

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
**c a m p i n a s**

**ELITE**  
**RESOLVE**

**IME 2007**  
**MATEMÁTICA**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**  
**(19) 3251 1012**

**MATEMÁTICA**

**QUESTÃO 1**

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , e seja P uma matriz

inversível tal que  $B = P^{-1}AP$ . Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz  $A^n$ .

**Resolução**

Primeira solução:

Como  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ .

Temos que  $\det(A^n) = (\det(A))^n$

Assim,  $\det(A^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Segunda solução:

$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow \det B = (\det P^{-1}) \cdot (\det A) \cdot (\det P)$   
Sabendo que  $\det P^{-1} = 1/(\det P)$ , temos:  $\det A = \det B$   
Como B é uma matriz diagonal:

$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ , portanto  $\det A^n = \det B^n = \frac{1}{2^n}$

**QUESTÃO 2**

Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{k+1} = \frac{2}{3} a_k$$

$$b_{k+1} = \frac{4}{5} b_k$$

onde  $a_k$  e  $b_k$ , para  $k \geq 1$ , são os comprimentos dos catetos do k-ésimo triângulo retângulo. Se  $a_1 = 30$  cm e  $b_1 = 42$  cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Resolução**

Seja  $A_k$  a área do k-ésimo triângulo retângulo. Tal área é dada por:

$A_k = \frac{a_k \cdot b_k}{2}$ . Para encontrarmos a relação de recorrência na seqüência das áreas, fazemos:

$$A_{k+1} = \frac{a_{k+1} \cdot b_{k+1}}{2} = \frac{\frac{2}{3} a_k \cdot \frac{4}{5} b_k}{2} = \frac{8}{15} \cdot \frac{a_k \cdot b_k}{2} = \frac{8}{15} A_k$$

Assim,  $\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{8}{15}$ , para todo k inteiro positivo, ou seja, a razão entre

dois termos consecutivos quaisquer é constante, o que caracteriza a seqüência  $(A_1, A_2, A_3, \dots)$  como uma progressão geométrica de razão

$q = \frac{8}{15}$  e primeiro termo  $A_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{2} = \frac{30 \cdot 42}{2} = 630 \text{ cm}^2$ . Sendo

$|q| < 1$ , podemos calcular o limite da soma dos k primeiros termos quando  $k \rightarrow \infty$ .

$$S_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{630}{1 - \frac{8}{15}} = 1350 \text{ cm}^2$$

**QUESTÃO 3**

Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais positivos. Determine o valor de  $P = \alpha\beta$ .

**Resolução**

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \frac{1}{2} \log_3 \beta = 10 \quad (I) \\ \frac{1}{2} \log_3 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \quad (II) \end{cases}$$

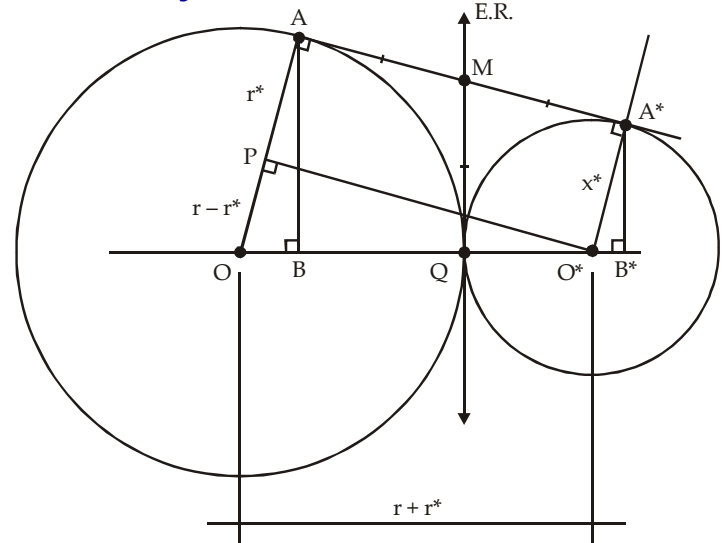
Subtraindo (II) de (I), temos:

$$\frac{5}{2} \log_3 \alpha + \frac{5}{2} \log_3 \beta = 0 \Rightarrow \log_3 \alpha + \log_3 \beta = 0 \Rightarrow \log_3 \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

**QUESTÃO 4**

Sejam C e C\* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r\* e centros O e O\*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C\* nos pontos não coincidentes A e A\*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA\* em torno do eixo OO\*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r\*.

**Resolução**



O ponto M pertence ao eixo radical (E. R.) e à tangente  $\overline{AA^*}$ , portanto  $MA = MA^* = MQ$ .

Da figura, temos:

$$AA^{*2} = PO^{*2} = (r+r^*)^2 - (r-r^*)^2 = 4rr^* \Leftrightarrow AA^* = 2\sqrt{rr^*} \Leftrightarrow MQ = \sqrt{rr^*}$$

Pelo teorema de Pappus-Guldin, temos  $S = 2\pi \cdot MQ \cdot AA^* \Rightarrow$

$$S = 2\pi \cdot 2\sqrt{rr^*} \cdot \sqrt{rr^*} = 4\pi rr^*$$

**QUESTÃO 5**

Resolva a equação

$$\log_{(\sin x + \cos x)} (1 + \sin 2x) = 2, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Resolução**

Nosso problema, no universo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , possui as seguintes condições de existência:

- i)  $\sin x + \cos x > 0$
- ii)  $\sin x + \cos x \neq 1$
- iii)  $1 + \sin 2x > 0$

Supondo que tais condições são válidas, podemos então reescrever nossa equação, utilizando para isso as propriedades dos logaritmos:

$$\log_{\sin x + \cos x} (1 + \sin 2x) = 2 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

Expandindo o quadrado do lado esquerdo, temos:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x$$

E isso nos mostra que independentemente de qual é o valor de x (pertencente ao universo), a equação a equação

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \text{ sempre tem solução.}$$

Analisando agora as condições de existência, temos:

i)  $\sin x + \cos x > 0 \Rightarrow \sin x > -\cos x$

Portanto, no intervalo do universo, temos  $x \in \left] -\frac{\pi}{4}; 0 \right[$

ii)  $\sin x + \cos x \neq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, no intervalo do universo, temos:

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

iii)  $\sin 2x + 1 > 0 \Rightarrow \sin 2x > -1$

Assim, no intervalo do universo, temos:

$2x \neq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4}$

Dessa forma, os valores que satisfazem a equação são todos aqueles do universo, com exceção daqueles que desrespeitam as condições de existência (i), (ii) e (iii).

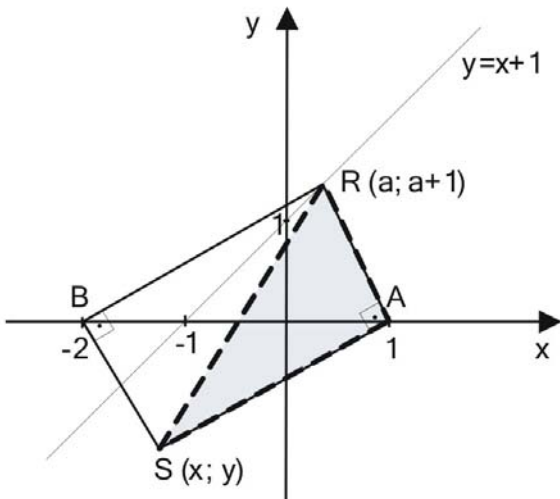
Assim temos  $S = \left] -\frac{\pi}{4}, 0 \right[ \cup \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

**QUESTÃO 6**

O quadrilátero BRAS, de coordenadas  $A(1,0)$ ,  $B(-2,0)$ ,  $R(x_1,y_1)$  e  $S(x_2,y_2)$  é construído tal que  $\widehat{R\hat{A}S} = \widehat{R\hat{B}S} = 90^\circ$ . Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação  $y = x + 1$ , determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t.

**Resolução**

Como o ponto R pertence à reta  $y=x+1$ , temos que ele pode ser parametrizado como  $(a; a+1)$



Através da ilustração, percebemos que as retas AR e AS, assim como as retas BS e BR, são perpendiculares, de modo que o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Lembrando que o coeficiente

angular de uma reta é dado por  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , temos:

$$m_{AR} \cdot m_{AS} = -1 = m_{BS} \cdot m_{BR}$$

$$\frac{(a+1)-0}{a-1} \cdot \frac{0-y}{1-x} = \frac{y-0}{x-(-2)} \cdot \frac{a+1-0}{a-(-2)}$$

$$\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{y}{1-x} = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{a+1}{a+2}$$

Temos que a ordenada do ponto R,  $(a+1) \neq 0$  (de outra maneira, não poderíamos formar o quadrilátero)

Assim, podemos cancelar esse termo em ambos os membros. Por uma razão semelhante temos que  $y \neq 0$ . Assim:

$$(a+2) \cdot (x+2) = (a-1) \cdot (x-1)$$

$$ax + 2a + 2x + 4 = ax - x - a + 1 \Rightarrow 3x = -3a - 3$$

$$\Rightarrow x = -a - 1 \Rightarrow a = -x - 1$$

Substituindo em  $m_{AR} \cdot m_{AS} = -1$ , temos:

$$-1 = \frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{y}{x-1} = \frac{-x}{-x-2} \cdot \frac{y}{x-1} \Rightarrow xy = (x-1)(-x-2) \Rightarrow xy = -x^2 - 2x + x + 2$$

Portanto, temos que o lugar geométrico é dado pela equação:

$x^2 + x + xy - 2 = 0$

**OBS.:** Lembrando que a equação geral de uma cônica é dada por  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , e que o sinal de  $\Delta = B^2 - 4.A.C$  define qual é a nossa cônica, temos:

$\Delta = (1/2)^2 - 4.1.0 \Rightarrow \Delta > 0$

Logo, o lugar geométrico do ponto S é uma hipérbole.

**QUESTÃO 7**

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as raízes da equação  $x^2 + (m-15)x + m = 0$ .

Sabendo que  $x_1$  e  $x_2$  são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

**Resolução**

**1ª SOLUÇÃO:**

Para que a equação  $x^2 + (m-15)x + m = 0$  tenha soluções inteiras,  $\Delta = (m-15)^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 34m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9$  ou  $m \geq 25$ .

Sabendo que  $x_1$  e  $x_2$  são inteiros, vamos determinar m:

$$x^2 + (m-15)x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + mx - 15x + m = 0 \Leftrightarrow m(x+1) = 15x - x^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{15x - x^2}{x+1} \Leftrightarrow m = \frac{16x - x - x^2}{x+1} \Leftrightarrow m = \frac{16x}{x+1} - x$$

Da equação original, sendo  $x_1$  e  $x_2$  as raízes da equação, temos  $x_1 x_2 = m \Rightarrow m$  é inteiro.

Logo  $x+1$  é divisor de 16  $\Rightarrow x+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$ .

Assim, temos:

- $x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow m = 0$
- $x+1 = -1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow m = 34$
- $x+1 = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow m = 7$
- $x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow m = 27$
- $x+1 = 4 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow m = 9$
- $x+1 = -4 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow m = 25$
- $x+1 = 8 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow m = 7$
- $x+1 = -8 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow m = 27$
- $x+1 = 16 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow m = 0$
- $x+1 = -16 \Rightarrow x = -17 \Rightarrow m = 34$

Como cada m satisfaz as condições  $m \leq 9$  ou  $m \geq 25$ , temos que  $m \in \{0, 7, 9, 25, 27, 34\}$

**2ª SOLUÇÃO:**

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as raízes da equação, temos, de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 - m \\ x_1 x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 15$$

Assim, temos:

$x_1(x_2+1) + x_2+1 = 15+1 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1) = 16$

Portanto,  $(x_1+1)$  e  $(x_2+1)$  são fatores de 16, pois  $x_1$  e  $x_2$  são inteiros.

Como os divisores de 16 são  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ , supondo sem perda de generalidade que  $x_1 \leq x_2$  e sabendo que  $m = x_1 x_2$ , temos a seguinte tabela que reúne todos os valores possíveis para m, a partir dos fatores  $(x_1+1)$  e  $(x_2+1)$ :

$x_1+1$	$x_2+1$	$x_1$	$x_2$	m
1	16	0	15	0
2	8	1	7	7
4	4	3	3	9
-16	-1	-17	-2	34
-8	-2	-9	-3	27
-4	-4	-5	-5	25

Assim,  $m \in \{0, 7, 9, 25, 27, 34\}$

**QUESTÃO 8**

Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as m + n bolas.

**Observação:** uma seqüência é dita simétrica quando possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

**Resolução**

Para garantir simetria, precisamos ter exatamente o mesmo número de bolas pretas à esquerda e à direita do centro, o mesmo sendo válido para as bolas brancas. Vamos dividir em dois casos:

i) m + n = par e ii) m + n = ímpar.

**Em (i),** como m + n é par, temos 2 possibilidades:

a) m e n ímpares: não podemos formar seqüência, pois o número de bolas à esquerda e à direita do centro não pode ser igual, logo, resposta **zero**;

b) m e n pares: como não temos termo central, temos  $\frac{m}{2}$  bolas pretas

e  $\frac{n}{2}$  bolas brancas do mesmo lado; assim, podemos formar as seqüências permutando tais bolas; portanto, temos

$$\frac{(m+n)!}{\left(\frac{m}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}$$

**Em (ii),** como m + n = ímpar, Temos que necessariamente, ou m ou n é ímpar e podemos construir a seguinte seqüência:

$$b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)} \ \underbrace{b_{\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}}_{\text{bola central da seqüência}} \ b_{\left(\frac{m+n+3}{2}\right)} \ \dots \ b_{m+n}$$

Para que a seqüência seja simétrica, temos que  $b_{m+n}=b_1$ ;  $b_{m+n-1}=b_2$ ;...;  $b_{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)}=b_{\left(\frac{m+n+3}{2}\right)}$  e assim sucessivamente.

A bola central deve ser necessariamente aquela da cor cuja quantidade é ímpar. Assim, para formar as seqüências simétricas,

basta escolhermos as bolas de 1 a  $\frac{m+n-1}{2}$ , que pode ser realizada de:

c)  $\frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}$  maneiras, se m é ímpar

d)  $\frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{m}{2}\right)!}$  maneiras, se n é ímpar.

**QUESTÃO 9**

Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}, \text{ determine o valor numérico de } \frac{a+b}{c}.$$

**Resolução**

Do enunciado, temos a seguinte condição de existência:  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ .

Além disso, podemos dizer que:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} \\ \frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + ab = bc + c^2 \text{ (I)} \\ ab + b^2 = ac + c^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II), vem:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= c(b - a) \Leftrightarrow \\ (a + b)(a - b) &= -c(a - b) \Leftrightarrow \\ \frac{a+b}{c} &= -1 \text{ ou } a = b. \end{aligned}$$

Se  $a = b$ , então a primeira igualdade fica:  $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \frac{2a}{c} = \frac{a+c}{a} = 1 + \frac{c}{a}$ . Fazendo  $\frac{a}{c} = x$ , temos:

$$2x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1/2 \Leftrightarrow a = c = b \text{ ou } c = -2a = -2b. \text{ Substituindo novamente na primeira igualdade, temos:}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+a}{a} = 2 \text{ ou } \frac{a+b}{c} = \frac{a+a}{-2a} = -1$$

**QUESTÃO 10**

Seja f:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\sum_{k=0}^n f(k) = 2008 \frac{(n+1)}{(n+2)}$ , onde  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$  são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de  $\frac{1}{f(2006)}$ .

**Resolução**

Expandindo o somatório para n = 2006:

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2005) + f(2006)$$

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = \left[ \sum_{k=0}^{2005} f(k) \right] + f(2006)$$

Assim, podemos reescrever nossa igualdade, isolando f(2006):

$$f(2006) = \sum_{k=0}^{2006} f(k) - \sum_{k=0}^{2005} f(k)$$

Sabendo que, para n = 2006 e n = 2005 temos

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = 2008 \frac{(2006+1)}{(2006+2)} \text{ e } \sum_{k=0}^{2005} f(k) = 2008 \frac{(2005+1)}{(2005+2)} \text{ obtemos:}$$

$$f(2006) = 2008 \frac{2007}{2008} - 2008 \frac{2006}{2007}$$

$$f(2006) = 2007 - 2008 \cdot \frac{2006}{2007} = \frac{2007^2 - 2008 \cdot 2006}{2007} =$$

$$= \frac{2007^2 - (2007+1) \cdot (2007-1)}{2007} = \frac{2007^2 - (2007^2 - 1)}{2007} = \frac{1}{2007}$$

Portanto,  $\frac{1}{f(2006)} = 2007$



## **Resultados Turma ITA/IME/AFA somente da unidade CAMPINAS**

### **2003:**

- 3º lugar de SP na EspCEEx
- 1º lugar de SP na EPCAr (3º ano)
- 12º lugar de SP na AFA
- 1 aprovado no IME
- 100% dos alunos foram aprovados na 1ª fase da Unicamp
- 80% dos alunos foram aprovados na 2ª fase da Unicamp

### **2004:**

- 4 alunos aprovados na AFA (dos 5 que haviam prestado)!
- 7º lugar de SP na AFA
- 15º lugar de SP na AFA
- 1 aprovado no IME
- 1 aprovado EspCEEx

### **2005:**

- 2 alunos aprovados na AFA
- 1º lugar da UNESP - Matemática
- 1º lugar da UFSCar - Matemática
- 80% dos alunos foram aprovados em Universidades públicas

### **2006:**

- 4 alunos aprovados e classificados na AFA (além de 2 aprovados e não classificados), dos 7 que prestaram!
- 3 alunos aprovados na EPCAr (dos 6 que prestaram)
- 4º lugar de SP na EPCAr (3º ano)
- ... em 2006 é só o começo... venha ser aprovado você também!