ou do terceiro dado como soma dos resultados dos outros dois. Assim, existe um total de  $3 \cdot 15 = 45$  casos possíveis.

Sendo o número de elementos do espaço amostral dado por  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ , a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{45}{216} \Rightarrow p = \frac{5}{24}$$

**Solução 2:**

Veja a tabela dos possíveis resultados, considerando o resultado do Dado 3 como a soma dos dados 1 e 2. Note inicialmente, que, para que isto seja possível, a soma dos resultados dos dados 1 e 2 deve ser menor ou igual a 6:

Resultado Dado 1	Probabilidade de ocorrência	Resultados possíveis Dado 2	Probabilidade de ocorrência	Resultados possíveis Dado 3	Probabilidade de ocorrência
1	1/6	1, 2, 3, 4 ou 5	5/6	Um único resultado,	1/6
2	1/6	1, 2, 3 ou 4	4/6	dependendo	1/6
3	1/6	1, 2 ou 3	3/6	do resultado	1/6
4	1/6	1 ou 2	2/6	dos dados 1	1/6
5	1/6	1	1/6	e 2, uma vez que o resultado deste dado é a soma dos demais.	1/6
6	1/6	Nenhum	0	Nenhum	0

Assim a probabilidade de o resultado do dado 3 acima ser a soma dos resultados dos dados 1 e 2 é dada por:

$$p_{3=1+2} = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{5+4+3+2+1}{6} \right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{72}$$

Considerando que o exercício pede a probabilidade de o resultado de **qualquer dado** ser a soma dos resultados dos demais, a probabilidade solicitada é:  $p = 3 \times p_3 = 3 \times \frac{5}{72} = \frac{5}{24}$

**QUESTÃO 03**

Considere as hipérboles que passam pelos pontos  $(-4,2)$  e  $(-1,-1)$  e apresentam diretriz na reta  $y = -4$ . Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

**Resolução**

Por hipótese, a excentricidade de uma cônica é definida por  $e = \frac{d_{P,F}}{d_{P,d}}$ ,

onde F é um dos focos da cônica, d é a reta diretriz e P é um ponto qualquer da cônica. Chamando de  $F(x,y)$  os focos dessa hipérbole, a reta diretriz dada por  $y + 4 = 0$  e usando a definição de excentricidade para cada ponto dado, temos:

1)  $P(-4, 2)$ :

$$e = \frac{d_{P,F}}{d_{P,d}} = \frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{|2+4|} = \frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{6};$$

2)  $P(-1, -1)$ :

$$e = \frac{d_{P,F}}{d_{P,d}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{|-1+4|} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{3}$$

Como os pontos pertencem à uma mesma cônica, a excentricidade é a mesma. Logo:

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{6} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$4(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2) = x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4y - 4) + 8 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = 8,$$

que é uma circunferência de centro  $C(0, -2)$  e raio  $r = 2\sqrt{2}$ .

Além disso, a excentricidade da hipérbole é maior que 1, de modo que, a partir das duas expressões da excentricidade, temos:

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{6} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} > 6$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 > 6^2 \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} > 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 > 3^2 \quad (2)$$

Desse modo, devemos excluir todos os pontos que não satisfazem (1) e (2). Entretanto, como essas expressões são equivalentes (representam a mesma excentricidade), a condição fica restrita a  $(x+1)^2 + (y+1)^2 > 9$ . Assim:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \\ x^2 + (y+2)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 > 0 \\ x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 3 > 0 \Leftrightarrow y < x - \frac{3}{2}$$

Interceptando a reta  $y = x - \frac{3}{2}$  com a circunferência:

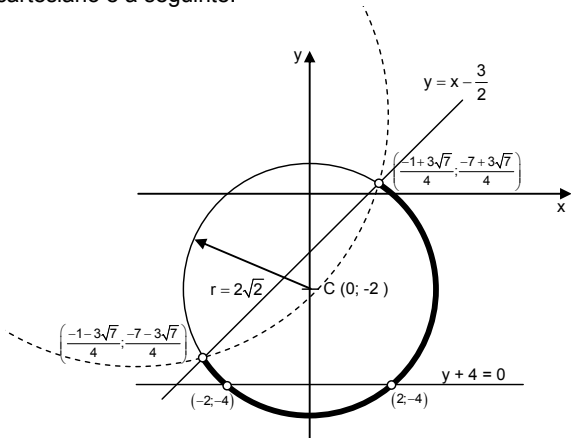
$$\begin{cases} y = x - 3/2 \\ x^2 + (y+2)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(x - \frac{3}{2} + 2\right)^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 + x - \frac{31}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{7}}{4}$$

Além disso, como o raio é maior do que 2, a reta diretriz intercepta tal circunferência. Assim, devemos eliminar os pontos de intersecção, já que os focos não pertencem à reta diretriz. Logo, devemos eliminar os pontos nos quais  $y = -4$ .

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 8 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Portanto, o lugar geométrico em questão é um arco de circunferência de centro  $C(0, -2)$  e raio  $r = 2\sqrt{2}$ , limitado superiormente pela reta  $y = x - \frac{3}{2}$ , excetuando-se os pontos  $\left(\frac{-1-3\sqrt{7}}{4}, \frac{-7-3\sqrt{7}}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{-1+3\sqrt{7}}{4}, \frac{-7+3\sqrt{7}}{4}\right)$ ,  $(2, -4)$  e  $(-2, -4)$ , cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

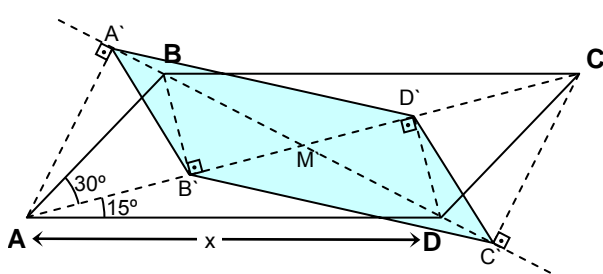


**QUESTÃO 04**

Seja  $x$  o valor do maior lado de um paralelogramo  $ABCD$ . A diagonal  $AC$  divide  $\hat{A}$  em dois ângulos, iguais a  $30^\circ$  e  $15^\circ$ . A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não o contém forma o quadrilátero  $A'B'C'D'$ . Calcule o perímetro de  $A'B'C'D'$ .

**Resolução**

Observe a figura:



Vamos chamar de  $y$  o comprimento do menor lado do paralelogramo.

De acordo com a figura, temos então:  $\begin{cases} AD = BC = x \\ AB = CD = y \end{cases}$

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $\triangle ABC$ , sendo  $\text{med}(\hat{ACB}) = 15^\circ$ :

$$\frac{AB}{\text{sen}15^\circ} = \frac{BC}{\text{sen}30^\circ} \Rightarrow \frac{y}{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot x$$

No triângulo  $\triangle AB'B$ , retângulo em  $B'$ :

$$AB' = y \cdot \cos 30^\circ = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) \cdot x$$

$$BB' = y \cdot \text{sen}30^\circ = \frac{y}{2} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x$$

No triângulo  $\triangle AD'D$ , retângulo em  $D'$ :

$$AD' = x \cdot \cos 15^\circ = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x$$

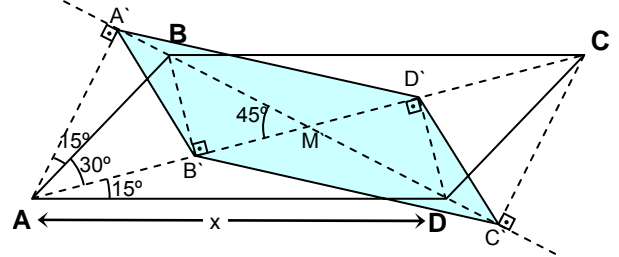
Assim:

$$B'D' = AD' - AB' = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x - \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) \cdot x = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot x = y$$

$$\Rightarrow MB' = MD' = \frac{B'D'}{2} = \frac{y}{2} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x$$

Isso mostra que  $BB' = MB'$  e, portanto, o triângulo retângulo  $\triangle MB'B$  é isósceles, isto é,  $\text{med}(\hat{BMB'}) = \text{med}(\hat{MBB'}) = 45^\circ$ .

Como consequência, o triângulo  $\triangle AA'M$ , retângulo em  $A'$ , também é isósceles, de modo que  $AA' = MA'$ .



Note que no triângulo retângulo  $\triangle AA'B$ , temos que:

$$\text{med}(\hat{A'AB}) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \Rightarrow$$

$$AA' = y \cdot \cos 15^\circ = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{x}{2}$$

Como  $AA' = MA'$ , segue que  $MA' = \frac{x}{2}$ .

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos  $\triangle B'MA'$  e  $\triangle D'MA'$ , sendo  $\text{med}(\hat{B'MA'}) = 45^\circ$  e  $\text{med}(\hat{D'MA'}) = 135^\circ$ , vem que:

$$\begin{cases} (A'B')^2 = (MA')^2 + (MB')^2 - 2 \cdot MA' \cdot MB' \cdot \cos 45^\circ \\ (A'D')^2 = (MA')^2 + (MD')^2 - 2 \cdot MA' \cdot MD' \cdot \cos 135^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (A'B')^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot x^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (A'D')^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot x^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A'B')^2 = \frac{x^2 \cdot (4-2\sqrt{3})}{4} = \frac{x^2}{4} \cdot ((\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2) = \frac{x^2}{4} \cdot (\sqrt{3}-1)^2 \\ (A'D')^2 = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A'B' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cdot x \\ A'D' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \end{cases}$$

Pela simetria, tem-se ainda:  $\begin{cases} C'D' = A'B' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cdot x \\ B'C' = A'D' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \end{cases}$

Finalmente, o perímetro do quadrilátero (paralelogramo)  $A'B'C'D'$  é igual a:

$$A'B' + B'C' + C'D' + A'D' = 2 \cdot \left[ \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \right] \Rightarrow$$

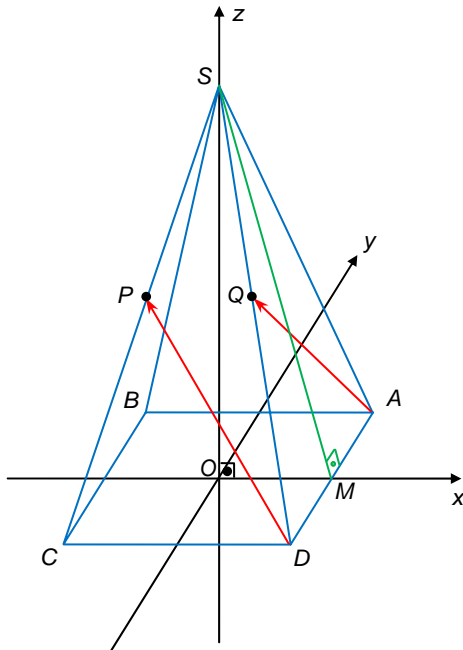
$$A'B' + B'C' + C'D' + A'D' = (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) \cdot x$$

**QUESTÃO 05**

A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular  $SABCD$  é duas vezes maior do que a área de sua base  $ABCD$ . Nas faces  $SAD$  e  $SDC$  traçam-se as medianas  $AQ$  e  $DP$ . Calcule o ângulo entre estas medianas.

**Resolução**

Estabelecendo um sistema de coordenadas tridimensionais, como indicado na figura a seguir, e chamando o lado do quadrado da base da pirâmide de  $w$ , temos:



As coordenadas dos vértices da base quadrada são:

$$A = \left( \frac{w}{2}, \frac{w}{2}, 0 \right), B = \left( -\frac{w}{2}, \frac{w}{2}, 0 \right), C = \left( -\frac{w}{2}, -\frac{w}{2}, 0 \right) \text{ e } D = \left( \frac{w}{2}, -\frac{w}{2}, 0 \right).$$

De acordo com o enunciado, a área da superfície lateral é o dobro da área da base:

$$\frac{w \cdot SM}{2} \times 4 = 2 \cdot w^2 \Rightarrow SM = w$$

Sendo  $h$  a altura da pirâmide, no triângulo  $\triangle SOM$ , retângulo em  $O$ , aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left( \frac{w}{2} \right)^2 = w^2 \Rightarrow h = \frac{w\sqrt{3}}{2}$$

Assim, temos as coordenadas de  $S = (0, 0, h) = \left( 0, 0, \frac{w\sqrt{3}}{2} \right)$ , de modo

que as coordenadas de  $P$  e  $Q$ , pontos médios dos segmentos  $\overline{SC}$  e  $\overline{SD}$ , respectivamente, são dadas por:

$$P = \frac{S+C}{2} = \left( -\frac{w}{4}, -\frac{w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right) \text{ e } Q = \frac{S+D}{2} = \left( \frac{w}{4}, -\frac{w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right).$$

Os vetores  $\overline{DP}$  e  $\overline{AQ}$ , por sua vez, serão dados por:

$$\begin{cases} \overline{DP} = P - D = \left( -\frac{w}{4}, -\frac{w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right) - \left( \frac{w}{2}, -\frac{w}{2}, 0 \right) = \left( -\frac{3w}{4}, \frac{w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right) \\ \overline{AQ} = Q - A = \left( \frac{w}{4}, -\frac{w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right) - \left( \frac{w}{2}, \frac{w}{2}, 0 \right) = \left( -\frac{w}{4}, -\frac{3w}{4}, \frac{w\sqrt{3}}{4} \right) \end{cases}$$

Finalmente, lembramos que o produto interno  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  se relaciona com o ângulo  $\theta$  entre esses vetores por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Assim, calculando cada termo separadamente:

$$\overline{DP} \cdot \overline{AQ} = \left( -\frac{3w}{4} \right) \cdot \left( -\frac{w}{4} \right) + \frac{w}{4} \cdot \left( -\frac{3w}{4} \right) + \frac{w\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{w\sqrt{3}}{4} = \frac{3w^2}{16}$$

$$|\overline{DP}| = \sqrt{\left( -\frac{3w}{4} \right)^2 + \left( \frac{w}{4} \right)^2 + \left( \frac{w\sqrt{3}}{4} \right)^2} = \frac{w\sqrt{13}}{4}$$

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{\left( -\frac{w}{4} \right)^2 + \left( -\frac{3w}{4} \right)^2 + \left( \frac{w\sqrt{3}}{4} \right)^2} = \frac{w\sqrt{13}}{4}$$

Substituindo:

$$\cos \theta = \frac{\overline{DP} \cdot \overline{AQ}}{|\overline{DP}| \cdot |\overline{AQ}|} = \frac{\frac{3w^2}{16}}{\frac{w\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{w\sqrt{13}}{4}} = \frac{3}{13} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{3}{13}\right)$$

**QUESTÃO 06**

Demonstre que a matriz  $\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ , onde  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ,

pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

**Resolução**

Seja  $M = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ , e  $S = \begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{bmatrix}$  a matriz

simétrica tal que  $S^2 = M$ , com  $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Sendo o traço de  $S$  igual a zero, temos:  $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ , pois

sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  três números naturais (portanto não-negativos), a única possibilidade de a soma deles ser nula é quando os três forem simultaneamente nulos. Assim, a matriz  $S$  fica reduzida a:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Impondo a relação  $S^2 = M$ , temos que:

$$S \cdot S = M \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & bc & ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ ac & ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Tomando  $\begin{cases} a = z \\ b = y \\ c = x \end{cases}$ , temos a igualdade verdadeira e, portanto, a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \text{ é tal que } S^2 = M. \text{ Isto significa que a matriz } M \text{ pode}$$

ser escrita como quadrado de uma matriz simétrica, com entradas naturais e traço igual a zero, como queríamos demonstrar.

**QUESTÃO 07**

Considere o conjunto de números complexos  $E = \{a + b\omega\}$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros e  $\omega = cis(2\pi/3)$ . Seja o subconjunto  $U = \{\alpha \in E / \exists \beta \in E \text{ no qual } \alpha\beta = 1\}$ . Determine:

- a) Os elementos do conjunto  $U$ .
- b) Dois elementos pertencentes ao conjunto  $Y = E - U$  tais que o produto seja um número primo.

**Resolução**

a) Primeiramente vamos mostrar que se  $\alpha\beta = 1$  então  $\overline{\alpha\beta} = 1$ .

Seja  $\alpha = a + b\omega = a - \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{3}i}{2}$  e  $\beta = c + d\omega = c - \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}i}{2}$ .

Então  $\alpha\beta = \left(a - \frac{b}{2}\right) \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2} \left[ d \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right) + b \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) \right] - \frac{3bd}{4}$ .

Como  $\alpha\beta = 1$ , então:

$$\begin{cases} d \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right) + b \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) = 0 \\ \left(a - \frac{b}{2}\right) \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) - \frac{3bd}{4} = 1 \end{cases}$$

Calculando  $\overline{\alpha\beta}$ , obtemos:

$$\overline{\alpha\beta} = \left(a - \frac{b}{2}\right) \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}i}{2} \left[ d \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right) + b \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) \right] - \frac{3bd}{4}$$

Note que:  $\text{Re}(\overline{\alpha\beta}) = \text{Re}(\alpha\beta) = 1$  e  $\text{Im}(\overline{\alpha\beta}) = -\text{Im}(\alpha\beta) = 0$ , portanto,

temos:  $\overline{\alpha\beta} = 1$ , logo:

$$(\alpha\beta) \cdot (\overline{\alpha\beta}) = 1 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = 1 \quad (\text{equação 1})$$

Desenvolvendo  $\alpha\overline{\alpha}$  e considerando que, para que  $\alpha \in U$ ,  $a$  e  $b$  não podem ser simultaneamente 0, caso contrário  $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$ .

$$\alpha\overline{\alpha} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - ab + b^2.$$

Note que  $a^2 - ab + b^2 \geq 1, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ , uma vez que se considerarmos a função  $f(a) = a^2 - ab + b^2, a, b \in \mathbb{Z}$  é fácil observar que essa função é sempre não negativa, uma vez que  $\Delta = -3b^2 \leq 0$  e a sua concavidade é para cima. Logo  $f(a) \geq 0$ , além disso,  $f(a) = 0$  se e somente se  $\Delta = 0 \Rightarrow b = 0$  e  $a = 0$ , o que contradiz com a condição de  $a$  e  $b$  não poderem ser nulos simultaneamente, portanto,  $f(a) > 0$ . Como  $f(a)$  é inteira, uma vez que é uma função de inteiros, então:  $f(a) \geq 1$ .

Logo temos que  $f(a) = a^2 - ab + b^2 \geq 1, \forall a, b \in \mathbb{Z} / \alpha \in U$

Analogamente, desenvolvendo  $\beta\overline{\beta}$ , temos (note que se  $\alpha \in U$  então  $\beta \in U$ , nas condições dadas, pois  $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$ ):

$$\beta\overline{\beta} = \left(c - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 = c^2 - cd + d^2 \geq 1, \forall c, d \in \mathbb{Z} / \beta \in U$$

Substituindo na equação 1, obtemos:

$$\underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{(c^2 - cd + d^2)}_{\geq 1} = 1$$

Logo  $a^2 - ab + b^2 = 1$  e  $c^2 - cd + d^2 = 1$

É fácil observar que as raízes  $(a, b)$  são os pares:  $(1; 1), (-1; -1), (1; 0), (-1; 0), (0; 1), (0; -1)$ ,

Logo  $\alpha = \pm 1; \pm \omega; \pm(1 + \omega)$  e  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ .

Logo o conjunto  $U$ , pode ser dado por:

$$U = \{-1, 1, -\omega, +\omega, 1 + \omega, -1 - \omega\}$$

b) Para achar dois valores de tal forma que o produto seja um número primo devemos, primeiramente, zerar a parte imaginária, ou seja:

$$d \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right) + b \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) = 0$$

Como o enunciado pede apenas **dois elementos**, podemos tomar, por exemplo, o caso particular em que:  $a = \frac{b}{2}, c = \frac{d}{2}$ . Neste caso:

$$\alpha\beta = \left(a - \frac{b}{2}\right) \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2} \left[ d \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right) + b \cdot \left(c - \frac{d}{2}\right) \right] - \frac{3bd}{4} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{3bd}{4}$$

Tomando  $b = -2$  e  $d = 2$ , temos:  $\alpha\beta = 3$  e  $a = -1; c = 1$ .

Logo, uma solução é:

$$\boxed{(-1 - 2\omega) \text{ e } (1 + 2\omega)}$$

**QUESTÃO 08**

Seja a equação  $p^n + 144 = q^2$ , onde  $n$  e  $q$  são números inteiros positivos e  $p$  é um número primo. Determine os possíveis valores de  $n, p$  e  $q$ .

**Resolução**

Note que  $p^n + 144 = q^2 \Leftrightarrow p^n = q^2 - 144 \Leftrightarrow p^n = (q + 12)(q - 12)$ , onde a expressão fatorada é uma potência do primo  $p$ . Desse modo, temos duas possibilidades iniciais:

**1) p é divisor apenas de q - 12.**

Nesse caso o segundo fator deve ter módulo unitário, ou seja, temos que  $q + 12 = \pm 1 \Rightarrow q = -11$  ou  $q = -13$ , ambas opções não possíveis pois  $q > 0$ .

**2) p é divisor apenas de q + 12.**

Nesse caso o segundo fator deve ter módulo unitário, ou seja, temos que  $q - 12 = \pm 1 \Rightarrow q = 13$  ou  $q = 11$ . Assim:

- Se  $q = 13$ :

$$\Rightarrow p^n = (q + 12) \underbrace{(q - 12)}_{=1} = 25 \Rightarrow p^n = 5^2 \Rightarrow \boxed{n=2} \text{ e } \boxed{p=5}$$

- Se  $q = 11$ :

$$\Rightarrow p^n = (q + 12) \underbrace{(q - 12)}_{=-1} = -23 \Rightarrow p^n = (-23)^1 \Rightarrow \boxed{n=1} \text{ e } \boxed{p=-23}$$

**3) p é divisor tanto de q + 12 quanto de q - 12.**

Nesse caso devem existir expoentes  $x$  e  $y$  tais que  $p^x = q + 12, p^y = q - 12$  e  $x + y = n$ . Além disso, como  $p$  é divisor simultâneo de  $q + 12$  e  $q - 12$ , ele também é um divisor de  $(q + 12) - (q - 12) = 24$ . Esse número limita os possíveis valores de  $p$  para  $\pm 2$  e  $\pm 3$  (únicos divisores primos de 24). Temos, portanto, mais dois casos a analisar:

a) Se  $p = 2$

Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} 2^x = q + 12 \\ 2^y = q - 12 \end{cases} \Rightarrow 2^x - 2^y = 24 \Rightarrow 2^y \cdot (2^{x-y} - 1) = 2^3 \cdot 3$$

Aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética:

$$2^y \cdot (2^{x-y} - 1) = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 2^y = 2^3 \\ 2^{x-y} - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2^{x-y} = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Assim, encontramos  $x + y = \boxed{n=8}$  e  $q = 2^5 - 12 = \boxed{20}$ .

Ainda é preciso analisar a seguinte situação  $24 = (-8) \cdot (-3)$ :

$$2^x - 2^y = 24 \Rightarrow 2^y \cdot (2^{x-y} - 1) = (-2)^3 \cdot (-3) \Rightarrow \begin{cases} 2^y = (-2)^3 \\ 2^{x-y} - 1 = -3 \end{cases}$$

Como a primeira equação não pode ser resolvida, esse caso pode ser desconsiderado.

b) Se  $p = -2$

Observe que como  $n$  para o caso anterior ( $p = 2$ ) é par então  $p = -2$  também satisfaz a equação  $p^n + 144 = q^2$  se  $q = 20$  e  $n = 8$ . Esta análise dispensa a verificação do caso  $24 = 8 \cdot 3$ .

Novamente ainda analisaremos  $24 = (-8) \cdot (-3)$ . Assim:

$$(-2)^x - (-2)^y = 24 \Rightarrow (-2)^y [(-2)^{x-y} - 1] = (-2)^3 \cdot (-3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2)^y = (-2)^3 \\ (-2)^{x-y} - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (-2)^{x-3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Encontramos então  $x + y = \boxed{n=7}$  e  $q = 2^4 - 12 = 4$ .

c) Se  $\boxed{p=3}$

$$\begin{cases} 3^x = q + 12 \\ 3^y = q - 12 \end{cases} \Rightarrow 3^x - 3^y = 24 \Rightarrow 3^y \cdot (3^{x-y} - 1) = 3 \cdot 8$$

Aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética:

$$3^y \cdot (3^{x-y} - 1) = 3 \cdot 8 \Rightarrow \begin{cases} 3^y = 3 \\ 3^{x-y} - 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 3^{x-1} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Assim, encontramos  $x + y = \boxed{n=4}$  e  $q = 3^3 - 12 = 15$ .

Também é necessário analisar o caso  $24 = (-8) \cdot (-3)$ :

$$3^x - 3^y = 24 \Rightarrow 3^y \cdot (3^{x-y} - 1) = (-3) \cdot (-8) \Rightarrow \begin{cases} 3^y = -3 \\ 3^{x-y} - 1 = -8 \end{cases}$$

Como a primeira equação não pode ser resolvida, esse caso pode ser desconsiderado.

d) Se  $\boxed{p=-3}$

Novamente, como  $n$  para o caso anterior ( $p = 3$ ) é par então  $p = -3$  satisfaz a equação  $p^n + 144 = q^2$  se  $\boxed{q=15}$  e  $\boxed{n=4}$ . Esta análise dispensa a verificação do caso  $24 = 8 \cdot 3$ .

Também analisaremos o caso  $24 = (-8) \cdot (-3)$ :

$$\begin{cases} (-3)^x = q + 12 \\ (-3)^y = q - 12 \end{cases} \Rightarrow (-3)^x - (-3)^y = 24 \Rightarrow (-3)^y [(-3)^{x-y} - 1] = (-3) \cdot (-8)$$

Aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética:

$$(-3)^y [(-3)^{x-y} - 1] = (-3) \cdot (-8) \Rightarrow \begin{cases} (-3)^y = -3 \\ (-3)^{x-y} - 1 = -8 \end{cases}$$

Esse sistema também é impossível.

Assim, as soluções 8 possíveis soluções são:

- $q = 13, n = 2$  e  $p = \pm 5$ .
- $q = 11, n = 1$  e  $p = -23$ .
- $q = 20, n = 8$  e  $p = \pm 2$
- $q = 4, n = 7$  e  $p = -2$
- $q = 15, n = 4$  e  $p = \pm 3$

**Obs.:** Nessa questão admitimos que o número primo  $p$  poderia ser tanto positivo quanto negativo. Vale notar que o enunciado não exigia que  $p$  fosse positivo, além do fato de que a definição de número primo depende principalmente do conjunto no qual trabalhamos. De fato, se o conjunto utilizado for  $\mathbb{N}$  (naturais), temos que um número primo sempre será positivo. Entretanto, se o conjunto utilizado for  $\mathbb{Z}$  (inteiros), temos tanto números primos positivos quanto negativos. Optamos por utilizar a definição que abrangia os primos negativos, uma vez que isso oferece aos candidatos uma resolução mais completa e abrangente. Assim, foi utilizada a definição que considera um número primo aquele divisível por apenas quatro inteiros distintos entre si ( $\pm 1$ , por si próprio e pelo seu simétrico).

**QUESTÃO 09**

Seja o sistema  $\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z)\operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases}$ , onde  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Determine as condições que  $a, b$  e  $c$  devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

**Resolução**

Expandindo as tangentes, obtemos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z)\operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y) - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(z)}{1 + \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z)} = a \\ \frac{\operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z) - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(z)} = b \\ \frac{\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(z) - \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z)}{1 + \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} = c \end{cases}$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y) = u \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z) = v \\ \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(z) = w \end{cases}, \text{ com } \begin{cases} u \neq -1 \\ v \neq -1 \\ w \neq -1 \end{cases}$$

Nesse caso, reescrevemos o sistema como:

$$\begin{cases} \frac{u-w}{1+v} = a \\ \frac{v-u}{1+w} = b \\ \frac{w-v}{1+u} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - av + w = a \\ -u + v - bw = b \\ -cu - v + w = c \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes desse sistema linear, nas incógnitas  $u, v$  e  $w$ , é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & -b \\ -c & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(abc + a + b + c)$$

Considerando  $D \neq 0$ , podemos calcular  $u, v$  e  $w$ , pela regra de Cramer:

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ b & 1 & -b \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-(abc + a + b + c)} = -1 \Rightarrow u = -1$$

Observe que isso viola claramente a condição de existência imposta na troca de variáveis, o que nos leva a descartar essa possibilidade.

Logo, sendo inviável o caso em que  $D \neq 0$ , ficamos com o caso:

$$D = 0 \Rightarrow \boxed{abc + a + b + c = 0}$$

Antes de começarmos a desenvolver o sistema, notemos que se tivermos uma solução em  $u, v$  e  $w$ , tal que  $u \cdot v \cdot w \geq 0$ , também teremos uma solução em  $x, y, z$ , pois:

$$\begin{aligned} (I) & \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y) = u \\ (II) & \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z) = v \\ (III) & \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(z) = w \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y) = u \\ \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}^2(z) = v \cdot w \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}^2(z) = \frac{v \cdot w}{u}$$

Logo, teremos um  $z \in \mathbb{R}$  se e somente se  $u \cdot v \cdot w \geq 0$ .

Analogamente, obtemos  $x$  e  $y$  em função de  $u, v$  e  $w$ .

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} (I) & u - av - w = a \\ (II) & -u + v - bw = b \\ (III) & -cu - v + w = c \end{aligned} \xrightarrow{(II)+(I)} \begin{cases} u - av - w = a \\ 0 + (1-a)v - (1+b)w = b + a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(III)+c \cdot (I)} \begin{cases} u - av - w = a \\ 0 + (1-a)v - (1+b)w = b + a \\ 0 - (ac+1)v + (1-c)w = c + ac \end{cases}$$

Agora, dividimos em dois casos:  $a = 1$  e  $a \neq 1$ .

Caso 1:  $a = 1$

Na equação (II) teremos que  $-(1+b)w = 1+b$ . Tendo que dividir em dois casos novamente:

Caso 1.1:  $a = 1$  e  $b \neq -1$

Nesse caso temos que  $w = -1$ . Absurdo, pois temos da condição de existência que  $w \neq -1$ .

Caso 1.2:  $a = 1$  e  $b = -1$

Como temos que  $a + b + c + abc = 0$ , teremos que qualquer  $c$  satisfaz. Substituindo no sistema inicial:

$$\begin{cases} (I) & u - v - w = 1 \\ (II) & -u + v + w = -1 \Rightarrow \begin{cases} u - v - w = 1 \\ (1-c)u - 2v = 1 + c \end{cases} \\ (III) & -cu - v + w = c \end{cases}$$

Se  $c = 1 \Rightarrow v = -1$ , que não convém pela condição de existência.

Se  $c = -1 \Rightarrow w = -1$ , que não convém pela condição de existência.

Para  $c \neq \pm 1$ , temos:

$$\begin{cases} v = \frac{(1-c)u - (1+c)}{2} \\ w = \frac{(c+1)u - (c+1)}{2} \end{cases}$$

Para  $c < -1$ , faça  $u$  suficientemente negativo, temos que  $\begin{cases} u < 0 \\ v < 0 \\ w > 0 \end{cases}$ .

Para  $-1 < c < 1$ , faça  $u$  suficientemente positivo, temos que  $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \\ w > 0 \end{cases}$ .

Para  $c > 1$ , faça  $u$  suficientemente negativo, temos que  $\begin{cases} u < 0 \\ v > 0 \\ w < 0 \end{cases}$ .

Caso 2:  $a \neq 1$ . A princípio, nesse caso, o sistema linear nas variáveis  $u, v$  e  $w$  é possível e indeterminado, como se observa através do escalonamento. Entretanto, pela simetria do problema nos parâmetros  $a, b$  e  $c$ , podemos verificar que quando entre elas existe uma que assume o valor 1 e outra assume o valor  $-1$ , e a terceira assumindo 1 ou  $-1$  (análogo ao que foi discutido no caso 1 acima), a equação apresentará alguma das três incógnitas ( $u, v$  ou  $w$ ) com valor  $-1$ , violando a condição de existência.

Assim, a condição necessária e suficiente para que o sistema original, nas incógnitas  $x, y$  e  $z$ , tenha pelo menos uma solução, isto é, não seja impossível, é:

$$\begin{cases} abc + a + b + c = 0 \\ (a, b, c) \neq (-1, 1, 1) \\ (a, b, c) \neq (1, -1, 1) \\ (a, b, c) \neq (1, 1, -1) \\ (a, b, c) \neq (-1, -1, 1) \\ (a, b, c) \neq (-1, 1, -1) \\ (a, b, c) \neq (1, -1, -1) \end{cases}$$

**QUESTÃO 10**

Considere a seqüência:  $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}$ ,

$$a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}, \dots$$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta seqüência.

**Resolução**

Note que  $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$

Ainda, observe que um elemento genérico da seqüência respeita a seguinte relação:

$$a_k = \sqrt{\frac{1+a_{k-1}}{2}} \Rightarrow 2a_k^2 - 1 = a_{k-1}$$

Como  $2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$  temos, realizando a substituição  $a_k = \cos \theta_k$  e  $a_{k-1} = \cos \theta_{k-1}$  (observe que  $a_k < 1$ ), vem:

$$2\cos^2 \theta_k - 1 = \cos \theta_{k-1} \Rightarrow \cos 2\theta_k = \cos \theta_{k-1} \Rightarrow \theta_k = \frac{\theta_{k-1}}{2}$$

Assim, considerando  $a_k = \cos \theta_k$ , o produto dos 20 primeiros termos dessa seqüência é dado por:

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \prod_{k=1}^{20} \cos \theta_k \text{ com } \theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ e } \theta_k = \frac{\theta_{k-1}}{2}$$

Como  $\theta_k$  é um termo genérico da PG de valor inicial  $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$  e razão

$\frac{1}{2}$ , podemos dizer que  $\theta_k = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$  e assim:

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \prod_{k=1}^{20} \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

Explicitando esse produtório:

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{18}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{17}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{16}} \cdots \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^1} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^0}$$

Multiplicando e dividindo por  $\frac{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}}}{6 \cdot 2^{19}}$  temos

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \frac{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{18}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{17}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{16}} \cdots \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}}}$$

De onde surge a seguinte recorrência, pela fórmula do arco duplo

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \frac{\frac{1}{2^{19}} \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^0}}{\frac{1}{2^2} \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{17}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{18}}}{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{18}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{17}} \cdot \cos \frac{\pi}{6 \cdot 2^{16}} \cdots \cos \frac{\pi}{6}}$$

Logo:

$$\prod_{k=1}^{20} a_k = \frac{1}{2^{19}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}}} = \frac{1}{2^{20}} \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{19}}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{21} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{20}}}$$