

ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

ELITE RESOLVE

IME 2008

TESTES DE

MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251 1012

MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

- a) $\binom{n+2}{2}$ b) $\binom{n}{3}$ c) $\frac{n!}{3!}$
d) $(n-3)!$ e) 3^n

Resolução Sem Resposta

Como as bolas são idênticas, o total de maneiras de distribuir n bolas idênticas nos três cestos distintos é igual ao total de soluções inteiras não-negativas da equação $x+y+z=n$, com x o total de bolas no cesto verde, y o total de bolas no cesto amarelo e z o total de bolas no cesto azul.

O total de soluções dessa equação é dado pelo número de permutações dos símbolos $\underbrace{111\dots 1}_{n \text{ vezes}}+$, ou seja, é uma permutação

com repetições (dois símbolos $+$ e n símbolos 1). Assim:

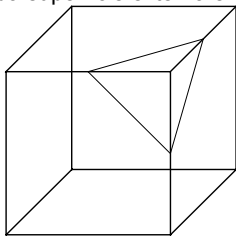
$$\text{Total de permutações} = P_{n+2}^{n+2} = \frac{(n+2)!}{n!2!} = \binom{n+2}{2}$$

Desse modo, o total de modos de se distribuir as n bolas nos três cestos é $\binom{n+2}{2}$.

Comentário: Provavelmente a banca se equivocou na alternativa (a) onde ficou caracterizada uma fração, quando na verdade deveria ser um número binomial.

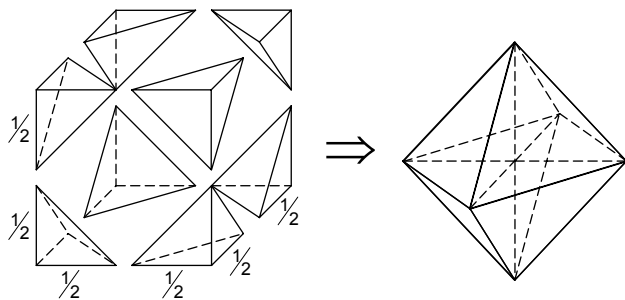
QUESTÃO 2

Um plano corta um cubo com aresta de comprimento 1 passando pelo ponto médio de três arestas concorrentes no vértice A e formando uma pirâmide, conforme as figura a seguir. Este processo é repetido para todos os vértices. As pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro cuja área da superfície externa é igual a:



- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1
d) 2 e) $2\sqrt{2}$

Resolução Alternativa B



Como podemos verificar no esquema, as faces do octaedro regular formado são triângulos equiláteros de lado $L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

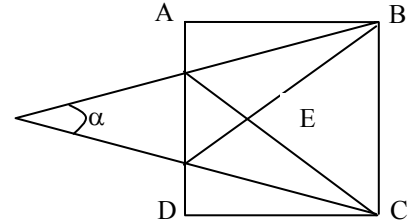
A área de um triângulo equilátero de lado L é dada por

$$S_{\Delta} = L^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área de cada triângulo é dada por $S_{\Delta} = L^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Como o octaedro possui 8 faces triangulares idênticas, segue que sua área lateral é dada por $S_{\text{octaedro}} = 8 \cdot S_{\Delta} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$.

QUESTÃO 3

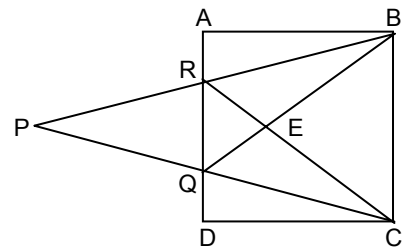
Na figura seguinte ABCD é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo equilátero. O valor de $\tan\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ é igual a:



- a) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{5}$ e) $1 - \frac{\sqrt{3}}{5}$

Resolução Alternativa C

Da figura a seguir, temos:



O triângulo BCE é semelhante ao triângulo RQE (caso AAA), de modo que o triângulo RQE também é equilátero.

A tangente de $\frac{\alpha}{2}$ é a tangente do ângulo ABR. Assim:

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AR}{AB} = \frac{AR}{1} = AR$$

Como $AB = 1$, segue que $AR + RQ + QD = AB = 1$.

Pela figura, que a altura do triângulo equilátero RQE é dada por $1 - h$, onde h é a altura do triângulo BCE. Como $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a altura de RQE é

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. Por simetria, temos que $AR = QD$, de modo que $2AR + RQ = 1$.

A partir da altura de RQE, temos:

$$1 - h = RQ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow RQ = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

Assim, $2AR = 1 - \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \Rightarrow AR = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

QUESTÃO 4

Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

- a) 1,0 b) π c) 10,0
d) 11,0 e) 11,1

Resolução Alternativa E

Como a primeira linha do determinante está multiplicada por $\log x$, temos:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = \log x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Jacobi, temos que o determinante obtido se subtrairmos a primeira linha da terceira não muda de valor, de modo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 0 & 0 & (\log^2 x) - 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace utilizando a terceira linha do determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 0 & 0 & (\log^2 x) - 1 \end{vmatrix} = (\log^2 x - 1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x \end{vmatrix}$$

$$= (\log^2 x - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \log 6x & \log 3x \end{vmatrix} = (\log^2 x - 1)(\log 3x - \log 6x)$$

Substituindo a relação anterior em (1), encontramos:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = \log x \cdot (\log^2 x - 1)(\log 3x - \log 6x) = 0$$

Temos, então, três possibilidades:

- 1) $\log x = 0 \Rightarrow x = 1$
- 2) $\log 6x = \log 3x \Rightarrow 6x = 3x \Rightarrow x = 0$ (note que esse valor não é uma raiz, uma vez que temos obrigatoriamente $x > 0$ pela restrição do domínio da função logarítmica).
- 3) $\log^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \log x = \pm 1 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 10^{-1}$

Por fim, somando as 3 soluções encontradas, temos que

$$S = 10 + 1 + 10^{-1} = 10 + 1 + 0,1 = 11,1.$$

QUESTÃO 5

Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação: $y^{3/2} + 5y + 2y^{1/2} + 8 = 0$

- a) 5
- b) 2
- c) 21
- d) $5^{1/2}$
- e) 0,5

Resolução Alternativa C

Fazendo a transformação $y^{1/2} = x$ na equação do enunciado, temos:

$$y^{3/2} + 5y + 2y^{1/2} + 8 = 0 \Rightarrow x^3 + 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

Sejam y_1 , y_2 e y_3 as raízes da equação original e x_1 , x_2 e x_3 as raízes da equação transformada. Aplicando as relações de Girard nessa equação, temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 2 \\ x_1x_2x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Utilizando que $y^{1/2} = x$, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} = -5,$$

onde $y_1^{1/2} = x_1$, $y_2^{1/2} = x_2$ e $y_3^{1/2} = x_3$. Assim:

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} &= -5 \Rightarrow (\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})^2 = (-5)^2 \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + 2(\sqrt{y_1y_2} + \sqrt{y_1y_3} + \sqrt{y_2y_3}) &= 25 \end{aligned}$$

Como $\sqrt{y_1y_2} + \sqrt{y_1y_3} + \sqrt{y_2y_3} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$, temos:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 2(\sqrt{y_1y_2} + \sqrt{y_1y_3} + \sqrt{y_2y_3}) &= y_1 + y_2 + y_3 + 2 \cdot 2 = 25 \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 &= 21 \end{aligned}$$

QUESTÃO 6

Uma série de Fibonacci é uma seqüência de valores definida da seguinte maneira:

- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, $T_1 = T_2 = 1$
- Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, isto é, $T_N = T_{N-2} + T_{N-1}$

Se $T_{18} = 2584$ e $T_{21} = 10946$, então T_{22} é igual a:

- a) 12225
- b) 13530
- c) 17711
- d) 20412
- e) 22121

Resolução Alternativa C

Utilizando a regra $T_N = T_{N-1} + T_{N-2}$, temos:

$$\begin{aligned} T_{22} &= T_{21} + T_{20} \\ T_{20} &= T_{19} + T_{18} \\ T_{19} &= T_{18} + T_{17} \end{aligned}$$

Calculando então T_{22} :

$$\begin{aligned} T_{22} = T_{21} + T_{20} &= T_{21} + (T_{19} + T_{18}) = T_{21} + ((T_{18} + T_{17}) + T_{18}) = T_{21} + 2 \cdot T_{18} + T_{17} \\ \Rightarrow T_{22} &= 10946 + 2 \cdot 2584 + T_{17} = 16114 + T_{17} \end{aligned}$$

Logo, temos que $T_{22} > 16114$

Por outro lado, temos que

$$T_{17} < T_{18} = 2584 \Rightarrow 16114 + T_{17} < 16114 + 2584 \Rightarrow T_{22} < 18698$$

Logo, $16114 < T_{22} < 18698$. A partir das alternativas, temos que o único número que satisfaz esse intervalo é 17711.

QUESTÃO 7

Assinale a opção correspondente ao valor de μ que faz com que a equação $(1 + \mu)s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0$ possua raízes no eixo imaginário.

- a) 0
- b) 6
- c) 14
- d) 29
- e) 41

Resolução Alternativa D

Vamos assumir μ real por inspeção das alternativas. Por hipótese, se a equação admite raízes no eixo imaginário, temos, pelo Teorema das Raízes Complexas e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que as raízes são da forma αi , $-\alpha i$ e β , onde α e β são reais e i é a unidade imaginária.

Aplicando a relação de Girard para a soma das raízes, temos:

$$(\alpha i) + (-\alpha i) + \beta = -\frac{6}{1 + \mu} \Rightarrow \beta = -\frac{6}{1 + \mu}$$

Substituindo a raiz β na equação do enunciado:

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \left(-\frac{6}{1 + \mu} \right)^3 + 6 \left(-\frac{6}{1 + \mu} \right)^2 + 5 \left(-\frac{6}{1 + \mu} \right) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{6^3}{(1 + \mu)^2} + \frac{6^3}{(1 + \mu)^2} - \frac{30}{1 + \mu} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que $\frac{30}{1 + \mu} = 1 \Rightarrow \mu = 29$.

QUESTÃO 8

Assinale a opção correspondente ao número de possíveis valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ tais que o lugar geométrico representado pela equação

$$3x^2 + 4y^2 - 16y - 12x + t g \alpha + 27 = 0$$

- a) nenhum valor
- b) apenas 1 valor
- c) 2 valores
- d) 4 valores
- e) um número infinito de valores

Resolução Alternativa C

Completando os quadrados dessa equação, temos:

$$3x^2 + 4y^2 - 16y - 12x + tg\alpha + 27 = 0 \Rightarrow 3(x-2)^2 + 4(y-2)^2 = 1 - tg\alpha$$

Essa equação representa, de maneira geral, uma cônica. Assim, para que essa cônica se degenere em um ponto, temos obrigatoriamente que

$$3(x-2)^2 + 4(y-2)^2 = 0$$

Assim, para que tenhamos um único ponto,

$$3(x-2)^2 + 4(y-2)^2 = 1 - tg\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 2\pi)$ há apenas duas soluções: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

QUESTÃO 9

Sendo o ponto A (8, -2) um vértice de um losango ABCD e $2x+y+1=0$ a reta que contém os vértices B e D, assinale a opção correspondente ao vértice C.

- a) (-2, -8)
- b) (0, -4)
- c) (4, 3)
- d) (-4, -8)
- e) (-1, 7)

Resolução Alternativa D

Considere as seguintes propriedades de um losango:

- a) As diagonais são perpendiculares;
- b) As diagonais cruzam-se no ponto médio;

A partir disso, concluímos que a reta que passa por A e C é perpendicular à reta que passa por B e D. Assim, se m_{AC} é o coeficiente angular da reta AC e m_{BD} é o coeficiente angular da reta BD, temos:

$$m_{AC} = -\frac{1}{m_{BD}} = \frac{1}{2}$$

Como a reta AC passa por (8, -2), temos que sua equação é dada por:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 8) \Rightarrow x - 2y - 12 = 0$$

Pela propriedade (b), temos que a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 12 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

é o ponto médio das diagonais. Logo, o ponto médio é M (2, -5). Como este ponto é o ponto médio de A e C:

$$2 = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{8 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = -4$$

$$-5 = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -8$$

Assim, C = (-4, -8).

QUESTÃO 10

Sejam L, D e U matrizes quadradas de ordem n cujos elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna l_{ij} , d_{ij} e u_{ij} , respectivamente, são dados por:

$$l_{i,j} = \begin{cases} i^2, & \text{para } i \geq j \\ i \cdot j, & \text{para } i < j \end{cases}, \quad d_{i,j} = \begin{cases} i+1, & \text{para } i=j \\ j, & \text{para } i \neq j \end{cases}, \quad e \quad u_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{para } i \leq j \\ i+j, & \text{para } i > j \end{cases}$$

O valor do determinante de $A = LDU$ é igual a:

- a) 0
- b) 1
- c) n
- d) n+1
- e) $\frac{n+1}{n}$

Resolução Alternativa D

Como $A = L.D.U$, temos, pelo teorema de Binet, que

$$\det(A) = \det(L.D.U) = \det(L) \cdot \det(D) \cdot \det(U) \quad (1)$$

Observando as regras de construção, temos que $l_{ij}=0$ para $i < j$, $d_{ij}=0$ para $i \neq j$ e $u_{ij}=0$ para $i > j$, donde segue que a matriz L é triangular inferior, a matriz D é diagonal e a matriz U é triangular superior. Logo, as três matrizes são triangulares e, portanto, seus determinantes são iguais à multiplicação dos elementos da diagonal principal.

Lembrando que se um elemento está na diagonal principal então $i = j$, temos:

1) matriz L:

$$l_{ij} = l_{ii} = \frac{i^2}{ii} = 1 \Rightarrow \det L = \prod_{i=1}^n l_{ii} = \prod_{i=1}^n (1) = 1$$

2) matriz D:

$$d_{ij} = d_{ii} = \frac{i+1}{i} \Rightarrow \det D = \prod_{i=1}^n d_{ii} = \prod_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

3) matriz U:

$$u_{ij} = u_{ii} = \frac{2i}{i+1} = 1 \Rightarrow \det U = \prod_{i=1}^n u_{ii} = \prod_{i=1}^n (1) = 1$$

Substituindo esses valores em (1), temos:

$$\det A = 1 \cdot (n+1) \cdot 1 = n+1$$

QUESTÃO 11

Assinale a opção correspondente aos valores de k para os quais o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} e^x + e^y = e^{x+y} \\ x + y = k \end{cases}$$

admite solução real.

- a) $0 \leq k \leq 2$
- b) $0 \leq k \leq \ln 2$
- c) $k \geq e^{-2}$
- d) $k > \ln 4$
- e) $0 \leq k \leq 1$

Resolução Alternativa D

Do sistema, temos:

$$\begin{cases} e^x + e^y = e^{x+y} \\ x + y = k \end{cases} \Rightarrow y = k - x$$

Substituindo $y = k - x$ na primeira equação:

$$e^x + e^y = e^x + e^{k-x} = e^k \Rightarrow e^x + \frac{e^k}{e^x} = e^k \Rightarrow \frac{e^{2x} - e^k \cdot e^x + e^k}{e^x} = 0.$$

Como $e^x > 0$, temos que $e^{2x} - e^k \cdot e^x + e^k = 0$. Fazendo $z = e^x$, temos então a equação

$$z^2 - e^k \cdot z + e^k = 0$$

O sistema deve ter solução real, de modo que o discriminante dessa equação deve ser não-negativo. Assim:

$$\Delta = (-e^k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e^k = e^{2k} - 4e^k \geq 0 \Rightarrow e^k(e^k - 4) \geq 0$$

As raízes da equação $z^2 - e^k \cdot z + e^k = 0$ são dadas então por:

$$z = \frac{e^k \pm \sqrt{e^k(e^k - 4)}}{2}$$

Por uma simples verificação, ambas são positivas, de modo que a única restrição que temos para o problema é $\Delta \geq 0$. Como $e^k > 0$, segue que $e^k - 4 \geq 0 \Rightarrow e^k \geq 4 \Rightarrow k \geq \ln 4$.

Comentário: de acordo com o gabarito oficial, a resposta é $k > \ln 4$. Entretanto, se $k = \ln 4$, o sistema tem solução real, dada por $x = y = \ln 2$, de modo que a resposta mais correta seria $k \geq \ln 4$. Porém, se a resposta esperada pela banca são os valores de k para os quais o sistema admite soluções reais distintas, temos então que $k > \ln 4$.

QUESTÃO 12

A soma dos números inteiros positivos de quatro algarismos que admitem 3, 5 e 7 como fatores primos é:

- a) 11025
- b) 90300
- c) 470005
- d) 474075
- e) 475105

Resolução **Alternativa D**

Observe que se um número admite 3, 5 e 7 como fatores primos, então esse número deve ser múltiplo de 105 (=3.5.7). Deste modo, todos os números inteiros que admitem 3, 5 e 7 como fatores primos formam uma PA de razão 105.

O primeiro número positivo de quatro algarismos divisível por 105 é dado por 10.105 = 1050, enquanto o último número de quatro algarismos divisível por 105 é o número 9975 = 95.105. Dessa forma, queremos encontrar a soma dos termos da PA que tem razão 105, $a_1 = 1050$ e $a_n = 9975$.

Notando que $n = 95 - 10 + 1 = 86$, temos, a partir da fórmula da soma dos termos da PA, que a soma dos números inteiros de quatro algarismos que admitem 3, 5 ou 7 como fatores primos é dada por:

$$\text{Soma} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1050 + 9975) \cdot 86}{2} \Rightarrow \text{Soma} = 474075$$

QUESTÃO 13

Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor

de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Resolução **Alternativa B**

Como $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$

Elevando a última igualdade ao cubo, temos:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 &= x^6 + 3x^2 + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} = x^6 + \frac{1}{x^6} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Substituindo $x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$ na última relação, encontramos então que

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 2.$$

QUESTÃO 14

Sejam $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = g(f^{-1}(x))$. Se os valores da base e da altura de um triângulo são definidos por $h(0,5)$ e $h(0,75)$ respectivamente, a área desse triângulo é igual a:

- a) $\frac{e}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
- d) $\sqrt{10}$
- e) e

Resolução **Alternativa C**

A área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{h(0,5) \cdot h(0,75)}{2} = \frac{g(f^{-1}(0,5)) \cdot g(f^{-1}(0,75))}{2} = \frac{e^{f^{-1}(0,5)} \cdot e^{f^{-1}(0,75)}}{2} \quad (1)$$

Seja $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Assim, temos:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Para determinarmos a inversa de f, trocamos x e y de lugar na última igualdade, de modo que:

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

Escrevendo y como função de x a partir da última igualdade, conseguimos então determinar a expressão da função inversa:

$$\begin{aligned} x(e^{2y} + 1) &= e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y}(x - 1) = -1 - x \Rightarrow e^{2y} = \frac{-1 - x}{x - 1} = \frac{1 + x}{1 - x} \\ \Rightarrow 2y &= \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \end{aligned}$$

Assim, temos que a inversa de f(x) é a função:

$$f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

Dessa forma:

$$f^{-1}(0,5) = \ln\sqrt{\frac{1 + 0,5}{1 - 0,5}} = \ln\sqrt{3}$$

$$f^{-1}(0,75) = \ln\sqrt{\frac{1 + 0,75}{1 - 0,75}} = \ln\sqrt{7}$$

Substituindo em (1), temos que a área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{e^{\ln\sqrt{3}} \cdot e^{\ln\sqrt{7}}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

QUESTÃO 15

Seja a_i um dos termos da progressão geométrica com oito elementos

$\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$, e $S = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_8$.

Se $b = \frac{S}{-5}$ e $f(x) = |x + 2b| + |2x - b|$, o valor de $f(1)$ será:

- a) -7
- b) 7
- c) 11
- d) -11
- e) 1

Resolução **Alternativa C**

Calculando os termos da progressão geométrica, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2^1 \\ a_2 &= 1 = 2^0 \\ a_3 &= 1/2 = 2^{-1} \\ a_4 &= 1/4 = 2^{-2} \\ a_5 &= 1/8 = 2^{-3} \\ a_6 &= 1/16 = 2^{-4} \\ a_7 &= 1/32 = 2^{-5} \\ a_8 &= 1/64 = 2^{-6} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} S &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_8 = \log_2 2 + \log_2 2^0 + \dots + \log_2 2^{-6} \\ &\Rightarrow S = 1 + 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 = -20 \end{aligned}$$

Dessa forma, $b = \frac{-20}{-5} = 4$, e, portanto, $f(x) = |x + 8| + |2x - 4|$.

Logo, $f(1) = 9 + 2 = 11$.